VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

ТЕОРИЯ ИГР

Дж. фон НЕЙМАН
О. МОРГЕНШТЕРН

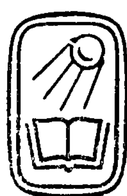
# Теория игр и экономическое поведение



Дж. фон НЕЙМАН, О. МОРГЕНШТЕРН

# ТЕОРИЯ ИГР И ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Перевод с английского
под редакцией и с добавлением
Н. Н. ВОРОБЬЕВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517.8
Н 46
УДК 519.2

# THEORY OF GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR

by JOHN von NEUMANN
and
OSKAR MORGENSTERN

PRINCETON
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
1953

**Теория игр и экономическое поведение.** Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Перев. с англ. под ред. и с доб. Н. Н. Воробьева. Главная редакция физико-математической литературы, изд-ва «Наука», 1970.

Монография является классическим, основополагающим трудом по теории игр. Большинство понятий и идей, разрабатываемых в настоящее время в теории игр, берут свое начало из этого труда. Многие направления теории игр, лишь намеченные в книге, не получили в дальнейшем по тем или иным причинам научного развития и к настоящему времени оказались в стороне от традиционной теоретико-игровой проблематики. Привлечение внимания к этим вопросам представляется весьма желательным.

В качестве приложения помещен составленный редактором очерк «Развитие теории игр», в котором излагается история математических идей, приведших к созданию теории игр, комментируется содержание монографии, а также дается краткий обзор развития теории игр как математической дисциплины за время, прошедшее с момента опубликования книги Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна. К книге приложен список литературы, составленный редактором перевода.

Библ. 181 назв. Илл. 81. Табл. 28.

2-2-3
31-70

# ОГЛАВЛЕНИЕ


От редактора русского перевода . . . . . . . . . . 11
Предисловие к русскому переводу . . . . . . . . . . 12
Предисловие к первому изданию . . . . . . . . . . 21
Предисловие ко второму изданию . . . . . . . . . . 22
Предисловие к третьему изданию . . . . . . . . . . 23
Технические замечания . . . . . . . . . . 25

Глава I. **Формулировка экономической задачи** . . . . . . . . . . 27

§ 1. Математический метод в экономике . . . . . . . . . . 27
1.1. Вводные замечания . . . . . . . . . . 27
1.2. Трудности в применении математического метода . . . . . . . . . . 28
1.3. Необходимые ограничения целей исследования . . . . . . . . . . 32
1.4. Заключительные замечания . . . . . . . . . . 33

§ 2. Качественное обсуждение проблемы рационального поведения . . . . 34
2.1. Проблема рационального поведения . . . . . . . . . . 34
2.2. Экономика «Робинзона Крузо» и экономика общественного обмена 35
2.3. Число переменных и число участников . . . . . . . . . . 38
2.4. Случай многих участников. Свободная конкуренция . . . . . . . 39
2.5. Лозаннская школа . . . . . . . . . . 41

§ 3. Понятие полезности . . . . . . . . . . 41
3.1. Предпочтения и полезности . . . . . . . . . . 41
3.2. Принципы измерения. Предварительные рассмотрения . . . . . 42
3.3. Вероятность и численные полезности . . . . . . . . . . 43
3.4. Принципы измерения. Подробное рассмотрение . . . . . . . . 46
3.5. Принципиальная структура аксиоматического рассмотрения численных полезностей . . . . . . . . . . 50
3.6. Аксиомы и их интерпретация . . . . . . . . . . 51
3.7. Общие замечания об аксиомах . . . . . . . . . . 53
3.8. Роль понятия маргинальной полезности . . . . . . . . . . 55

§ 4. Структура теории. Решения и нормы поведения . . . . . . . . . . 57
4.1. Простейшее понятие решения для одного участника . . . . . . . 57
4.2. Обобщение на всех участников . . . . . . . . . . 59
4.3. Решение как множество дележей . . . . . . . . . . 60
4.4. Нетранзитивное понятие «превосходства», или «доминирования» 62
4.5. Точное определение решения . . . . . . . . . . 64
4.6. Интерпретация нашего определения в терминах «норм поведения» 66
4.7. Игры и общественные организации . . . . . . . . . . 68
4.8. Заключительные замечания . . . . . . . . . . 69

Глава II. **Общее формальное описание стратегических игр** . . . . . . . . 72

§ 5. Введение . . . . . . . . . . 72
5.1. Перенесение центра внимания с экономики на игры . . . . . . . 72
5.2. Общие принципы классификации и подхода . . . . . . . . . . 72

§ 6. Упрощенное понятие игры . . . . . . . . . . 74
6.1. Объяснение технических терминов . . . . . . . . . . 74
6.2. Элементы игры . . . . . . . . . . 75
6.3. Информация и предварение . . . . . . . . . . 76
6.4. Предварение, транзитивность и сигнализация . . . . . . . . . . 77

§ 7. Полное описание понятия игры . . . . . . . . . . 81

7.1. Переменность характеристик каждого хода . . . . . . . . . . . . 81
7.2. Общее описание . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
§ 8. Множества и разбиения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86
8.1. Желательность теоретико-множественного описания игры . . . . 86
8.2. Множества, их свойства и их графическое представление . . . . . 87
8.3. Разбиения, их свойства и их графическое представление . . . . . 89
8.4. Логическая интерпретация множеств и разбиений . . . . . . . . 92
§*9. Теоретико-множественное описание игры . . . . . . . . . . . . 93
*9.1. Разбиения, описывающие игру . . . . . . . . . . . . . . . . 93
*9.2. Рассмотрение разбиений и их свойств . . . . . . . . . . . . 96
§*10. Аксиоматическая формулировка . . . . . . . . . . . . . . . 99
*10.1. Аксиомы и их интерпретация . . . . . . . . . . . . . . . 99
*10.2. Логическое обсуждение аксиом . . . . . . . . . . . . . . 101
*10.3. Общие замечания относительно аксиом . . . . . . . . . . . 102
*10.4. Графическое представление . . . . . . . . . . . . . . . . 103
§ 11. Стратегии и окончательное упрощение описания игры . . . . . . . 105
11.1. Понятие стратегии и его формализация . . . . . . . . . . . 105
11.2. Окончательное упрощение описания игры . . . . . . . . . . . 107
11.3. Роль стратегий в упрощенной форме игры . . . . . . . . . . 109
11.4. Смысл ограничения, касающегося нулевой суммы . . . . . . . 110
Глава III. **Игры двух лиц с нулевой суммой. Теория** . . . . . . . . 111
§ 12. Предварительный обзор . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111
12.1. Общие соображения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111
12.2. Игра с одним игроком . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111
12.3. Случай и вероятность . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112
12.4. Ближайшая цель . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 113
§ 13. Исчисление функций . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 113
13.1. Основные определения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 113
13.2. Операции max и min . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115
13.3. Вопросы коммутативности . . . . . . . . . . . . . . . . . 117
13.4. Смешанный случай. Седловые точки . . . . . . . . . . . . . 120
13.5. Доказательства основных фактов . . . . . . . . . . . . . . 122
§ 14. Вполне определенные игры . . . . . . . . . . . . . . . . . 124
14.1. Формулировка проблемы . . . . . . . . . . . . . . . . . . 124
14.2. Минорантная и мажорантная игры . . . . . . . . . . . . . . 126
14.3. Рассмотрение вспомогательных игр . . . . . . . . . . . . . 127
14.4. Выводы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131
14.5. Анализ полной определенности . . . . . . . . . . . . . . . 133
14.6. Перемена ролей игроков. Симметрия . . . . . . . . . . . . . 135
14.7. Игры, не являющиеся вполне определенными . . . . . . . . . 136
14.8. Программа детального анализа полной определенности . . . . . 138
§*15. Игры с полной информацией . . . . . . . . . . . . . . . . . 139
*15.1. Постановка задачи. Индукция . . . . . . . . . . . . . . . 139
*15.2. Точное условие (основание индукции) . . . . . . . . . . . . 140
*15.3. Точное условие (индуктивный переход) . . . . . . . . . . . 143
*15.4. Точное исследование индуктивного перехода . . . . . . . . . 144
*15.5. Точное исследование индуктивного перехода (продолжение) . . . 147
*15.6. Результат для случая полной информации . . . . . . . . . . 149
*15.7. Применение к шахматам . . . . . . . . . . . . . . . . . . 151
*15.8. Другой подход. Словесные рассуждения . . . . . . . . . . . 152
§ 16. Линейность и выпуклость . . . . . . . . . . . . . . . . . . 155
16.1. Геометрические основания . . . . . . . . . . . . . . . . . 155
16.2. Операции над векторами . . . . . . . . . . . . . . . . . . 156
16.3. Теорема об опорной гиперплоскости . . . . . . . . . . . . . 160
16.4. Теорема об альтернативах для матриц . . . . . . . . . . . . 163
§ 17. Смешанные стратегии. Решение всех игр . . . . . . . . . . . 168
17.1. Два элементарных примера . . . . . . . . . . . . . . . . . 168
17.2. Обобщение изложенной точки зрения . . . . . . . . . . . . . 169
17.3. Оправдание процедуры применительно к отдельной партии . . . 170
17.4. Минорантная и мажорантная игры (для смешанных стратегий) 172
17.5. Полная определенность в общем случае . . . . . . . . . . . 174

17.6. Доказательство основной теоремы . . . . . . . . . . . . . . . . 176
17.7. Сравнение подходов для чистых и для смешанных стратегий . . 179
17.8. Исследование полной определенности в общем случае . . . . . 181
17.9. Дальнейшие свойства оптимальных стратегий . . . . . . . . . 183
17.10. Ошибки и их следствия. Перманентная оптимальность . . . . . 185
17.11. Перемена ролей игроков. Симметрия . . . . . . . . . . . . 188

Глава IV. **Игры двух лиц с нулевой суммой. Примеры** . . . . . . . . . 192

§ 18. Некоторые элементарные игры . . . . . . . . . . . . . . . . . 192

18.1. Простейшие игры . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 192
18.2. Подробное количественное рассмотрение этих игр . . . . . . . 193
18.3. Качественное описание . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 196
18.4. Обсуждение некоторых конкретных игр (обобщения игры в «орлянку») 198
18.5. Рассмотрение несколько более сложных игр . . . . . . . . . 201
18.6. Случай и неполная информация . . . . . . . . . . . . . . . 205
18.7. Интерпретация этого результата . . . . . . . . . . . . . . 207

§*19. Покер и блеф . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 208

*19.1. Описание покера . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 208
*19.2. Блеф . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 210
*19.3. Описание покера (продолжение) . . . . . . . . . . . . . . 211
*19.4. Точная формулировка правил . . . . . . . . . . . . . . . 213
*19.5. Описание стратегий . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 213
*19.6. Формулировка задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 217
*19.7. Переход от дискретной задачи к непрерывной . . . . . . . . 218
*19.8. Математическое построение решения . . . . . . . . . . . . 221
*19.9. Детальный анализ решения . . . . . . . . . . . . . . . . 225
*19.10. Интерпретация решения . . . . . . . . . . . . . . . . . 226
*19.11. Более общие формы покера . . . . . . . . . . . . . . . . 229
*19.12. Дискретные расклады . . . . . . . . . . . . . . . . . . 230
*19.13. $m$ возможных ставок . . . . . . . . . . . . . . . . . . 231
*19.14. Чередующиеся ставки . . . . . . . . . . . . . . . . . . 232
*19.15. Математическое описание всех решений . . . . . . . . . 237
*19.16. Интерпретация решений. Заключение . . . . . . . . . . . 239

Глава V. **Игры трех лиц с нулевой суммой** . . . . . . . . . . . . . 241

§ 20. Предварительный обзор . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 241

20.1. Общие соображения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 241
20.2. Коалиции . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 242

§ 21. Простая мажоритарная игра трех лиц . . . . . . . . . . . . . 243

21.1. Описание игры . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 243
21.2. Анализ игры. Необходимость «соглашений» . . . . . . . . . 244
21.3. Анализ игры. Коалиции. Роль симметрии . . . . . . . . . . 245

§ 22. Дальнейшие примеры . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 246

22.1. Несимметричное распределение. Необходимость компенсаций . 246
22.2. Коалиции различной силы. Обсуждение . . . . . . . . . . . 248
22.3. Одно неравенство. Формулы . . . . . . . . . . . . . . . . 250

§ 23. Общий случай . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 251

23.1. Исчерпывающее обсуждение. Несущественные и существенные игры 251
23.2. Окончательные формулы . . . . . . . . . . . . . . . . . . 252

§ 24. Обсуждение одного возражения . . . . . . . . . . . . . . . . 254

24.1. Случай полной информации и его значимость . . . . . . . . . 254
24.2. Детальное обсуждение. Необходимость компенсаций между тремя или более игроками . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 255

Глава VI. **Общая теория. Игры $n$ лиц с нулевой суммой** . . . . . . . 258

§ 25. Характеристическая функция . . . . . . . . . . . . . . . . . 258

25.1. Мотивировка и определение . . . . . . . . . . . . . . . . 258
25.2. Обсуждение введенного понятия . . . . . . . . . . . . . . 260
25.3. Фундаментальные свойства . . . . . . . . . . . . . . . . . 260
25.4. Непосредственные математические следствия . . . . . . . . 262

§ 26. Построение игры с заданной характеристической функцией . . . . 263

26.1. Построение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 263
26.2. Резюме . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 265

§ 27. Стратегическая эквивалентность. Несущественные и существенные игры . . . 265
27.1. Стратегическая эквивалентность. Редуцированная форма . . . . . 265
27.2. Неравенства. Величина $\gamma$ . . . . . . . . . . . . 268
27.3. Несущественность и существенность . . . . . . . . . . 269
27.4. Различные критерии. Неаддитивные полезности . . . . . . 270
27.5. Неравенства в случае существенности . . . . . . . . . . 272
27.6. Векторные операции над характеристическими функциями . . . 273
§ 28. Группы, симметрия и безобидность . . . . . . . . . . . . 274
28.1. Подстановки, их группы и их воздействие на игру . . . . . . 274
28.2. Симметрия и безобидность . . . . . . . . . . . . 278
§ 29. Повторное рассмотрение игры трех лиц с нулевой суммой . . . . . . 279
29.1. Качественные рассмотрения . . . . . . . . . . . . 279
29.2. Количественные рассмотрения . . . . . . . . . . . . 281
§ 30. Точная форма общих определений . . . . . . . . . . . . 283
30.1. Определения . . . . . . . . . . . . . . . . 283
30.2. Обсуждение и обзор результатов . . . . . . . . . . 284
*30.3. Понятие насыщенности . . . . . . . . . . . . . 285
30.4. Три непосредственных цели . . . . . . . . . . . . 290
§ 31. Первые следствия . . . . . . . . . . . . . . . . . 291
31.1. Выпуклость, линейность и некоторые критерии доминирования 291
31.2. Система всех дележей. Одноэлементные решения . . . . . . . 297
31.3. Изоморфизм, соответствующий стратегической эквивалентности 299
§ 32. Нахождение всех решений существенной игры трех лиц с нулевой суммой 301
32.1. Математическая формулировка задачи. Графический метод . . . . 301
32.2. Нахождение всех решений . . . . . . . . . . . . 303
§ 33. Выводы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 306
33.1. Множественность решений. Дискриминация и ее смысл . . . . 306
33.2. Статика и динамика . . . . . . . . . . . . . . . 307

Глава VII. **Игры четырех лиц с нулевой суммой** . . . . . . . . . 308
§ 34. Предварительный обзор . . . . . . . . . . . . . . . 308
34.1. Общая точка зрения . . . . . . . . . . . . . . 308
34.2. Формализация существенной игры четырех лиц с нулевой суммой 308
34.3. Перестановки игроков . . . . . . . . . . . . . . 310
§ 35. Обсуждение некоторых специальных точек куба $Q$ . . . . . . . . 312
35.1. Вершина I (и V, VI, VII) . . . . . . . . . . . . 312
35.2. Вершина VIII (и II, III, IV). Игра трех лиц и «болвана» . . . . . 315
35.3. Некоторые замечания, касающиеся внутренности $Q$ . . . . . . 318
§ 36. Рассмотрение главных диагоналей . . . . . . . . . . . . 320
36.1. Участок, примыкающий к вершине VIII. Эвристическое описание 320
36.2. Участок, примыкающий к вершине VIII. Точное описание . . . . 322
*36.3. Другие участки главной диагонали . . . . . . . . . . 327
§ 37. Центр и его окрестности . . . . . . . . . . . . . . 328
37.1. Первоначальная ориентировка в отношении условий около центра 328
37.2. Две альтернативы и роль симметрии . . . . . . . . . . 329
37.3. Первая альтернатива в центре . . . . . . . . . . . 330
37.4. Вторая альтернатива в центре . . . . . . . . . . . 331
37.5. Сравнение двух центральных решений . . . . . . . . . 332
37.6. Несимметричные центральные решения . . . . . . . . . 333
§*38. Семейство решений для окрестности центра . . . . . . . . . 335
*38.1. Преобразование решения, принадлежащего первой альтернативе 335
в центре . . . . . . . . . . . . . . . . . . 335
*38.2. Строгое рассмотрение . . . . . . . . . . . . . . 337
*38.3. Интерпретация решений . . . . . . . . . . . . . 342

Глава VIII. **Некоторые замечания, касающиеся $n \geqq 5$ участников** . . . . 344
§ 39. Число параметров в различных классах игр . . . . . . . . . 344
39.1. Ситуация для $n = 3, 4$ . . . . . . . . . . . . . 344
39.2. Ситуация для всех $n \geqq 3$ . . . . . . . . . . . . 344
§ 40. Симметричная игра пяти лиц . . . . . . . . . . . . . 346

40.1. Формализация симметричной игры пяти лиц . . . . . . . . . . 346
40.2. Два крайних случая . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 346
40.3. Связь между симметричной игрой пяти лиц и 1, 2, 3-симметричными играми четырех лиц . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 348

Глава IX. **Композиция и разложение игр** . . . . . . . . . . . 352

§ 41. Композиция и разложение . . . . . . . . . . . . . . . . . . 352
41.1. Поиски игр $n$ лиц, для которых можно найти все решения . . . 352
41.2. Первый тип. Композиция и разложение . . . . . . . . . . 353
41.3. Точные определения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 354
41.4. Анализ разложимости . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 356
41.5. Желательность модификации . . . . . . . . . . . . . . . 358

§ 42. Модификация теории . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 358
42.1. Неполный отказ от условия равенства суммы нулю . . . . . 358
42.2. Стратегическая эквивалентность. Игры с постоянной суммой . . 359
42.3. Характеристическая функция в новой теории . . . . . . . . 361
42.4. Дележи, доминирование, решения в новой теории . . . . . . . 362
42.5. Существенность, несущественность и разложимость в новой теории 364

§ 43. Разлагающее разбиение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 365
43.1. Разлагающие множества. Компоненты игры . . . . . . . . . 365
43.2. Свойства совокупности всех разлагающих множеств . . . . . . 366
43.3. Описание совокупности всех разлагающих множеств. Разлагающее разбиение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 367
43.4. Свойства разлагающего разбиения . . . . . . . . . . . . . 370

§ 44. Разложимые игры. Дальнейшее развитие теории . . . . . . . . 371
44.1. Решение разложимой игры и решения ее компонент . . . . . . 371
44.2. Композиция и разложение дележей и множеств дележей . . . . 372
44.3. Композиция и разложение решений. Основные возможности и предположения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 373
44.4. Обобщение теории. Внешние источники . . . . . . . . . . . 375
44.5. Эксцесс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 377
44.6. Ограничения на эксцесс. Неизолированный характер игры в новой теории . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 379
44.7. Рассмотрение новых понятий $E(e_0)$, $F(e_0)$ . . . . . . . . 379

§ 45. Ограничения на эксцесс. Структура обобщенной теории . . . . . 381
45.1. Нижняя граница эксцесса . . . . . . . . . . . . . . . . . 381
45.2. Верхняя граница эксцесса. Исключенные и вполне исключенные дележи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 382
45.3. Рассмотрение двух границ $|\Gamma|_1$, $|\Gamma|_2$. Их отношение . . . . . 385
45.4. Исключенные дележи и различные решения. Теорема, связывающая $E(e_0)$ и $F(e_0)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 387
45.5. Доказательство теоремы . . . . . . . . . . . . . . . . . 389
45.6. Подведение итогов и заключение . . . . . . . . . . . . . 393

§ 46. Нахождение всех решений в разложимой игре . . . . . . . . . 395
46.1. Элементарные свойства разложений . . . . . . . . . . . . 395
46.2. Разложение и его связь с решениями. Первоначальные результаты относительно $F(e_0)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 397
46.3. Продолжение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 399
46.4. Продолжение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 401
46.5. Окончательный результат для $F(e_0)$ . . . . . . . . . . . 404
46.6. Окончательный результат для $E(e_0)$ . . . . . . . . . . . 406
46.7. Графическое представление части результатов . . . . . . . 408
46.8. Интерпретация: нормальная зона. Наследование различных свойств 409
46.9. «Болваны» . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 411
46.10. Погружение игры . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 411
46.11. Важность нормальной зоны . . . . . . . . . . . . . . . . 414
46.12. Первое возникновение явления передачи: $n = 6$ . . . . . . . 415

§ 47. Существенные игры трех лиц в новой теории . . . . . . . . . 416
47.1. Необходимость рассмотрения этого вопроса . . . . . . . . . 416
47.2. Предварительные замечания . . . . . . . . . . . . . . . . 416
47.3. Рассмотрение шести случаев. Случаи (I) — (III) . . . . . . . 419
47.4. Случай (IV). Первая часть . . . . . . . . . . . . . . . . 419
47.5. Случай (IV). Вторая часть . . . . . . . . . . . . . . . . 421

47.6. Случай (V) . . . . . . . . . . 424
47.7. Случай (VI) . . . . . . . . . . 426
47.8. Интерпретация результатов. Кривые (одномерные части) в решении 427
47.9. Продолжение. Области (двумерные части) в решении . . . . . 428

Глава X. **Простые игры** . . . . . . . . . . 430

§ 48. Выигрывающие и проигрывающие коалиции и игры, в которых они встречаются . . . . . . . . . . 430
48.1. Второй случай п. 41.1. Решения, принимаемые коалициями . . . 430
48.2. Выигрывающие и проигрывающие коалиции . . . . . . . . . 431

§ 49. Характеризация простых игр . . . . . . . . . . 433
49.1. Общие понятия выигрывающих и проигрывающих коалиций . . 433
49.2. Особая роль одноэлементных множеств . . . . . . . . . 435
49.3. Характеризация семейств $W$ и $L$ в реальных играх . . . . . 436
49.4. Точное определение простоты . . . . . . . . . . 438
49.5. Некоторые элементарные свойства простоты . . . . . . . . 438
49.6. Простые игры и их $W$ и $L$. Минимальные выигрывающие коалиции $W^m$ . . . . . . . . . . 439
49.7. Решения простых игр . . . . . . . . . . 440

§ 50. Мажоритарные игры и главное решение . . . . . . . . . . 441
50.1. Примеры простых игр. Мажоритарные игры . . . . . . . 441
50.2. Однородность . . . . . . . . . . 443
50.3. Более прямое использование понятия дележа при образовании решений . . . . . . . . . . 445
50.4. Обсуждение описанного прямого подхода . . . . . . . 446
50.5. Связь с общей теорией. Точная формулировка . . . . . . 447
50.6. Переформулирование полученного результата . . . . . . . 450
50.7. Интерпретация полученного результата . . . . . . . . 452
50.8. Связь с однородными мажоритарными играми . . . . . . . 453

§ 51. Методы перечисления всех простых игр . . . . . . . . . . 454
51.1. Предварительные замечания . . . . . . . . . . 454
51.2. Метод насыщения. Перечисление посредством $W$ . . . . . . . 455
51.3. Основание для перехода от $W$ к $W^m$. Трудности использования $W^m$ 457
51.4. Измененный подход. Перечисление посредством $W^m$ . . . . . 459
51.5. Простота и разложение . . . . . . . . . . 461
51.6. Несущественность, простота и композиция. Рассмотрение эксцесса 463
51.7. Критерий разложимости в терминах $W^m$ . . . . . . . . . . 464

§ 52. Простые игры для небольших значений $n$ . . . . . . . . . . 466
52.1. Случаи $n = 1, 2$ интереса не представляют. Описание случая $n = 3$ 466
52.2. Процедура для $n \geqq 4$. Двухэлементные множества и их роль в классификации $W^m$ . . . . . . . . . . 466
52.3. Разложение в случаях $C^*$, $C_{n-2}$, $C_{n-1}$ . . . . . . . . . . 468
52.4. Простые игры, отличные от $[1, \ldots, 1, n-2]_h$ (с «болванами»). Случаи $C_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-3$ . . . . . . . . . . 470
52.5. Описание случаев $n = 4, 5$. . . . . . . . . . . 470

§ 53. Новые возможности для простых игр при $n \geqq 6$ . . . . . . . . . . 472
53.1. Закономерности, обнаруженные для $n < 6$ . . . . . . . . . . 472
53.2. Шесть основных контрпримеров (для $n = 6, 7$) . . . . . . . 472

§ 54. Нахождение всех решений в соответствующих играх . . . . . . . . 479
54.1. Основания для рассмотрения в простых играх решений, отличных от главного решения . . . . . . . . . . 479
54.2. Перечисление тех игр, для которых все решения известны . . . 480
54.3. Основания для рассмотрения простой игры $[1, \ldots, 1, n-2]_h$ 481

§*55. Простая игра $[1, \ldots, 1, n-2]_h$ . . . . . . . . . . 482
*55.1. Предварительные замечания . . . . . . . . . . 482
*55.2. Доминирование. Главный игрок. Случаи (I) и (II) . . . . . . 482
*55.3. Описание случая (I) . . . . . . . . . . 483
*55.4. Случай (II). Нахождение $\underline{\mathbf{V}}$ . . . . . . . . . . 486
*55.5. Случай (II). Нахождение $\overline{\mathbf{V}}$ . . . . . . . . . . 489
*55.6. Случай (II). $\mathcal{A}$ и $S_*$ . . . . . . . . . . 491
*55.7. Случаи (II′) и (II″). Описание случая (II′) . . . . . . . . 492

*55.8. Случай (II″), $\mathscr{A}$ и V′. Доминирование . . . . . . . . . 494
*55.9. Случай (II″). Нахождение V′ . . . . . . . . . . . . . . . . . 495
*55.10. Описание случая (II″) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 501
*55.11. Другая формулировка полного результата . . . . . . . . 503
*55.12. Интерпретация полученного результата . . . . . . . . . 505

Глава XI. **Общие игры с ненулевой суммой** . . . . . . . . . . . . 510
§ 56. Распространение теории . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 510
56.1. Постановка задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 510
56.2. Фиктивный игрок. Расширение до игры с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$ . . 511
56.3. Вопросы, касающиеся свойств $\overline{\Gamma}$ . . . . . . . . . . . . . . 512
56.4. Ограничения в использовании $\overline{\Gamma}$ . . . . . . . . . . . . . 514
56.5. Две возможные процедуры . . . . . . . . . . . . . . . . . 516
56.6. Дискриминирующие решения . . . . . . . . . . . . . . . 517
56.7. Альтернативные возможности . . . . . . . . . . . . . . 518
56.8. Новое построение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 520
56.9. Возвращение к случаю, когда Г является игрой с нулевой суммой 521
56.10. Анализ понятия доминирования . . . . . . . . . . . . . 524
56.11. Строгие рассуждения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 528
56.12. Новое определение решения . . . . . . . . . . . . . . . 530
§ 57. Характеристическая функция и связанные с ней понятия . . . . . 531
57.1. Характеристическая функция. Расширенная и ограниченная формы 531
57.2. Основные свойства . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 532
57.3. Нахождение всех характеристических функций . . . . . . . 534
57.4. Устранимые множества игроков . . . . . . . . . . . . . . 537
57.5. Стратегическая эквивалентность. Игры с нулевой и постоянной суммой . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 539
§ 58. Интерпретация характеристической функции . . . . . . . . . . 542
58.1. Анализ определения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 542
58.2. Желание выиграть или нанести ущерб . . . . . . . . . . . 543
58.3. Обсуждение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 544
§ 59. Общие рассмотрения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 546
59.1. Обсуждение программы . . . . . . . . . . . . . . . . . . 546
59.2. Редуцированная форма. Неравенства . . . . . . . . . . . 547
59.3. Различные вопросы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 550
§ 60. Решения всех общих игр для $n \leqq 3$ . . . . . . . . . . . . . . 552
60.1. Случай $n = 1$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 552
60.2. Случай $n = 2$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 552
60.3. Случай $n = 3$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 554
60.4. Сравнение с играми с нулевой суммой . . . . . . . . . . . 556
§ 61. Экономическое истолкование результатов для $n = 1, 2$ . . . . . 558
61.1. Случай $n = 1$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 558
61.2. Случай $n = 2$. Рынок двух лиц . . . . . . . . . . . . . . 558
61.3. Рассмотрение рынка двух лиц и его характеристической функции 559
61.4. Обоснование точки зрения, высказанной в § 58 . . . . . . . 561
61.5. Делимые продукты. «Маргинальные пары» . . . . . . . . . 562
61.6. Цена. Обсуждение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 565
§ 62. Экономическая интерпретация результатов для $n = 3$; частный случай 567
62.1. Случай $n = 3$, частный случай. Рынок трех лиц . . . . . . 567
62.2. Предварительное обсуждение . . . . . . . . . . . . . . . 568
62.3. Решения. Первый подслучай . . . . . . . . . . . . . . . . 568
62.4. Решения. Общая форма . . . . . . . . . . . . . . . . . . 570
62.5. Алгебраическая форма результата . . . . . . . . . . . . 571
62.6. Обсуждение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 573
§ 63. Экономическая интерпретация результатов для $n = 3$; общий случай 574
63.1. Делимые товары . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 574
63.2. Анализ неравенств . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 576
63.3. Предварительное обсуждение . . . . . . . . . . . . . . . 578
63.4. Решения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 578
63.5. Алгебраическая форма результата . . . . . . . . . . . . 580
63.6. Обсуждение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 581

§ 64. Общий рынок . . . . . . . . . . 583
64.1. Постановка задачи . . . . . . . . . . 583
64.2. Некоторые частные свойства. Монополия и монопсония . . . . 584

Глава XII. **Обобщения понятий доминирования и решения** . . . . . . 587
§ 65. Обобщение. Частные случаи . . . . . . . . . . 587
65.1. Постановка задачи . . . . . . . . . . 587
65.2. Общие замечания . . . . . . . . . . 588
65.3. Упорядочения, транзитивность, ацикличность . . . . . . . . 589
65.4. Решения для симметричного отношения и для линейного упорядочения . . . . . . . . . . 591
65.5. Решения для частичного упорядочения . . . . . . . . . . 592
65.6. Ацикличность и строгая ацикличность . . . . . . . . . . 594
65.7. Решения для ациклического отношения . . . . . . . . . . 597
65.8. Единственность решений, ацикличность и строгая ацикличность 599
65.9. Применение к играм. Дискретность и непрерывность . . . . . . 602
§ 66. Обобщение понятия полезности . . . . . . . . . . 603
66.1. Обобщение. Два этапа теоретического исследования . . . . . . 603
66.2. Обсуждение первого этапа . . . . . . . . . . 604
66.3. Обсуждение второго этапа . . . . . . . . . . 605
66.4. Желательность унификации двух этапов . . . . . . . . . . 607
§ 67. Обсуждение примера . . . . . . . . . . 608
67.1. Описание примера . . . . . . . . . . 608
67.2. Решение и его интерпретация . . . . . . . . . . 610
67.3. Обобщение; различные дискретные шкалы полезностей . . . . . 612
67.4. Выводы о соглашении . . . . . . . . . . 614

Приложение. **Аксиоматическое построение теории полезности** . . . . 616
А.1. Постановка задачи . . . . . . . . . . 616
А.2. Выводы из аксиом . . . . . . . . . . 617
А.3. Заключительные замечания . . . . . . . . . . 626

Добавление. **Развитие теории игр** (*Н. Н. Воробьев*) . . . . . . . . . 631
Введение . . . . . . . . . . 633
Глава I. **До монографии** . . . . . . . . . . 634
§ 1. Неопределенность исхода игры и ее источники . . . . . . . . 634
§ 2. Комбинаторные игры . . . . . . . . . . 636
§ 3. Азартные игры . . . . . . . . . . 639
§ 4. Стратегические игры. Работы Э. Бореля . . . . . . . . . . 642
§ 5. К теории стратегических игр . . . . . . . . . . 645

Глава II. **Теория игр и экономическое поведение** . . . . . . . . . . 650
§ 1. Постановка экономической проблемы . . . . . . . . . . 650
§ 2. Общее формальное описание стратегических игр . . . . . . . 654
§ 3. Игры двух лиц с нулевой суммой. Теория . . . . . . . . . . 656
§ 4. Игры двух лиц с нулевой суммой. Примеры . . . . . . . . . . 658
§ 5. Игры трех лиц с нулевой суммой . . . . . . . . . . 660
§ 6. Формулировка общей теории. Игры $n$ лиц с нулевой суммой . . 661
§ 7. Игры четырех лиц с нулевой суммой . . . . . . . . . . 663
§ 8. Некоторые замечания, касающиеся случая $n \geqslant 5$ участников 664
§ 9. Композиция и разложение игр . . . . . . . . . . 664
§ 10. Простые игры . . . . . . . . . . 666
§ 11. Общие игры с нулевой суммой . . . . . . . . . . 666
§ 12. Обобщение понятий доминирования и решения . . . . . . . 668
Глава III. **Теория игр — раздел математики** . . . . . . . . . . 670
§ 1. Матричные игры . . . . . . . . . . 670
§ 2. Бесконечные антагонистические игры . . . . . . . . . . 674
§ 3. Кооперативная теория . . . . . . . . . . 679
§ 4. Бескоалиционные и коалиционные игры . . . . . . . . . . 687
§ 5. Динамические игры . . . . . . . . . . 690

Библиография . . . . . . . . . . 695

Предметный указатель . . . . . . . . . . 703

# ОТ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Настоящий перевод сделан по последнему (третьему) американскому изданию монографии. В него включены почти полностью все три авторских предисловия, входящие в оригинал, а также специальное предисловие к русскому изданию, любезно написанное одним из авторов книги, О. Моргенштерном.

К переводу приложен написанный редактором очерк «Развитие теории игр», в котором излагается история математических идей, приведших к созданию теории игр, комментируется содержание данной монографии, а также дается краткий обзор развития теории игр как математической дисциплины за время, прошедшее с момента опубликования книги Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна. Перевод снабжен также библиографией, составленной редактором.

Авторы склонны сопровождать написанные на языке формул математические построения параллельным чисто словесным изложением существа дела. Это достигается ими ценой известной тяжеловесности оборотов, которая неизбежно сохранилась и в переводе ввиду стремления переводчиков и редактора добиться наибольшей близости его к оригиналу.

Этим же стремлением объясняются и отдельные терминологические особенности текста. Некоторые употребляемые авторами теоретико-игровые термины за последнее время в английском языке изменились. Для соответствующих понятий нами введены в переводе русские термины, отличающиеся от принятых в отечественной литературе в той же мере, в какой авторская терминология отличается от современной английской.

Ввиду перегруженности текста авторскими сносками было принято решение отказаться от подстрочных примечаний переводчиков и редактора. Некоторые обширные авторские сноски по техническим причинам были перенесены в соответствующие места текста, набраны петитом и снабжены заголовком «Замечание». Все комментарии, касающиеся отдельных мест книги, приведены в заключающем данное издание очерке редактора. Разделы текста, обозначенные в оригинале одним числом, названы в переводе «параграфами». Разделам, обозначенным двумя или тремя числами, приписано название «пункт».

Перевод монографии выполнили А. А. Корбут (предисловия и главы I и II), В. В. Малинников (§§ 12—14 из главы III и глава V), Л. И. Горьков (глава IV), Л. А. Петросян (§§ 15—17 из главы III), А. С. Михайлова (глава VI), Е. Б. Яновская (главы VII и VIII), А. Н. Ляпунов (глава IX), А. И. Соболев (§§ 48—53 из главы X), И. Н. Врублевская (§§ 54 и 55 из главы X) и О. Н. Бондарева (главы XI, XII и Приложение).

*Н. Н. Воробьев*

# ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

С большим удовольствием принимаю я переданное мне профессором Н. Н. Воробьевым любезное предложение написать небольшое введение к русскому изданию этой книги. Перевод «Теории игр и экономического поведения» на русский язык следует всячески приветствовать; его можно рассматривать как важный шаг в области международного научного сотрудничества и обмена идеями.

Основой для перевода послужило третье издание, опубликованное в Принстоне в 1953 г. Джон фон Нейман и я написали к нему новое предисловие; в остальном — помимо исправления некоторых опечаток — оно тождественно со вторым изданием, вышедшим в 1947 г. В этом предисловии мы отмечали, что за шесть лет, прошедших между двумя изданиями, появилось столько публикаций по теории игр, что мы вынуждены были ограничиться простым перечислением книг по данному вопросу. За 16 минувших с тех пор лет во многих странах и на многих языках появилась целая лавина публикаций.

1. 8 февраля 1957 г. после длительной болезни фон Нейман скончался, будучи еще сравнительно молодым. Невозможно оценить сейчас, каким был бы его собственный дальнейший вклад в теорию игр. Эта область была особенно близка его сердцу, и в ней он добился некоторых из наиболее важных научных достижений в своей жизни — жизни, в течение которой он обогатил много отраслей чистой и прикладной математики, построил излагаемую дисциплину, дал математические основания квантовой механики и изложил логические основы теории электронных вычислительных машин и автоматов. Я опубликовал краткий некролог о покойном друге в «Экономическом журнале» (*The Economic Journal* 68, March 1958). Полная оценка работ фон Неймана со стороны многих специалистов дана в специальном выпуске «Бюллетеня Американского математического общества» (*The Bulletin of the American Mathematical Society* 64, May 1958); там же приведена полная библиография его работ. Его труды собраны в шеститомнике Collected works (A. H. Taub, ed.), Pergamon Press, New York — London, 1961—1963.

2. Здесь было бы уместно дать детальный обзор развития теории игр с 1953 г. Однако это задача такого объема и сложности, что для меня невозможно выполнить ее адекватным образом при имеющихся у меня сроках и объеме. Одна из основных трудностей состоит в том, что литература по теории игр проникла в столь разнообразные области — от алгебраической топологии до приложений даже к таким дисциплинам, как биология и метеорология,— что мало кто может свободно ориентироваться во всех этих областях. Поэтому, следуя примеру предыдущего предисловия, я ограничусь перечислением — по возможности с максимальной полнотой — лишь книг по теории игр, появившихся с 1953 г., снабжая каждое название книги краткими комментариями относительно ее цели и содержания. Затем последует небольшой раздел, описывающий

некоторые принципиальные тенденции в развитии теории игр и рассматривающий несколько широких областей, которые в настоящее время можно выделить.

В этом библиографическом обзоре я, естественно, опускаю работы, выполненные в Советском Союзе и восточноевропейских странах. Любая попытка такого рода была бы с моей стороны необоснованной, ибо я, к сожалению, незнаком с соответствующими языками, а на английский язык переведено далеко не столько этих книг и статей, как того хотелось бы. Кроме того, это было бы излишним, так как означало бы попросту «привозить сов в Афины». Библиография этих работ (в основном русских), составленная в США в июне 1964 г., насчитывает 74 названия, и с тех пор этот список, без сомнения, существенно вырос. Названия этих работ указывают на тот широкий диапазон интересов, о котором мне еще придется сказать. Разумеется, некоторые из этих работ уже хорошо известны на Западе, в частности важные результаты, полученные редактором этого перевода профессором Н. Н. Воробьевым, а также О. Н. Бондаревой и другими авторами. Очевидно, с тех пор в Советском Союзе выполнено много дальнейших важных работ; как показало мне мое участие в Международном конгрессе математиков в Москве в августе 1966 г., эти исследования интенсивно проводятся и сейчас.

3. Следующий список книг, опубликованных после 1953 г., упорядочен хронологически, хотя, по-видимому, можно было бы разделить их на теоретические и прикладные, произведя дальнейшее подразделение внутри этих классов. Одной из причин предпочтения нами хронологического порядка является сильная взаимозависимость между чисто математическими и прикладными работами. Это само по себе является весьма характерным: новые вопросы, возникающие из стремления приложить теорию игр (например, к экономике) и в связи с попытками согласовать теорию игр с классической теорией экономического равновесия, породили новые и весьма интересные математические теоремы. С другой стороны, новые математические результаты открыли возможности новых приложений. Я считаю, что подобное взаимодействие имеет огромное значение и характерно для развития любой полноценной математико-прикладной дисциплины. Это может быть не вполне очевидно из названий цитируемых ниже книг или комментариев к ним, хотя в некоторых случаях это взаимное оплодотворение теории и практики совершенно явственно.

Предлагаемый список содержит только книги, которые полностью или в большей своей части посвящены теории игр. Имеется много других книг, особенно учебников по экономике, линейному программированию, управлению, статистике и т. п., в которые включены главы по теории игр вводного характера; несмотря на всю полезность этих изданий, мы исключили их из нашего списка по соображениям экономии места. Хотя некоторые из указываемых книг уже хорошо известны в Советском Союзе, мы тем не менее сочли удобным привести эту библиографию.

B l a c k w e l l D., G i r s h i k M. A., Theory of games and statistical decisions, London, 1954, xi + 355 стр. [1]).

Это первая книга, в которой авторы, следуя А. Вальду, излагают и используют теорию игр в качестве основы для теории статистических решений, ограничиваясь дискретными распределениями.

---

[1]) Русский перевод: Д. Б л е к у э л л, М. Г и р ш и к, Теория игр и статистических решений, М., ИЛ, 1958.— *Прим. ред.*

Decision proceses. Ed. by R. M. T h r a l l C. H. C o o m b s, R. L. D a v i s, New York, 1954, viii + 332 стр.

Сборник содержит 18 докладов, представленных на семинаре в 1952 г.; многие доклады посвящены теории игр. Особо выделяется доклад Джона Милнора «Игры против природы», в котором он исследует относительную приложимость критериев Вальда (использовавшего минимакс), Лапласа, Сэвиджа, Гурвица и формулирует ряд приемлемых с точки зрения здравого смысла аксиом, которым ни один из этих подходов не удовлетворяет.

B r a i t h w a i t e R. B., Theory of games as a tool for the moral philosopher, Cambridge, 1955, 76 стр.; 2-е изд., 1963.

Философское исследование полезности теории игр для справедливого разрешения общечеловеческих конфликтных ситуаций.

Linear inequalities and related systems. Ed. by H. W. K u h n and A. W. T u c k e r, Princeton, 1956, xxi + 322 стр. [1]).

Проблематика собранных здесь 18 статей достаточно тесно связана с теорией игр, чтобы оправдать включение книги в настоящий список. Эта связь осуществляется посредством известной эквивалентности игр двух лиц с нулевой суммой и пар двойственных задач линейного программирования, а также путем изучения модели расширяющейся экономики фон Неймана, которой посвящено несколько статей. Имеется библиография, содержащая 298 названий.

B e r g e C., Théorie générale des jeux à $n$ personnes, Paris, 1957, 144 стр. [2]).

Строго математическое и весьма сжатое руководство с отчетливо выраженной теоретико-множественной ориентацией, суммирующее известные к тому времени результаты. В последующих работах Берж развил теорию графов и разработал ее приложения к специальным задачам теории игр и родственных областей.

L u c e R. D., R a i f f a H., Games and decisions: Introduction and critical survey, New York, 1957, xix + 509 стр. [3]).

По-видимому, это наиболее известный общий вводный труд по теории игр. Книга в большей части нематематична, но тем не менее требует от читателя высокого уровня сосредоточенности. Она является примером того, сколь далеко можно развить словесные описания без чрезмерных уступок популярности. Изложение весьма полно и ведет от теории полезности к новым формам устойчивости решений игр $n$ лиц (введение $\psi$-устойчивости, рассмотрение «ядра» и т. п.). Имеется обширная библиография.

Contributions to the theory of games III, ed. by M. D r e s h e r, A. W. T u c k e r, Ph. W o l f e, Princeton, 1957, 435 стр.; IV, ed. by A. W. T u c k e r and R. D. L u c e, Princeton, 1959.

Следуя традиции, установленной I и II томами серии, эти две книги содержат некоторые из наиболее фундаментальных работ,

---

[1]) Русский перевод: Линейные неравенства и смежные вопросы, М., ИЛ, 1959.— *Прим. ред.*

[2]) Русский перевод: К. Б е р ж, Общая теория игр нескольких лиц, М., Физматгиз, 1961.— *Прим. ред.*

[3]) Русский перевод: Р. Д. Л ь ю с, Х. Р а й ф а, Игры и решения, М., ИЛ, 1961.—*Прим. ред.*

полученных в данной области. Каждому тому предпослан подробный вступительный обзор, написанный редакторами. В томе III развивается теория игр двух лиц, а том IV посвящен теории игр $n$ лиц; последний содержит также библиографию, насчитывающую 1009 названий.

Burger E., Einführung in die Theorie der Spiele. Mit Anwendung und Beispielen, inbesondere aus Wirtschaftslehre und Sociologie, Berlin, 1959, 169 стр.

В этой краткой книге теория игр рассматривается с большой строгостью как раздел прикладной математики; автор подробно излагает теорию игр $n$ лиц и проводит тщательное рассмотрение значения в смысле Шепли, модели расширяющейся экономики и т. п.

Karlin S., Mathematical methods and theory in games, programming and economics I: Matrix games, programming and mathematical economics II: The theory of infinite games, Reading Mass, London, 1959, I, x + 433 стр.; II, xi + 386 стр. [1]).

В этом чисто математическом трактате автор пытается унифицировать методы. В первом томе рассматриваются конечные пространства стратегий, во втором — бесконечные. Автор занимается исключительно ситуациями, в которых участвуют два лица. Подробно рассматриваются экономические модели и теория математического программирования. Весьма ценным является подробное исследование покера, который, возможно, представляет собой прообраз экономического и политического поведения.

Shubik M., Strategy and market structure: competition, oligopoly and the theory of games, New York, 1959, xviii + 387.

Подзаголовок этой книги (конкуренция, олигополия и теория игр) указывает на тот круг проблем, к которым намечаются подходы с точки зрения идей и методов теории игр. Вводится много новых идей, например: игра на экономическое выживание, роль начальных активов фирмы, поток и стоимость информации и т. д. Эта работа стала краеугольным камнем в теоретико-игровой трактовке экономических проблем. Автор продолжает изложение совершенно новых результатов по экономическому равновесию в выходящей вскоре книге (написанной совместно с Л. Шепли), отдельные разделы которой уже опубликованы корпорацией РЭНД в форме брошюр.

Suzuki M., Gēmu no riron, Tokio, 1959, 242 стр.

Учебник, в котором большое внимание уделено играм $n$ лиц, в том числе рассмотрению ψ-устойчивости, бескоалиционных игр, ситуаций равновесия.

Gale D., The theory of linear economic models, New York — Toronto — London, 1960, xxi + 330 стр. [2]).

---

[1]) Русский перевод (в одном томе): С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономики, М., ИЛ, 1964. Первые две части перевода соответствуют первому тому оригинала, а третья часть — второму тому.— *Прим. ред.*

[2]) Русский перевод: Д. Гейл, Теория линейных экономических моделей, М., ИЛ, 1963.— *Прим. ред.*

Хотя Гейл рассматривает, по существу, линейную математическую экономику, много места уделено теории игр, особенно рассмотрению модели расширяющейся экономики фон Неймана, о которой еще будет идти речь.

Rapoport A., Fights, games and debates, Ann. Arbor, 1960, xvi + 400 стр.

Популярное, ясное, точное описание игровых ситуаций и подходов к ним. В последнем разделе («Споры») рассматриваются индивидуалистический и коллективистский варианты организации общества.

Dresher M., Games of strategy: Theory and applications, Englewood Cliffs, New York, 1961, xii + 186 стр. [1]).

Развитие и применение (преимущественно к играм военного содержания) методов решения игр двух лиц. Приводится также много иллюстраций применения к играм с бесконечными множествами стратегий.

Recent advances in games theory. Papers delivered at a Princeton University Conference, Oct. 4—6, 1961, Princeton, Econometric Research Program, 1962, 282 стр.

Этот неформальный отчет охватывает все области теории игр; большое внимание уделено играм $n$ лиц, проблемам торгов, кооперативным играм без побочных платежей. Некоторые из этих статей были впоследствии опубликованы в других местах.

Martin R. M., Intension and decision, a philosophical study, Englewood Cliffs, 1963, 159 стр.

Автор, являющийся специалистом по математической логике, развивает теорию субъективных намерений (этот термин употребляется в смысле Фреге), основанную в значительной степени на теории предпочтений и полезности фон Неймана — Моргенштерна. Эта теория применяется для определения рациональности и, в частности, для определения полезности высказываний в языковой системе.

Morgenstern O., Spieltheorie und Wirtschaftswissenschaft, Oldenbourg — Wien, 1963, 200 стр.

Сборник статей (включающий некрологи фон Нейману и Вальду), частично носящих вводный характер, частично посвященных приложениям теории игр — в особенности к теории спроса. Развернутое обсуждение совершенного предсказания и теории равновесия.

Vogelsang R., Die mathematische Theorie der Spiele, Bonn, 1963. 254 стр.

Вводное руководство, написанное ясно и со знанием дела, адресованное широкому кругу читателей, обладающих лишь минимальной математической подготовкой.

---

[1]) Русский перевод: М. Дрешер, Стратегические игры. Теория и приложения. М., «Сов. радио», 1964.— *Прим. ред.*

Advances in game theory. Ed. by M. Dresher, L. S. Shapley, A. W. Tucker, Princeton, 1964, 679 стр.

Собранные здесь 29 статей показывают, что фундаментальные исследования по теории игр активно продолжаются одновременно во многих направлениях. В первых 13 статьях рассматриваются игры двух лиц; представляется, что преобладающими здесь являются проблемы, связанные с состоянием информации у игроков. Остальные 16 работ посвящены играм $n$ лиц. Здесь делаются попытки ввести новые понятия решения для бесконечных позиционных игр, в которых имеется континуум альтернатив и допускаются партии бесконечной длины.

Shubik M. (ed.), Game theory and related approaches to social behaviour, New York, 1964, xi + 390 стр.

Эта книга является собранием 23 отрывков, взятых из книг и статей, охватывающих все области фактических и потенциальных приложений теории игр к социальным наукам. Шубик написал введение (80 страниц), в котором дается широкий обзор социальных ситуаций, поддающихся теоретико-игровому анализу.

Isaacs R., Differential games: A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization, New York, 1965, xxii + +384 стр. [1]).

Автор развивает широкую теорию игр преследования, уклонения, соперничества и т. д., описывая непрерывное и дискретное поведение. Многие из рассмотренных здесь задач аналогичны проблемам, изучавшимся в работах Понтрягина, Келенджеридзе и других советских авторов. Указан ряд трудных, до сих пор не решенных задач.

Rapoport A., Chammah A. M., Prisoner's dilemma, Ann. Arbor, 1965.

Наиболее подробный анализ знаменитой проблемы; освещены также многочисленные тщательно продуманные эксперименты, включающие обучение в повторяющихся партиях, цепи Маркова и т. д.

Rapoport A., Two-person game theory: the essential ideas, Ann. Arbor, 1966, 229 стр.

Популярная книга, в которой приведены также многочисленные интересные примеры.

Theory of games, techniques and applications. Ed. by A. Mensch, London, 1966, 490 стр.

Труды конференции, состоявшейся в 1964 г. в Тулоне (Франция) и организованной Комитетом по научным делам при НАТО. Рассматривается широкий круг проблем: информация, преследование, угрозы, экспериментальные игры, распределение ресурсов и т. п.

---

[1]) Русский перевод: Р. Айзекс, Дифференциальные игры, М., «Мир», 1967.— *Прим. ред.*

Shubik M. (ed.), Essays in mathematical economics, in honor of Oskar Morgenstern, Princeton, 1967, xx + 475 стр.

Первая часть этой книги содержит шесть статей по теории игр. Ауман дает подробный обзор кооперативных игр без побочных платежей. Кун обобщает игру справедливого разделения на случай $n$ лиц. Дэвис, Машлер и Пелег приводят важные доказательства для теории множеств договоров и устойчивых конфигураций выигрышей, а Шепли и Шубик дают исчерпывающее рассмотрение связей теории игр с теорией свободной конкуренции.

В дополнение к этим книгам я упомяну еще книгу Nyblen G., The problem of summation in economic science, Lund, 1951, хотя она и вышла до 1953 г. Это первая книга, в которой теория игр применяется к экономике. Дается, в частности, обоснование экономической оценки классической неаддитивности характеристической функции для игр $n$ лиц. Проводится теоретико-игровой анализ денежной инфляции.

Аналогично К. Эрроу (Arrow K., Social choice and individual values, New York, 1951; 2nd ed. 1964) доказал — при некоторой системе разумных аксиом о предпочтениях — неаддитивность индивидуальных предпочтений при попытке построения функции предпочтения для сообщества. Это — основная проблема экономики благосостояния, по которой имеется обширная литература.

Наконец, имеются две книги Зигеля и Фурэйкера (Siegel S., Fouraker L. E., Bargaining and group decision making, New York, 1960; Bargaining behaviour, New York, 1963), в которых описаны важные эксперименты, касающиеся в основном рыночных ситуаций. Большое внимание в этих экспериментах уделялось психологическим аспектам поведения при торгах.

4. Приведенный здесь список основных книг показывает, что в рамках нескольких абзацев нет никакой возможности адекватно отразить основные тенденции развития теории игр после 1953 г. Поэтому я ограничусь перечислением следующих основных вопросов.

а) Исследование игр двух лиц как с нулевой, так и с ненулевой суммой достигло весьма высокого уровня развития. Однако здесь все еще остаются большие вычислительные проблемы, а также вопросы, касающиеся состояния информации игроков, знания ими правил игры, выгодности или невыгодности раскрытия собственной функции полезности в некоторых условиях переговоров и т. п.

Интересной разработкой явилось использование теории игр для обобщения модели расширяющейся экономики фон Неймана, предложенное Кеменем, Моргенштерном и Томпсоном (*Econometrica* 24) (1956), 115—127), а также Моргенштерном и Томпсоном (*Kyklos*, XX (1967), 387—409). В этих работах теория игр используется как математический аппарат, а не как модель реальной действительности; это применение представляется во многих отношениях неожиданным. В первой работе вводится понятие подэкономики и доказывается, что экономика не обязательно будет идти к эффективной точке.

б) В теории кооперативных игр $n$ лиц предпринималось много попыток выработать новые понятия решения — в перспективе прийти тем самым к более простым понятиям и, может быть, даже найти такие решения, которые окажутся единственными. Имелась надежда, что любая игра $n$ лиц в форме характеристической функции должна обладать решением. Эта гипотеза была основана на том факте, что каждая из изучавших-

ся до сих пор игр таким решением действительно обладала, даже если $n$ было сколь угодно велико, как, например, в интересном случае простой игры $[1, \ldots, 1, n-2]_h$ с главным игроком (см. § 55, гл. X). Однако в октябре 1967 г. У. Лукас нашел игру 10 лиц в форме характеристической функции, которая не имеет решения (устойчивого множества). С точки зрения решений эта игра эквивалентна некоторой игре с супераддитивной характеристической функцией (см. L u c a s W. F., A game with no solution, RAND Corp., Memorandum RM-5518-PR, 1967). Это исключительно важное открытие будет стимулировать поиск других понятий решения по их математической и эмпирической значимости и откроет новые направления для дальнейшего развития теории игр.

Одним из возможных подходов к проблеме решений является выделение из всех множеств, описывающих исходы игры, некоторых особых множеств, которые могут считаться в каком-то смысле «устойчивыми». Другой подход заключается в погружении кооперативной игры в бескоалиционные модели переговоров; тем самым кооперативный случай сводится к более простому бескоалиционному. Первый подход, принадлежащий в основном Ауману и Машлеру, представляется весьма обещающим; в частности, он дает возможность для экспериментов, которые стали весьма важными и значение которых несомненно будет возрастать, ибо они уже сейчас ведут за собой теоретические исследования.

Теория кооперативных игр с побочными платежами обобщена на случай игр без побочных платежей. Это привело ко многим новым результатам; например, показано, что существуют игры, не имеющие решения, а также игры без побочных платежей и коалиций, для которых множество $M_1^{(i)}$ устойчивых конфигураций пусто (мы используем обозначения Машлера, которому принадлежит много работ в этой области). Это могло бы привести к пересмотру системы аксиом, при котором осталось бы выполненным требование о том, что любая игра имеет решение.

Важные работы были проделаны (и ведутся в настоящее время) в направлении исследования $c$-ядра. Это понятие было введено фон Нейманом и Моргенштерном и развито Джиллисом (1953). Было показано (впервые, очевидно, О. Н. Бондаревой в 1963 г. и повторно Шепли в 1965 г.), что принадлежащие некоторому классу игры с побочными платежами в форме характеристической функции имеют непустое $c$-ядро; $c$-ядра выпуклых игр изучались Шепли, который обнаружил их специфическую регулярную структуру; Ауман ввел понятие $c$-ядра игры без побочных платежей, а Скарф нашел необходимое и достаточное условие того, что последняя обладает непустым $c$-ядром.

Эти результаты имеют особую ценность для приложений к экономике, и сейчас в этом направлении ведется интенсивная работа. Особо отметим приведенную выше ссылку на совместные публикации Шепли и Шубика.

в) Бескоалиционные игры $n$ лиц основаны на идее ситуаций равновесия, введенных первоначально Нэшем, который показал, что любая конечная игра $n$ лиц имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях. Этот результат широко признан и получил применения во многих областях. Были найдены его чисто алгебраические доказательства, которые привели даже к эффективным схемам вычисления ситуаций равновесия.

Рассмотрение этих игр естественным образом привело к идее (предвосхищенной Вальрасом еще в 1874 г.) использования континуума игроков. Эти усилия выявляют по крайней мере одну точку соприкосновения теории игр и классической лозаннской школы общего экономического

равновесия, хотя теория игр существенно отличается от последней как по своей общей ориентации, так и по направлениям своего развития.

г) Особого упоминания заслуживает множество устойчивых конфигураций, о котором мы уже говорили выше. Большинство результатов этой теории установлено Машлером и Дэвисом (Essays in mathématical economics, M. Shubik, ed.) с использованием топологических методов. Распространение на общую коалиционную структуру дано Пелегом. С вычислительной точки зрения эта весьма многообещающая теория наталкивается на огромные трудности, однако путем введения понятия $k$-ядра (некоторого непустого подмножества множества устойчивых конфигураций) некоторые из них удается преодолеть.

5. Эти немногие замечания едва позволили нам просто упомянуть некоторые из направлений, в которых развивается теория игр. Их следует воспринимать лишь как иллюстрацию существования многих различных тенденций. Имеются чисто математические проблемы большой сложности, возникающие из анализа эмпирических социальных явлений. Последние в свою очередь заметно проясняются новыми математическими приемами. Это взаимодействие весьма плодотворно; оно положило начало лучшему пониманию некоторых основных аспектов человеческого поведения. Перед теорией игр большой путь, и здесь возможно много сюрпризов.

*Оскар Моргенштерн*

Принстон,
апрель 1967 г.
(дополнено
в январе 1968 г.).

# ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга содержит изложение математической теории игр и различных ее приложений. Теория игр развивалась одним из нас начиная с 1928 г. и теперь впервые публикуется во всей своей полноте. Приложения имеют двоякий характер: с одной стороны, к играм в собственном смысле слова, с другой стороны, к экономическим и социологическим проблемам. Мы надеемся показать, что подход к ним с этого направления является наилучшим.

Приложения, которые мы будем развивать применительно к играм, будут служить как для подкрепления самой теории, так и для исследования этих игр. Характер этих взаимных отношений станет ясным по ходу исследования. Наши основные интересы лежат, разумеется, в экономическом и социологическом направлениях. Здесь мы сможем рассмотреть лишь простейшие вопросы. Однако эти вопросы имеют фундаментальный характер.

Кроме того, наша цель состоит прежде всего в том, чтобы показать, что существует строгий подход к вопросам, охватывающим проблемы совпадающих или противоположных интересов, полной или неполной информации, свободных разумных решений или случайных воздействий.

*Джон фон Нейман,*
*Оскар Моргенштерн*

Принстон,
январь 1943 г.

# ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание отличается от первого лишь некоторыми незначительными изменениями. Мы добавили приложение, содержащее аксиоматический вывод численной полезности. Этот вопрос обсуждался весьма подробно, но в основном лишь качественно, в § 3. Мы планировали также написать несколько приложений о применениях к теории размещения отраслей и об играх четырех и пяти лиц; однако эту мысль пришлось оставить из-за перегруженности другой работой.

Со времени публикации первого издания появилось несколько статей, посвященных основной теме этой книги.

Обратим внимание читателя, интересующегося математической стороной проблемы, на следующие работы. А. Вальд развил новую теорию оснований статистических оценок, которая тесно связана с теорией игр двух лиц с нулевой суммой и основана на ней (Statistical decision functions which minimize the maximum risk, *Annals of Math.* **46** (1945), 265—280). Он распространил также основную теорему об играх двух лиц с нулевой суммой (п. 17.6) на некоторые непрерывные случаи (Generalization of a theorem by von Neumann concerning zero-sum two-person games, *Annals of Math.* **46** (1945), 281—286). Новое, очень простое и элементарное доказательство этой теоремы (охватывающее также и более общую теорию, упомянутую в замечании на стр. 177—178) было дано Л. Лумисом (On a theorem of von Neumann, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **32** (1946), 213—215). Далее, интересные результаты относительно роли чистых и смешанных стратегий в играх двух лиц с нулевой суммой были получены И. Капланским (A contribution to von Neumann's theory of games, *Annals of Math.* **46** (1945), 474—479). Мы также предполагаем вернуться к различным математическим аспектам этой проблемы. Теоретико-групповая проблема, сформулированная в замечании на стр. 177—178, была решена К. Шевалле.

Читатель, интересующийся экономической стороной вопроса, найдет более простое изложение рассмотренных в этой книге проблем в работах Л. Гурвица (The theory of economic behavior, *American Economic Review* **35** (1945), 909—925) и Дж. Маршака (Neumann's and Morgenstern's new approach to static economics, *Journal of Political Economy* **54** (1946), 97—115).

*Джон фон Нейман,*
*Оскар Моргенштерн*

Принстон,
сентябрь 1946 г.

# ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Со времени публикации второго издания литература по данной проблеме выросла весьма существенно. Полная библиография к настоящему моменту содержит несколько сотен названий; поэтому мы не будем пытаться привести ее здесь. Мы перечислим лишь следующие книги:

1) Contributions to the theory of games, vol. I (ed. by H. W. Kuhn and A. W. Tucker). Annals of Mathematics Stadies, No. 24, Princeton, Princeton Univ. Press, 1950. Сборник содержит пятнадцать статей тринадцати авторов.

2) Contributions to the theory of games, vol. II (ed. by H. W. Kuhn and A. W. Tucker). Annals of Mathematics Stadies, No. 28, Princeton, Princeton Univ. Press, 1953. Сборник содержит двадцать одну статью двадцати двух авторов [1]).

3) McDonald J., Strategy in poker, business and war, New York, 1950.

4) McKinsey J. C. C., Introduction to the theory of games, New York, 1952 [2]).

5) Wald A., Statistical decision functions, New York, 1950 [3]).

6) Williams J., The compleat strategyst being a primer on the theory of games of strategy, New York, 1953 [4]).

Во всех этих книгах, кроме 6), содержится библиография по теории игр. Интенсивная работа в этом направлении была проведена за последние годы сотрудниками корпорации РЭНД (Санта-Моника, Калифорния). Библиографию этих работ можно найти в публикации RM-950 корпорации РЭНД.

В теории игр $n$ лиц имели место дальнейшие разработки в направлении изучения бескоалиционных игр. В связи с этим следует особо отметить работу Дж. Нэша [5]) (J. E. Nash, Non-cooperative games, Annals of Math. 54 (1951), 286—295). Дальнейшие ссылки на соответствующие работы можно найти в книгах 1), 2), 4).

Из разработок в области математической экономики мы выделим «линейное программирование» и «задачу о назначениях», связи которых с теорией игр оказываются все более многочисленными. Указания на это читатель найдет в тех же книгах 1), 2) и 4).

---

[1]) Многие статьи из этих двух сборников были опубликованы в русском переводе в сборниках «Матричные игры» (Физматгиз, 1961), «Бесконечные антагонистические игры» (Физматгиз, 1963), «Позиционные игры» («Наука», 1967).— *Прим. ред.*

[2]) Русский перевод: Дж. Мак-Кинси, Введение в теорию игр, М., Физматгиз, 1960.— *Прим. ред.*

[3]) Русский перевод см. в сборнике «Позиционные игры», М., «Наука», 1967, стр. 300—522.— *Прим. ред.*

[4]) Русский перевод: Дж. Вильямс, Совершенный стратег, М., «Сов. радио», 1960.— *Прим. ред.*

[5]) Русский перевод: Дж. Нэш, Бескоалиционные игры, сб. «Матричные игры», Физматгиз, 1961, стр. 205—221.— *Прим. ред.*

Предложенная в п. 3.1 и в приложении ко второму изданию теория полезности подверглась значительному развитию как с теоретической, так и с экспериментальной стороны. В связи с этим читатель может обратиться, в частности, к следующим работам:

M. Friedman, L. J. Savage, The utility analysis of choices involving risk, *Journal of Political Economy* **56** (1948), 279—304.

J. Marschak, Rational behaviour, uncertain prospects, and measurable utility, *Econometrica* **18** (1950), 111—141.

F. Mosteller, P. Nogee, An experimental measurement of utility, *Journal of Political Economy* **59** (1951), 371—404.

M. Friedman, L. J. Savage, The expected-utility hypothesis and the measurability of utility, *Journal of Political Economy* **60** (1952), 463—474.

Обращаем внимание читателя также на симпозиум по кардинальным полезностям (*Econometrica* **20** (1952)):

H. Wold, Ordinal preferences or cardinal utility?

A. S. Manne, The strong independence assumption — gasoline blends and probability mixtures.

P. A. Samuelson, Probability, utility, and the independence axiom.

E. Malinvaud, Note on von Neumann-Morgenstern's strong independence axiom.

В связи с критическими замечаниями методологического характера, высказанными некоторыми участниками упомянутого симпозиума, мы хотели бы отметить, что мы применяли аксиоматический метод обычным образом и с обычными предосторожностями. Так, строгое аксиоматическое рассмотрение понятия полезности (п. 3.6 и Приложение) было дополнено введением эвристического характера (в пп. 3.1—3.5). Его роль заключается в сообщении читателю некоторых исходных положений, позволяющих оценить пригодность последующего аксиоматического построения и очертить границы его применимости. В частности, наше рассмотрение и выбор «естественных операций» в этих пунктах покрывают то, что представляется нам существом «аксиомы независимости» Самуэльсона — Маленво.

*Джон фон Нейман,*
*Оскар Моргенштерн*

Принстон,
январь 1953 г.

# ТЕХНИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Сама природа рассматриваемых в этой книге проблем и применяемых в ней методов требует рассуждений, которые во многих случаях являются чисто математическими. Используемые нами математические приемы элементарны в том смысле, что они не используют высшей алгебры, математического анализа и т. п. (Имеются лишь два довольно несущественных исключения: часть исследования примера в п. 19.7 и далее, а также замечание в п. А. 3.3 [1]) используют некоторые простые интегралы.) Важную роль играют понятия теории множеств, линейной геометрии и теории групп; однако они неизменно касаются начальных глав этих дисциплин и, кроме того, анализируются и разъясняются в специальных вводных параграфах. Тем не менее книгу нельзя считать вполне элементарной, так как математические выводы нередко оказываются весьма тонкими, а логические возможности рассматриваются при этом детально.

Таким образом, от читателя не требуется знания никаких конкретных разделов высшей математики. Однако читатель, который захочет более глубоко изучить излагаемую здесь теорию, должен будет освоить приемы математических рассуждений, далеко выходящие за рамки примитивных и стандартных. Характер наших методов близок по духу к математической логике, теории множеств и функциональному анализу.

Мы пытались изложить предмет таким образом, чтобы читатель, недостаточно искушенный в математике, мог приобрести необходимые навыки в ходе изучения книги. Мы надеемся, что эта наша попытка не кончилась полной неудачей.

В соответствии со сказанным изложение здесь вовсе не таково, каким оно было бы в чисто математическом руководстве. Все определения и выводы значительно более развернуты, чем они были бы там. Кроме того, значительное место занимают чисто словесные обсуждения и рассмотрения. В частности, мы попытались дать для каждого математического вывода там, где это возможно, параллельное словесное описание. Мы надеемся, что такой способ изложения разъяснит на нематематическом языке смысл того или иного математического приема и, кроме того, покажет, где этот прием дает нам больше, чем мы могли бы добиться без его использования.

В этом, равно как и в наших исходных методологических предпосылках, мы пытаемся следовать лучшим образцам из области теоретической физики.

Читатель, не обладающий чисто математическими интересами, может при первом чтении пропускать те параграфы книги, которые, по его мнению, окажутся слишком математичными. Мы предпочитаем не давать конкретного перечня таких параграфов, так как подобное мнение неизбежно должно быть субъективным. Однако наиболее вероятно, что

---

[1]) Номера пунктов в авторском приложении начинаются с А, например А.3.3 (от английского appendix — приложение).— *Прим. ред.*

параграфы, отмеченные в оглавлении звездочкой, будут выделены в этой связи обычным читателем. Во всяком случае, он найдет, что такие пропуски мало помешают пониманию последующих частей, хотя логическая цепь может при этом, строго говоря, претерпеть разрыв. По мере продвижения такие провалы будут постепенно приобретать все более серьезный характер и лакуны в выводах будут становиться все более и более значительными. В этом случае мы советуем читателю начать сначала, ибо более свободное владение материалом облегчает лучшее понимание.

## ВЫРАЖЕНИЕ ПРИЗНАТЕЛЬНОСТИ

Авторы хотели бы выразить свою благодарность Принстонскому университету и Институту перспективных исследований за их щедрую помощь, сделавшую возможной настоящую публикацию.

Они весьма признательны также издательству Принстонского университета, которое приложило все силы для публикации этой книги, несмотря на трудности военного времени. Издатель на всех этапах проявил самое глубокое понимание пожеланий авторов.

# ФОРМУЛИРОВКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

## § 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ЭКОНОМИКЕ

### 1.1. Вводные замечания

**1.1.1.** Целью настоящей книги является рассмотрение некоторых фундаментальных вопросов экономической теории, требующих изучения, отличного от того, которое до сих пор проводилось в литературе. Дальнейший анализ будет затрагивать некоторые основные проблемы, возникающие при изучении экономического поведения, которые в течение долгого времени находились в центре внимания экономистов. Эти проблемы имеют в своей основе попытки точного описания стремления индивидуума к извлечению максимальной пользы или, в случае предпринимателя, к получению максимальной прибыли. Общеизвестно, сколь значительны — а фактически и непреодолимы — встречающиеся на пути решения этой задачи трудности, имеющие место даже при ограниченном числе типичных ситуаций, как, например, в случаях прямого или непрямого обмена товарами между двумя или более лицами, двусторонней монополии, дуополии, олигополии и свободной конкуренции. Будет выяснено, что структура этих проблем, известных каждому изучавшему экономику, является во многих отношениях существенно иной, чем это представлялось до сих пор. Кроме того, окажется, что точная постановка и последующее решение этих задач могут быть достигнуты только при помощи таких математических методов, которые существенным образом отличаются от технических средств, применявшихся экономистами-математиками прошлого и современности.

**1.1.2.** Наши рассмотрения приведут к приложению математической теории «стратегических игр», развитой одним из авторов последовательно в несколько приемов в 1928 и в 1940—41 гг. [1]). После изложения этой теории будет предпринято ее приложение к экономическим задачам в указанном выше смысле. Будет выяснено, что теория игр дает новый подход к ряду еще не решенных к настоящему времени экономических вопросов.

Сначала нам следует выяснить, каким образом эту теорию можно поставить в соответствие экономической теории и что общее имеется у этих теорий. Наилучший путь для этого состоит в кратком описании природы некоторых фундаментальных экономических проблем с тем, чтобы это общее стало очевидным.

После того, как это будет сделано, станет ясным, что в установлении этого соответствия не только нет ничего искусственного, но что, напротив, теория стратегических игр является адекватным аппаратом для развития теории экономического поведения.

---

[1]) Первые этапы этой работы были опубликованы: J. von Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftspiele, *Math. Annalen* **100** (1928), 295—320 (русский перевод: Дж. Нейман, К теории стратегических игр, сб. «Матричные игры», Физматгиз, 1961, 173—204). Дальнейшее развитие теории, равно как и более детальная разработка подхода, предложенного в цитированной статье, публикуются здесь впервые.

Было бы неправильным считать целью наших рассуждений одно лишь установление аналогии между двумя указанными теориями. После разбора нескольких правдоподобных схематизаций мы надеемся достаточно удовлетворительно показать, что типичные задачи экономического поведения оказываются вполне тождественными с математическими понятиями соответствующих стратегических игр.

### 1.2. Трудности в применении математического метода

**1.2.1.** Уместно начать с некоторых замечаний, касающихся природы экономической теории, и кратко обсудить вопрос о роли, которую может сыграть математика в ее развитии.

Прежде всего отдадим себе отчет в том, что в настоящее время в экономической теории не существует универсальной системы и что если она и будет создана, то едва ли это произойдет в ближайшее время. Причина этого кроется просто в том, что экономика является слишком сложной наукой для того, чтобы можно было быстро осуществить построение такой системы, особенно если иметь в виду крайнюю ограниченность знаний, а также несовершенство описания фактов, с которыми приходится иметь дело экономисту. Только тот, кто недооценивает эти обстоятельства, может склоняться к попыткам построения универсальной системы. Даже в науках, ушедших по сравнению с экономикой далеко вперед, как, например, в физике, в настоящее время нет универсальной системы.

Продолжим сравнение с физикой. Иногда кажется, будто та или иная физическая теория дает базис для универсальной системы; однако каждый раз вплоть до настоящего времени такие иллюзии сохранялись в лучшем случае в течение десятка лет. Повседневная работа физиков, конечно, не связана со столь высокими целями, а касается скорее тех задач, которые уже достаточно «созрели». По-видимому, в физике вообще не было бы прогресса, если бы делались серьезные попытки форсированно принуждать физиков к построению общей теории. Работа физиков связана с решениями конкретных задач большей или меньшей практической значимости. Этот стиль работы дополняется объединением отраслей науки, считавшихся прежде разобщенными и далекими друг от друга. Однако явления последнего типа редки и происходят лишь после того, как каждая из отраслей уже оказывается достаточно изученной. Учитывая тот факт, что экономика является значительно более трудной и менее изученной наукой, находящейся к тому же на гораздо более ранней ступени своего развития, чем физика, не следует ожидать в экономике большего, чем разработок указанного типа.

Отметим, далее, что различия в научных вопросах делают необходимым использование различных методов, которые в дальнейшем могут быть отброшены, как только будут предложены лучшие. Отсюда вытекают два следствия. В некоторых отраслях экономики наиболее плодотворным является тщательное, заботливое описание фактов; действительно, это является наиболее обширной областью исследования как в настоящее время, так и в ближайшем будущем. С другой стороны, уже может оказаться возможным развитие точной теории, и для этого требуется использование математики.

Фактически математика уже использовалась в экономической теории, быть может, даже в большей степени, чем это следовало бы. Во вся-

ком случае, ее использование не было особенно успешным. Это явление противоположно тому, что наблюдалось в других науках, где математика применялась с большим успехом, так что большинство наук теперь едва ли может успешно развиваться без ее применения. Однако объяснить это явление можно совсем просто.

1.2.2. Дело отнюдь не в том, что существуют какие-то кардинальные причины, по которым математику нельзя использовать в экономике. Часто аргументация против применения математики состоит из ссылок на субъективные элементы, психологические факторы и т. п., а также на то, что для многих важных факторов до сих пор нет способов количественного измерения. Эту аргументацию следует отбросить, как совершенно ошибочную. Почти все эти возражения уже приводились или могли приводиться несколько столетий тому назад по поводу тех наук, в которых ныне математика является основным средством анализа. Выражение «могли приводиться» понимается в следующем смысле. Представим себе, что мы живем в период, предшествующий математической или почти математической фазе развития физики, т. е. в XVI веке, или в аналогичную эпоху для химии и биологии, т. е. в XVIII веке.

Для тех, кто относится скептически к применению математики в экономике, заметим, что положение дел в физических или биологических науках на этих ранних этапах едва ли было лучше, чем в настоящее время в экономике.

По поводу отсутствия способов измерения большинства важных факторов достаточно сослаться на пример теории теплоты, который является наиболее поучительным; до развития математической теории возможности количественных измерений здесь были еще менее благоприятными, чем теперь в экономике. Точные измерения количества и качества тепла (энергия и температура) были следствием, а не предпосылкой математической теории. Это должно представляться особенно наглядным при сопоставлении с тем фактом, что количественные и точные понятия цен, денег и процента с капитала выработались уже несколько столетий тому назад.

Следующая группа возражений против возможностей количественных измерений в экономике сосредоточивается вокруг невозможности безграничного дробления экономических величин. Это, дескать, несовместимо с применением инфинитезимальных исчислений и, следовательно (!), математики. Трудно поверить, что эти возражения поддерживаются одновременно с существованием атомистических теорий в физике и химии, квантовой теории в электродинамике и т. д. и наличием общеизвестных успехов математики в этих дисциплинах.

Здесь же уместно упомянуть другой часто встречающийся в экономической литературе аргумент, который также можно рассматривать как возражение против математических методов.

1.2.3. Для освещения концепций, которые мы будем прилагать к экономике, мы приводим и будем приводить далее некоторые иллюстрации из физики. Многие социологи возражают против проведения таких параллелей по различным причинам, среди которых обычно приводится и утверждение о том, что экономические теории не могут моделироваться по образцу физических, так как в экономических теориях учитываются социальные, человеческие явления, так как в них приходится принимать в расчет психологические факторы и т. д. Подобные утверждения по меньшей мере незрелы. Несомненно, представляется разумным вскрыть, что именно привело к прогрессу в других науках, и исследовать, почему применение

этих принципов не может привести к прогрессу и в экономике. Если же действительно возникнет необходимость приложения к экономике каких-то иных принципов, то это может обнаружиться только в процессе фактического развития экономической теории. Это само по себе будет переворотом в науке. Но так как почти наверно мы еще такого состояния не достигли и никоим образом не ясно, что возникает необходимость использования совершенно новых научных принципов, было бы неразумным рассматривать что-либо иное, чем трактовку задач тем способом, который уже привел к построению физической науки.

1.2.4. Итак, причины, в силу которых применение математики к экономике не давало успеха, лежат в чем-то другом. В значительной мере отсутствие реальных успехов в этом направлении объясняется комбинацией неблагоприятных обстоятельств, части которых мы будем постепенно касаться. Начнем с того, что экономические задачи не формулируются ясно, а приводятся часто в столь неопределенных терминах, что их математическая трактовка априори становится безнадежной, так как неясно даже, о какой проблеме идет речь. Точки приложения точных методов не может быть там, где нет ясности ни в концепциях, ни в вопросах, к которым эти методы должны прилагаться. Следовательно, первая задача состоит в прояснении знаний о предмете посредством дальнейшей тщательной описательной работы. Однако даже в тех разделах экономики, в которых задача описания разрешалась более удовлетворительно, математический аппарат редко используется адекватно. Либо он применяется несоответствующим образом (например, в попытках определить общее экономическое равновесие путем простого подсчета числа уравнений и числа неизвестных), либо он сводится к простому переводу с литературного языка на язык математических символов без последующего математического анализа.

Далее, эмпирическая основа экономической науки совершенно неудовлетворительна. Наши знания о существенных фактах в области экономики несравненно меньше, чем знания, которыми мы располагали в физике к тому моменту, когда была достигнута ее математизация. В самом деле, решающий перелом, который произошел в физике в XVII веке (особенно в механике), был возможен единственно благодаря предшествующему развитию астрономии. Он опирался на несколько тысячелетий систематических научных астрономических наблюдений, достигших апогея в таком несравненном наблюдателе, как Тихо Браге. Ничего подобного в экономической науке не происходило. В физике было бы абсурдным ожидать появления Кеплера и Ньютона без Тихо,— и нет никаких оснований надеяться на более легкое развитие в экономике.

Эти очевидные соображения не следует рассматривать как дискредитацию статистико-экономических исследований, которые дают реальную надежду на прогресс в соответствующих направлениях.

Вследствие перечисленных выше обстоятельств математическая экономика не достигла особенно многого. Лежащие в существе дела неопределенность и незнание не были рассеяны неадекватным и несоответствующим делу использованием мощного инструмента, с которым к тому же очень трудно работать.

В свете этих замечаний мы можем описать нашу позицию следующим образом. Цель настоящей книги далека от направления эмпирических исследований. Прогресс этой стороны экономической науки в необходимом направлении, очевидно, является задачей весьма большой важности.

Можно надеяться, что в результате успехов научной методики, а также опыта, полученного в других областях, развитие описательной экономики не потребует такого большого времени, как это может показаться, если иметь в виду пример астрономии. Однако, во всяком случае, представляется, что эта задача по своей трудности превосходит пределы любой индивидуально планируемой программы.

Мы попытаемся воспользоваться некоторым общественным опытом, касающимся человеческого поведения, который поддается математической интерпретации и важен с экономической точки зрения.

Мы считаем, что возможность математического истолкования этих явлений опровергает «фундаментальные» возражения, приведенные в п. 1.2.2.

Однако далее будет видно, что этот процесс математизации вовсе не является тривиальным. Действительно, приведенные выше возражения отчасти имеют своим источником очевидные трудности, которые возникают при всяком непосредственном математическом подходе. Мы считаем необходимым изложить математический аппарат, не употреблявшийся до сих пор в математической экономике, и может случиться, что дальнейшие исследования в этой области приведут в будущем к созданию новых математических дисциплин.

В заключение отметим, что чувство неудовлетворенности математическими интерпретациями экономической теории в значительной степени объясняется тем, что они часто дают не столько доказательства, сколько утверждения, которые не лучше, чем те же утверждения, высказанные в словесной форме. Обычно доказательства отсутствуют потому, что математический аппарат применяется к областям, которые настолько обширны и сложны, что еще в течение долгого времени — до тех пор, пока не будет накоплено больше эмпирических фактов,— едва ли можно ожидать серьезного прогресса от одного только увеличения дозы математики. Тот факт, что эти области атакуются таким путем (например, теория экономических флуктуаций, временна́я структура производства и т. д.), показывает только, что сопровождающие этот процесс трудности недооцениваются. В действительности эти трудности огромны, и мы не чувствуем себя достаточно подготовленными для их преодоления.

1.2.5. Мы останавливались на природе и возможностях тех изменений в математическом аппарате — и, по существу, в самой математике,— которые может вызвать успешное приложение математики к новым предметам. Представляется важным бросить перспективный взгляд на эти изменения.

Не следует забывать, что эти изменения могут быть весьма значительными. Решающая фаза приложений математики в физике — создание Ньютоном рациональной механики — не может быть отделена от открытия инфинитезимальных исчислений. (Имеются и другие примеры, хотя ни один из них не является более ярким.)

Важность социальных явлений, обилие и многообразие их проявлений, а также сложность их структуры по меньшей мере такие же, как и в физике. Поэтому следует ожидать (или опасаться), что для достижения в этой области решающих успехов потребуются математические открытия, сопоставимые с открытием инфинитезимальных исчислений. (Между прочим, с этой точки зрения наши предлагаемые попытки должны рассматриваться с известной скидкой). Тем более маловероятно, что простое повторение тех математических приемов, которые нам помогали в физике, поможет нам и в экономике. Вероятность этого покажется еще меньше,

когда мы увидим, что в наших рассуждениях появляются математические задачи, совершенно отличные от задач, встречающихся в физике.

Эти соображения следует иметь в виду в связи с имеющим место в наши дни злоупотреблением в использовании дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений и т. д. как основного метода в математической экономике.

### 1.3. Необходимые ограничения целей исследования

**1.3.1.** Вернемся к высказанному ранее положению о том, что необходимо начинать с тех задач, которые описаны отчетливо, даже если они окажутся не столь уж важными с любой другой точки зрения. Кроме того, следует добавить, что изучение этих «удобоваримых» задач может привести к результатам, которые уже хорошо известны, но точные доказательства которых тем не менее не были еще найдены. Пока эти доказательства не даны, соответствующая теория попросту не существует как научная теория. Движения планет были известны задолго до того, как их траектории были вычислены и объяснены теорией Ньютона. То же справедливо для многих более узких и менее драматических ситуаций. Аналогично этому многие результаты экономической теории — скажем, неопределенность двусторонней монополии — могут быть уже известны. Тем не менее весьма интересно вывести их снова из некоторой точной теории. То же самое может и должно быть сказано практически обо всех установленных к настоящему времени экономических теоремах.

**1.3.2.** Наконец, можно было бы добавить, что мы не предлагаем поднимать вопрос о практической значимости рассматриваемых проблем. Это согласуется с тем, что было сказано выше о выборе областей для приложения теории. Здесь положение дел не отличается от положения в других науках. В них наиболее важные с практической точки зрения вопросы также могли оставаться вне сферы досягаемости в течение длительных и плодотворных периодов развития этих наук. Подобное положение, конечно, все еще имеет место и в экономике, где проблемами первостепенной важности являются стабилизация занятости, увеличение национального дохода или его справедливое распределение. Никто не может по-настоящему ответить на эти вопросы, и мы не должны претендовать на то, чтобы дать на них научно обоснованные ответы уже в ближайшее время.

Подлинный прогресс в любой науке наступал тогда, когда в ходе изучения задач, которые были скромными по сравнению с окончательными целями, развивались методы, которые можно было обобщать все дальше и дальше. Свободное падение является весьма простым физическим явлением; однако именно изучение этого чрезвычайно простого факта и его сравнение с накопленным в астрономии материалом вызвало к жизни механику.

Нам кажется, что к экономике следует подходить с таким же уровнем скромности. Было бы несерьезно пытаться объяснять — и притом «систематическим» образом — все экономическое. Правильный подход состоит в том, чтобы добиться сначала наибольшей возможности точности и совершенства в некоторой ограниченной области, затем перейти к другой, несколько более широкой области и т. д. Это покончило бы также

с нездоровой практикой применения так называемых теорий к экономическим и социальным реформам, где они никоим образом не могут быть полезными.

Мы считаем, что необходимо знать как можно больше о поведении индивидуума и о простейших формах обмена. Эта точка зрения была в действительности принята с примечательным успехом основателями школы маргинальной полезности, но тем не менее она не является общепринятой. Экономисты часто нацеливаются на более широкие, более животрепещущие проблемы и отмахиваются от всего, что мешает им высказывать утверждения относительно этих проблем. Опыт более развитых наук, например физики, показывает, что подобное нетерпение только тормозит продвижение вперед, включая продвижение в исследовании этих животрепещущих проблем. Нет никаких оснований предполагать существование коротких путей.

### 1.4. Заключительные замечания

1.4. Важно осознать, что экономисты не могут надеяться на более легкую судьбу, чем та, которая постигла ученых других специальностей. Представляется разумным ожидать, что они должны будут прежде всего рассмотреть проблемы, заключающиеся в самых простых фактах экономической жизни, и пытаться построить теории, объясняющие их и действительно соответствующие нормам научной строгости. Мы можем иметь достаточную уверенность в том, что, начав с этого, экономическая наука будет развиваться дальше, постепенно охватывая области, все более значительные по сравнению с теми, с которых нужно начинать [1]).

Область, охватываемая этой книгой, весьма ограничена, и мы подходим к ней со всей скромностью. Мы совершенно не заботимся о том, согласуются ли результаты наших исследований со взглядами, высказанными недавно или принятыми в течение долгого времени, ибо по-настоящему важным является постепенное развитие теории, основанное на тщательном анализе обычной, повседневной интерпретации экономических фактов. Этот предварительный этап по необходимости является эвристическим. Иначе говоря, он состоит в переходе от нематематических правдоподобных рассмотрений к формальному математическому аппарату. Полученная в результате теория должна быть математически строгой и концептуально целостной. Ее первые приложения необходимо должны ограничиваться элементарными задачами, в которых окончательный результат не подвергается никакому сомнению и где фактически никакой теории не требуется. На этом раннем этапе приложения служат лишь для подтверждения теории. Следующий этап начинается, когда теорию применяют к несколько более сложным ситуациям; здесь теория уже в определенных пределах может вывести за рамки очевидного и привычного. И уже вслед за этим простирается область подлинного успеха — правильные теоретические предсказания. Хорошо известно, что все математизированные науки прошли через эти последовательные этапы развития.

---

[1]) Подобное начало имеет и определенный практический смысл, поскольку формы обмена между несколькими индивидуумами в точности совпадают с теми, которые наблюдаются на некоторых важнейших рынках современной промышленности или же при товарообмене между странами в международной торговле.

## § 2. КАЧЕСТВЕННОЕ ОБСУЖДЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЦИОНАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ

### 2.1. Проблема рационального поведения

2.1.1. Основным предметом экономической теории является весьма сложный механизм цен и производства, а также получения и распределения доходов. В ходе развития экономики было обнаружено — и это является теперь почти общепризнанным,— что один из подходов к этой обширной проблеме состоит в анализе поведения индивидуумов, образующих экономическое сообщество. Этот анализ был продвинут довольно далеко во многих отношениях; и хотя все еще имеется немало разногласий, важность этого подхода несомненна, вне зависимости от того, насколько большие трудности могут здесь встретиться. Препятствия эти несомненно значительны, даже если ограничить объект исследования на первых порах экономической статикой. Одна из основных трудностей лежит в правильном описании предположений, которые должны быть сделаны относительно побудительных мотивов индивидуума. Традиционная постановка этой проблемы заключалась в предположении, что потребитель желает получить максимум полезности или удовлетворения, а предприниматель — максимум прибыли.

Принципиальные и практические трудности, связанные с понятием полезности и, в частности, с попытками представить ее числом, хорошо известны, и их рассмотрение не принадлежит к основным целям настоящей работы. Тем не менее в некоторых случаях мы будем вынуждены рассмотреть их, в частности в п.п. 3.3 и 3.5. Оговорим сразу же, что исходные позиции настоящей книги по этому весьма важному и весьма интересному вопросу будут в основном приспособленческими. Мы хотим сосредоточиться на одной задаче, которая не является задачей измерения полезностей и предпочтений, и поэтому мы будем пытаться в разумных пределах максимально упростить все другие характеристики. С этой целью мы предположим, что целью всех участников экономической системы — как потребителей, так и предпринимателей — являются деньги или, что эквивалентно, некоторый единый монетарный товар. Последний предполагается неограниченно делимым и заменимым, свободно передаваемым и тождественным (даже в количественном смысле) с любым «удовлетворением» или «полезностью», которых желает каждый участник. (По поводу количественного характера полезности см. упоминавшийся выше п. 3.3.)

В экономической литературе иногда высказывается мнение, что обсуждение понятий полезности и предпочтения является совершенно ненужным, так как эти определения являются чисто словесными и не имеют эмпирически наблюдаемых последствий, иначе говоря, они являются просто тавтологическими. Нам не кажется, что эти понятия в количественном отношении стоят ниже таких общепринятых и бесспорных физических понятий как сила, масса, заряд и т. п. Это значит, что, хотя в своей первоначальной форме они и являются просто определениями, они становятся объектом эмпирического контроля через посредство теорий, которые строятся на их основе,— и только таким путем. Таким образом, понятие полезности поднимается над уровнем простой тавтологии посредством тех экономических теорий, которые используют это понятие и результаты которых можно сравнивать с данными опыта или хотя бы со здравым смыслом.

**2.1.2.** Мы говорим, что индивидуум, пытающийся получить эти соответствующие максимумы, действует «рациональным» образом. Однако можно с уверенностью сказать, что в настоящее время не существует удовлетворительного рассмотрения вопросов рационального поведения. Может существовать, например, несколько путей достижения оптимальной позиции; они могут зависеть от осведомленности и понимания индивидуума, а также от имеющихся в его распоряжении способов действия. Анализ всех этих вопросов в качественных терминах не исчерпает их, поскольку из них, очевидно, вытекают количественные соотношения. Поэтому необходимо сформулировать их в количественных терминах так, чтобы принять во внимание все элементы качественного описания. Это исключительно трудная задача, и мы можем уверенно утверждать, что в обширной литературе по данному вопросу она не доведена до конца. Основная причина этого лежит, несомненно, в неудачных попытках развития и применения подходящих для этой модели математических методов; при этом выяснилось бы то, что задача максимизации, которая предполагается отвечающей понятию рациональности, отнюдь не формулируется недвусмысленным образом. Действительно, более детальный анализ (который будет проведен в пп. 4.3—4.5) показывает, что существенные соотношения гораздо более сложны, чем это отражено в общепринятом и «философском» использовании слова «рациональный».

Полезное предварительное качественное описание поведения индивидуума дается австрийской школой, в частности, при анализе экономики изолированного «Робинзона Крузо». Мы будем иметь также случай отметить некоторые рассуждения Бем-Баверка, касающиеся обмена между двумя или более лицами. Более позднее изложение теории выбора индивидуума в форме анализа кривых безразличия основывается на точно тех же или на малодостоверных фактах, но использует метод, который часто принято считать во многих отношениях более совершенным. По этому поводу мы отсылаем читателя к рассмотрениям в пп. 2.1.1 и 3.3.

Мы надеемся, однако, добиться реального понимания проблемы обмена, изучая ее с совершенно иной позиции, иначе говоря, с точки зрения «стратегической игры». Наш подход вскоре станет ясным, особенно после того, как некоторые идеи, развивавшиеся, скажем, Бем-Баверком, взгляды которого можно рассматривать только как прототип настоящей теории, получат правильную количественную формулировку.

### 2.2. Экономика «Робинзона Крузо» и экономика общественного обмена

**2.2.1.** Рассмотрим подробнее тот тип экономики, который описывается моделью «Робинзона Крузо». Она представляет собой экономику одного изолированного индивидуума, или же нечто, управляемое единой волей. Такая экономика имеет дело с определенными количествами предметов и рядом желаний, которые они должны удовлетворять. Задача состоит в получении максимального удовлетворения. В действительности она представляет собой — с учетом, в частности, сделанного нами выше предположения о численном характере полезности — обычную задачу максимизации. Ее трудность зависит, очевидно, от числа переменных и от характера функции, подлежащей максимизации; однако эта трудность является более практической, нежели теоретической [1]). Если

[1]) Для дальнейшего не имеет значения выяснение полноты теории во всех ее аспектах.

абстрагироваться от непрерывного характера производства и от того факта, что потребление также является протяженным во времени (и часто направлено на потребительские товары длительного пользования), мы получим простейшую из возможных моделей. Считалось возможным использовать ее в качестве отправного пункта экономической теории; однако эта попытка, являвшаяся одной из наиболее характерных черт австрийской школы, часто оспаривалась. Основное возражение против использования этой весьма упрощенной модели изолированного индивидуума в теории экономики общественного обмена заключалось в том, что она не отражает индивидуума, подвергающегося многообразным общественным воздействиям. Поэтому она анализирует индивидуума, который мог бы вести себя совершенно по-иному, если бы он производил свои выборы в общественном мире, где он был бы подвержен факторам подражания, рекламы, обычаев и т. п. Эти факторы, несомненно, вносят большие изменения; но изменяют ли они формальные свойства процесса максимизации — в этом следует усомниться. Но последнее в действительности никогда не утверждалось, и, поскольку мы рассматриваем эту проблему изолированно, мы можем вообще отбросить упомянутые выше социальные рассмотрения.

Мы не будем рассматривать также и некоторые другие отличия «Робинзона» от участника экономики общественного обмена. Одним из таких отличий является отсутствие денег как средства обмена в первом случае, когда имеется лишь некоторый всеобщий эквивалент, в качестве которого может выступать любой товар. В действительности мы преодолеваем эту трудность, вводя в п. 2.1.2 количественное и даже монетарное понятие полезности. Подчеркнем еще раз следующее обстоятельство. Нам важно то, что даже после всех этих решающих упрощений перед «Робинзоном» стоит формальная задача, совершенно отличная от той, с которой сталкивается участник социальной экономики.

**2.2.2.** Робинзону даются определенные физические данные (желания и блага), и его задача заключается в комбинировании и применении их таким образом, чтобы получить в итоге максимальное удовлетворение. Не может быть сомнений в том, что он контролирует абсолютно все переменные, от которых зависит результат — скажем, распределение ресурсов, определение вариантов использования одного и того же блага для различных желаний и т. п. [1]).

Таким образом, перед Робинзоном стоит обычная задача максимизации, трудности которой, как уже отмечалось, носят чисто технический, а не принципиальный характер.

**2.2.3.** Рассмотрим теперь участника экономики общественного обмена. Разумеется, его задача имеет много общих элементов с задачей максимизации. Но она содержит также некоторые, и притом весьма существенные, элементы совершенно иной природы. Он также пытается получить оптимальный результат. Однако для его достижения он должен войти в отношения обмена с другими. Если два лица (или большее их число) обмениваются товарами друг с другом, то результат для каждого из них будет зависеть, вообще говоря, не только от его собственных действий,

---

[1]) Иногда в дело вмешиваются и неконтролируемые факторы, скажем, в сельском хозяйстве — погода. Однако они представляют собой чисто стохастические явления. Следовательно, их можно исключить из рассмотрения посредством известных приемов теории вероятностей, т. е. путем определения вероятностей различных альтернатив и введения понятия математического ожидания. Ср. влияние такого подхода на понятие полезности, рассматриваемое в п. 3.3.

но также и от действий других. Таким образом, каждый участник пытается максимизировать некоторую функцию (упоминавшийся выше «результат»), не все аргументы которой находятся под его контролем. Это, конечно, уже не задача максимизации, а своеобразная и приводящая в замешательство смесь нескольких конкурирующих задач максимизации. Каждый участник руководствуется своим собственным принципом, и ни один из них не устанавливает значений всех переменных, влияющих на его интересы.

Такого рода задачи никогда не рассматривались в классической математике. Подчеркнем, рискуя быть педантичными, что эта задача не является ни задачей на условный максимум, ни задачей вариационного исчисления, ни функционального анализа и т. д. Это проявляется с полной ясностью даже в самых элементарных ситуациях, например, когда каждая из переменных может принимать только конечное число значений.

Особенно ярким примером распространенного непонимания существа этой задачи псевдомаксимизации является выражение, согласно которому целью общественных усилий является получение «наибольших возможных благ для наибольшего возможного числа людей». Ведущий принцип не может формулироваться в виде требования одновременной максимизации двух или более функций.

Любой подобный принцип, если его понимать буквально, является внутренне противоречивым. (Одна функция, вообще говоря, не будет иметь максимума там, где его имеет другая). Это ничем не лучше, чем сказать, например, что фирма должна получить максимальные цены при максимальном обороте или же максимальный доход при минимальных издержках. Если подразумевается некоторый порядок важности этих принципов или некоторое их взвешенное среднее, то это следует оговаривать явным образом. Однако в ситуации участников социальной экономики не имеется в виду что-либо подобное, а достижение всех максимумов желается — разными участниками — одновременно.

Было бы заблуждением считать, что эту трудность легко устранить (подобно трудности в случае Робинзона, упомянутой в сноске на стр. 36) простым обращением к приемам теории вероятностей. Каждый участник может задать параметры, описывающие его собственные действия, но не те, которые описывают действия остальных. Тем не менее эти «чужие» переменные нельзя, с его точки зрения, описать путем статистических предположений. Это происходит потому, что другие участники руководствуются, так же как и он сам, рациональными принципами — как бы их ни понимать — и никакой способ подхода, не пытающийся вскрыть эти принципы и взаимодействия конфликтных интересов всех участников, не может считаться корректным.

Иногда некоторые из этих интересов могут быть более или менее параллельными. В этом случае мы подходим ближе к простой задаче максимизации. Но они равным образом могут быть и противоположными. Общая теория должна охватывать все эти возможности, все промежуточные стадии и любые их комбинации.

**2.2.4.** Разницу между положением Робинзона и участника экономики общественного обмена можно проиллюстрировать еще и следующим образом. Помимо тех переменных, которые управляются его волей, Робинзону известен ряд данных, которые задаются «намертво» в том смысле, что они составляют неизменное физическое описание ситуации. (Даже когда они являются очевидным образом переменными, ср. сноску на стр. 36, они в действительности управляются фиксированными статистическими

законами.) Никакие из данных, с которыми ему приходится иметь дело, не отражают воли или намерения другого лица, носящих экономический характер и основанных на мотивах той же природы, что и его собственные. Участник экономики общественного обмена, напротив, сталкивается и с данными последнего типа; они (подобно, например, ценам) являются продуктом действий и волеизъявлений других участников. На его действия будут оказывать влияние его ожидания этих чужих действий, а они в свою очередь отражают ожидание другими участниками его собственных действий.

Таким образом, изучение экономики Робинзона и использование применимых к ней методов имеет гораздо более ограниченную ценность для экономической науки, чем это до сих пор предполагалось даже наиболее радикальными ее критиками. Причины этой ограниченности лежат не в области общественных взаимоотношений, о которых мы упоминали, хотя мы и не оспариваем их значимости. Они возникают из принципиальных различий между исходной задачей максимизации (задачей Робинзона) и более сложной проблемой, очерченной нами выше.

Мы надеемся, что все сказанное убедит читателя в том, что здесь мы сталкиваемся с поистине принципиальной, а не просто с технической трудностью. Именно на изучение этой проблемы и направлена в основном теория стратегических игр

### 2.3. Число переменных и число участников

**2.3.1.** В формальных рассуждениях, которые мы проводили в предыдущих параграфах, для описания хода событий в экономике общественного обмена использовалось некоторое количество переменных, представлявших действия участников этой экономики. Таким образом, каждый участник располагает некоторым множеством переменных («своих» переменных), значения которых в совокупности полностью описывают его действия, т. е. точно выражают проявления его воли. Мы будем называть эти множества *частичными множествами переменных*. Частичные множества всех участников вместе образуют множество всех переменных, которое мы будем называть *полным множеством*. Поэтому общее число переменных определяется, во-первых, числом участников, т. е. частичных множеств, и, во-вторых, числом переменных в каждом частичном множестве.

С чисто математической точки зрения вполне допустимо рассматривать все переменные любого частичного множества как единственную переменную, именно, как переменную участника, соответствующего этому частичному множеству. В дальнейшем мы будем часто использовать именно этот прием в наших математических рассуждениях; не внося никаких принципиальных отличий, он значительно упрощает обозначения.

Однако пока мы будем отличать друг от друга различные переменные внутри каждого частичного множества. Это подсказывается теми экономическими моделями, к которым мы естественным образом приходим: желательно, чтобы для каждого участника количество каждого конкретного товара, который он хочет получить, описывалось отдельной переменной.

**2.3.2.** Теперь мы должны подчеркнуть, что любое увеличение числа переменных внутри частичного множества участника может усложнить нашу задачу технически и только технически. Таким образом, в экономике Робинзона, где имеется только один участник и только одно частичное

множество, совпадающее с полным множеством, это может сделать определение нужного максимума технически более сложным, но не изменит «чисто максимизационного» характера задачи. Если, с другой стороны, увеличивается число участников, т. е. число частичных множеств переменных, то происходит нечто совершенно иное. Используя терминологию теории игр, которая оказывается весьма полезной, можно сказать, что это приводит к увеличению числа игроков в игре. Между тем, если ограничиться рассмотрением простейших случаев, игра трех лиц имеет фундаментальные отличия от игры двух лиц, игра четырех лиц — от игры трех лиц и т. д. Комбинаторные усложнения нашей задачи (которая, как мы видели, вовсе не является задачей максимизации) растут чудовищным образом с любым увеличением числа игроков. Наши последующие рассмотрения явственно это покажут.

Мы рассмотрели это обстоятельство с такой подробностью, в частности, и потому, что в большинстве моделей экономики происходит специфическое смешивание этих двух явлений. Когда число игроков, т. е. участников экономики общественного обмена, увеличивается, то обычно возрастает и сложность экономической системы, например число обмениваемых товаров и услуг, применяемых производственных процессов и т. д. Таким образом, число переменных в частичном множестве каждого участника вполне может увеличиться. Но число участников, т. е. частичных множеств, также увеличилось. Таким образом, оба рассмотренных нами источника содействуют — каждый по-своему — общему увеличению числа переменных. Существенно представлять себе каждый из этих источников в его подлинной роли.

## 2.4. Случай многих участников. Свободная конкуренция

**2.4.1.** Анализируя в пп. 2.2.2—2.2.4 различие между экономикой Робинзона и экономикой общественного обмена, мы подчеркивали те черты последней, которые становятся более рельефными, когда число участников, будучи бóльшим единицы, не слишком велико. Тот факт, что на каждого участника влияют предвидимые реакции других участников на его собственные мероприятия и что это справедливо для всех участников, лежит в самом существе дела (в части, касающейся продавцов) в классических задачах дуополии, олигополии и т. п. Когда число участников становится действительно большим, появляется некоторая надежда, что влияние каждого конкретного участника станет пренебрежимым и тем самым указанные выше трудности отступят на задний план. Поэтому станет возможной более традиционная теория. Это будут, конечно, классические условия свободной конкуренции. Фактически именно это составляло отправную точку многих лучших достижений экономической теории. В сравнении с этим случаем большого числа участников — свободной конкуренцией — случаи небольшого числа продавцов (монополия, дуополия, олигополия) считались даже исключениями и отклонениями от нормы. (Даже в этих случаях число участников все еще остается весьма большим из-за конкуренции между покупателями. Случаями, содержащими действительно небольшое число участников, будут случаи двусторонней монополии или обмен между монополией и олигополией либо же между двумя олигополиями и т. п.)

**2.4.2.** Справедливость к традиционной точке зрения требует отметить следующее обстоятельство. Во многих областях точных и физических наук хорошо известно, что очень большие числа часто легче

рассматривать, чем числа умеренной величины. Почти точная теория газа, содержащего около $10^{25}$ свободно движущихся частиц, является несравненно более простой, чем теория солнечной системы, состоящей из 9 основных тел, и еще более простой, чем теория кратной звезды, состоящей из трех или четырех тел примерно одних и тех же размеров. Причина этого состоит, разумеется, в превосходных возможностях применения законов статистики и теории вероятностей в первом случае.

Для нашей задачи, однако, эта аналогия далека от совершенства. Теория механики для двух, трех, четырех и т. д. тел хорошо известна и в ее общей теоретической (в отличие от специальной и вычислительной) форме является основанием статистической теории для больших чисел. Для экономики общественного обмена, т. е. для соответствующих стратегических игр, теория при двух, трех, четырех и т.д. участниках до сих пор отсутствовала. Наши предыдущие рассмотрения были направлены именно на установление этой потребности, а наши последующие исследования будут иметь целью ее удовлетворение. Иными словами, лишь после построения удовлетворительной теории для умеренного числа участников станет возможным решить, упрощает ли ситуацию черзвычайно большое число участников. Подчеркнем снова, что мы разделяем надежду — главным образом благодаря упомянутой выше аналогии в других областях,— что подобные упрощения действительно будут иметь место. Современные утверждения относительно свободной конкуренции представляются весьма ценными догадками и многообещающими предвидениями результатов. Но сами они не являются пока результатами, и с научной точки зрения было бы ошибочно считать их таковыми, пока не будут выполнены упомянутые нами выше условия.

В литературе имеется немалое количество теоретических рассмотрений, имеющих целью показать, что области неопределенности (уровней обмена) — которые несомненно существуют, когда число участников невелико,— сужаются и исчезают с ростом их числа. Тогда это обеспечило бы непрерывный переход к идеальному случаю свободной конкуренции — для очень большого числа участников,— где все решения будут точно и единственным образом определены. И хотя следует надеяться, что это действительно будет иметь место в достаточно общих случаях, мы все же не можем утверждать, что к настоящему времени достоверно установлено что-либо похожее на это утверждение. Иного пути нет: задача должна быть сформулирована, решена и осмыслена для небольших количеств участников, прежде чем можно будет доказать что-либо об изменениях ее характера в любом предельном случае большого числа участников, таком, как свободная конкуренция.

**2.4.3.** Весьма тщательный анализ этого вопроса особенно желателен еще и по следующей причине. Тот факт, что одно лишь увеличение числа участников всегда будет приводить *в конечном счете* к условиям свободной конкуренции, не является ни достоверным, ни даже вероятным. Все классические определения свободной конкуренции содержат помимо большой величины числа участников еще и другие постулаты. Ясно, например, что если определенные большие группы участников будут по тем или иным причинам действовать совместно, то величина числа участников может и не сказаться; основные акты обмена могут совершаться непосредственно между небольшим количеством крупных «коалиций» [1],

[1]) Например, профсоюзов, потребительских кооперативов, промышленных картелей, а в политической области, возможно, и некоторых других организаций.

а не между многочисленными индивидуумами, действующими независимо. Наше последующее рассмотрение стратегических игр покажет, что роль и размеры коалиций являются решающими во всей этой теории. Следовательно, отмеченная выше трудность, не будучи новой, остается по-прежнему узловой проблемой. Любая удовлетворительная теория «предельного перехода» от малого числа участников к большому должна будет объяснить, при каких обстоятельствах будут или не будут образовываться подобные большие коалиции, иначе говоря, когда большая величина числа участников проявится на деле и приведет к более или менее свободной конкуренции. Какая из этих альтернатив осуществится с большей вероятностью, зависит от конкретных данных рассматриваемой ситуации. Ответ на этот вопрос является, на наш взгляд, подлинным вызовом для любой теории свободной конкуренции.

### 2.5. Лозаннская школа

2.5. Этот параграф был бы неполон без упоминания теории равновесия лозаннской школы, а также различных других систем, которые занимаются рассмотрением «индивидуального планирования» и согласования индивидуальных планов. Все эти системы уделяют внимание взаимозависимости участников общественной экономики. Однако это неизменно делается при далеко идущих ограничениях. Иногда предполагается свободная конкуренция, после введения которой участники образуют фиксированные коалиции и действуют подобно нескольким Робинзонам, стремясь единственно в максимизации удовлетворения своих индивидуальных потребностей, которые при этих условиях снова оказываются независимыми. В других случаях используются иные ограничивающие приемы. Все они равносильны исключению свободной игры коалиций, образуемых некоторыми или всеми типами участников. Имеются часто определенные — а иногда скрытые — предположения относительно путей, по которым интересы, частично параллельные, частично противоположные, будут влиять на участников и заставлять их — в зависимости от обстоятельств — либо кооперироваться, либо не кооперироваться. Как мы надеемся, мы показали, что подобная процедура приводит к некоторой подмене тезиса, по крайней мере в той плоскости, в которой мы хотели бы проводить наши рассмотрения. Она избегает подлинных трудностей и рассматривает словесную проблему, которая не является эмпирически заданной. Разумеется, мы не хотим оспаривать значение этих исследований — просто они не дают ответа на наши вопросы.

## § 3. ПОНЯТИЕ ПОЛЕЗНОСТИ

### 3.1. Предпочтения и полезности

3.1.1. В п. 2.1.1 мы уже говорили о том, каким образом мы хотим описать фундаментальное понятие индивидуальных предпочтений путем использования гораздо более далеко идущего понятия полезности. Многие экономисты почувствуют, что мы делаем слишком много предположений (ср. перечисление свойств, которые мы постулировали в п. 2.1.1) и что наши исходные положения представляют собой шаг назад по сравнению с более осторожным современным методом «кривых безразличия».

Прежде чем предпринимать какие-либо конкретные рассмотрения, поясним, что наш подход в худшем случае является лишь приложением

обычных приемов всякого предварительного научного анализа. Он заключается в разделении трудностей, т. е. в концентрации внимания на одной из них (на основном предмете исследования) и в пренебрежении — в разумно возможных пределах — всеми остальными за счет некоторых упрощающих и схематизирующих предположений. Мы хотели бы также добавить, что это дерзкое рассмотрение предпочтений и полезностей используется в подавляющем большинстве наших построений. Однако в дальнейшем мы исследуем (в определенных пределах) и те изменения, которые вызовет в нашей теории снятие рассматриваемых предположений (см. §§ 66 и 67).

Мы чувствуем, однако, что по крайней мере одна часть наших предположений — именно, трактовка полезностей как количественно оцениваемых величин — вовсе не является столь радикальной, как это часто утверждается в литературе. Мы попытаемся далее обосновать это положение. Надеемся, что читатель простит нам столь беглое и сжатое обсуждение такого принципиально важного вопроса, как понятие полезности. Однако даже немногочисленные замечания окажутся здесь уместными, ибо вопрос об измеримости полезностей во многом аналогичен соответствующим вопросам в физических науках.

3.1.2. В историческом плане полезность была впервые осознана именно как количественно измеримая величина, т. е. как число. Против этой точки зрения в ее первоначальной, наивной форме могут быть высказаны — и действительно были высказаны — серьезные возражения. Ясно, что любое измерение (или даже любое провозглашение измеримости) должно в конечном счете основываться на некотором непосредственном ощущении, которое, возможно, не может и, разумеется, не должно анализироваться сколько-нибудь дальше [1]). В случае полезности непосредственное ощущение предпочтения одного объекта или совокупности объектов по сравнению с другими дает необходимую основу. Но это позволяет нам сказать лишь, что для некоторого лица одна полезность больше, чем другая. Само по себе это не может быть основой для численного сравнения полезностей для одного лица, равно как и для их сравнения для разных лиц. Поскольку не имеется интуитивно ясного способа сложения двух полезностей для одного и того же лица, предположение о том, что полезности не имеют численного характера, может показаться даже правдоподобным. Современный метод анализа кривых безразличия представляет собой математический прием для описания этой ситуации.

### 3.2. Принципы измерения. Предварительные рассмотрения

3.2.1. Все сказанное сильно напоминает положение дел, сложившееся перед созданием теории теплоты: оно также основывалось на интуитивно ясном представлении о том, что одно тело теплее другого, хотя не существовало еще никакого непосредственного способа выразить содержательно — насколько, или во сколько раз, или в каком смысле.

Сравнение с теплотой показывает также, сколь мало можно предсказать априори, каковы будут возможные очертания подобной теории. Приведенные выше грубые соображения никоим образом не раскрывают того, что, как мы знаем, произошло впоследствии. Оказалось, что теплота допускает количественное описание не одним числом, а двумя — количе-

---

[1]) Подобно ощущениям света, теплоты или мускульного усилия в соответствующих разделах физики.

ством теплоты и температурой. Первая из этих величин является даже более непосредственно численной, так как она оказалась аддитивной и, кроме того, неожиданным образом связанной с механической энергией, которая уж во всяком случае является численной. Вторая также является численной, но гораздо более деликатным образом: она не является аддитивной в каком-либо непосредственном смысле. Строгий численный масштаб для нее возник из изучения согласованного поведения идеальных газов и роли абсолютной температуры в связи с теоремой об энтропии.

**3.2.2.** Историческое развитие теории теплоты показывает, что следует быть чрезвычайно осторожным в негативных высказываниях по какому-либо поводу, да еще с претензией на окончательность. Даже если сегодня полезности выглядят весьма неколичественно, история и опыт теории теплоты могут повториться, притом с совершенно непредсказуемыми разветвлениями и видоизменениями [1]). И это, разумеется, не должно отбивать у нас охоту к теоретическим объяснениям формальных свойств количественно выраженной полезности.

### 3.3. Вероятность и численные полезности

**3.3.1.** Мы можем пойти даже на один шаг дальше сделанных ранее двойных отрицаний, которые были лишь предостережениями против непродуманных утверждений о невозможности численного выражения полезности. Можно показать, что для достижения численной характеристики полезности нам понадобятся лишь самые незначительные дополнения к тем предположениям, на которых основан анализ кривых безразличия.

Мы неоднократно подчеркивали, что численная полезность зависит от возможности сравнения разностей полезностей. Это может показаться гораздо более далеко идущим предположением, чем простая возможность устанавливать предпочтения, и в действительности это так и есть. Однако окажется, что альтернативы, к которым должны применяться экономические предпочтения, могут стереть эти различия.

**3.3.2.** Представим себе на мгновение индивидуума, система предпочтений которого является всеохватывающей и полной, иначе говоря, для любых двух объектов или для любых двух мыслимых событий у него имеется отчетливое ощущение предпочтения. Точнее говоря, мы предполагаем, что для любых двух альтернативных событий, которые преподносятся ему как возможности, он может указать, какую из них он предпочитает.

Самым естественным обобщением этой картины является допущение о том, что наш индивидуум может сравнивать не только события, но и комбинации событий с заданными вероятностями [2]).

Под комбинацией двух событий мы понимаем следующее. Пусть два события обозначены через $B$ и $C$; рассмотрим для простоты соотношение вероятностей 50% к 50%. Тогда их комбинацией является возможность наблюдать реализацию $B$ с вероятностью 50% и (если $B$ не происходит) реализацию $C$ с оставшейся вероятностью 50%. Подчеркнем, что эти две альтернативы являются взаимно исключающими, так что здесь не остается возможности для чего-либо третьего. Кроме того, имеется абсолютная уверенность в том, что либо $B$, либо $C$ произойдет.

---

[1]) Хороший пример большого разнообразия формальных возможностей дает нам совершенно другой путь развития теории света, цвета и длины волн. Все эти понятия также стали количественными, хотя и совершенно иными путями.

[2]) Это действительно необходимо, если он сталкивается с экономическими процессами явным образом вероятностного характера. Ср. пример с сельским хозяйством, приведенный в сноске 1 на стр. 36.

Поясним еще раз наши позиции. Мы ожидаем, что рассматриваемый индивидуум обладает четким представлением о том, предпочитает ли он событие $A$ равновероятной комбинации событий $B$ и $C$ или наоборот. Ясно, что если для него $A$ является более предпочтительным, чем $B$ и чем $C$, то $A$ будет также более предпочтительным, чем указанная комбинация; аналогично если $B$ и $C$ предпочтительнее, чем $A$, то он предпочтет эту комбинацию. Однако если бы для него $A$ было предпочтительнее, чем $B$, а $C$ предпочтительнее, чем $A$, то любое утверждение о его предпочтении $A$ по отношению к комбинации содержит существенную новую информацию. Более конкретно: если он предпочитает теперь $A$ равновероятной комбинации $B$ и $C$, то это дает нам правдоподобные основания для численной оценки того, что его предпочтение $A$ по сравнению с $B$ превышает его предпочтение $C$ по сравнению с $A$.

Замечание 1. Приведем простой пример. Пусть некий индивидуум предпочитает потребление стакана чаю потреблению чашки кофе, а потребление чашки кофе — потреблению стакана молока. Если мы захотим теперь узнать, насколько последнее предпочтение, т. е. разность полезностей, превышает первое, достаточно поставить его в положение, когда он должен будет решить, предпочитает ли он чашку кофе некоему стакану, содержимое которого с равной вероятностью может оказаться чаем или молоком.

Замечание 2. Отметим, что мы постулировали лишь индивидуальное представление, позволяющее решить, какое из двух «событий» предпочтительнее. Однако мы не постулировали явным образом никакой интуитивной оценки относительных величин двух предпочтений, или, придерживаясь употребляемой в дальнейшем терминологии, двух разностей полезностей.

Это существенно, так как информация о первом предпочтении должна поддаваться получению воспроизводимым образом путем простого опроса.

Если принять эту точку зрения, то мы получаем критерий, по которому можно сравнивать предпочтение $C$ по отношению к $A$ с предпочтением $A$ по отношению к $B$. Хорошо известно, что вследствие этого полезности — или скорее разности полезностей — становятся численно измеримыми.

То, что возможность сравнения между $A$, $B$ и $C$ только в этих пределах является уже достаточной для измерения «расстояний», впервые было в экономике отмечено Парето. В точности те же рассуждения проводились, однако, и Евклидом для расположения точек на прямой; фактически именно это и является первоосновой его классического вывода для вычисления расстояний.

К введению численных измерителей можно прийти еще более непосредственным путем, если использовать все возможные вероятностные распределения. Действительно, рассмотрим три события $C$, $A$, $B$, для которых порядок предпочтения их индивидуумом совпадает с тем порядком, в котором они записаны. Пусть $\alpha$ — вещественное число, заключенное между 0 и 1 и обладающее тем свойством, что $A$ в точности столь же желательно, как и комбинированное событие, составленное из $B$ с вероятностью $1-\alpha$ и $C$ с остающейся вероятностью $\alpha$. Тогда мы предлагаем использовать $\alpha$ в качестве численной оценки для отношения предпочтения $A$ над $B$ к предпочтению $C$ над $B$ [1]). Точное и исчерпывающее развитие этих идей

---

[1]) Сказанное дает нам хороший повод привести другой иллюстративный пример. Описанный прием позволяет непосредственно определить отношение $q$ полезности от обладания одной единицей определенного товара к полезности от обладания двумя единицами того же товара. Индивидууму должен быть предоставлен выбор между получением одной единицы наверняка и игрой со случаем, в результате которой он получает две единицы с вероятностью $\alpha$ и не получает ничего с вероятностью $1-\alpha$. Если он предпочтет первую возможность, то $\alpha < q$; если он предпочтет вторую, то $\alpha > q$; если же он не может определить своего предпочтения, то $\alpha = q$.

требует использования аксиоматического метода. На этой основе возможно фактически провести достаточно простое рассмотрение. Мы проведем его в пп. 3.5—3.7.

**3.3.3.** Во избежание недоразумений подчеркнем, что «события», которые мы использовали выше в качестве носителей предпочтений, рассматриваются нами как будущие события с тем, чтобы сделать все логически возможные альтернативы в равной мере допустимыми. Однако в рамках наших непосредственных целей было бы излишним усложнением запутываться в задачах о предпочтениях между событиями в различные периоды будущего [1]). Представляется тем не менее, что подобного рода трудности можно обойти, помещая все события, которые нас интересуют, в один и тот же стандартизованный момент времени — желательно в ближайшем будущем.

Все перечисленные рассмотрения настолько по существу основаны на численном понятии вероятности, что будет весьма уместно сказать несколько слов относительно этого понятия.

Вероятность часто представляют себе как некоторое субъективное понятие — нечто вроде оценки. Так как мы предполагаем использовать это понятие при построении индивидуальной численной оценки полезности, указанная точка зрения будет для наших целей неподходящей. Поэтому простейший подход состоит в принятии другой альтернативы — достаточно хорошо обоснованной интерпретации вероятности как частоты в длинных сериях испытаний. Это непосредственно дает нам необходимый численный плацдарм [2]).

**3.3.4.** Эта процедура численного измерения полезностей для индивидуума, разумеется, опирается на предположение о полноте системы индивидуальных предпочтений [3]). Мыслимо допустить случаи — это может оказаться даже более реалистичным,— когда индивидуум не может ни указать, какую из двух альтернатив он предпочитает, ни констатировать, что обе они одинаково желательны. В этом случае анализ с помощью кривых безразличия также становится неосуществимым [4]).

Вопрос о том, насколько реальна эта возможность (как для индивидуумов, так и для коллективов), является чрезвычайно интересным, но это действительно вопрос. Он определенно заслуживает дальнейшего изучения. К его рассмотрению мы ненадолго вернемся в п. 3.7.2.

Во всяком случае, мы надеемся, что мы показали, что анализ посредством кривых безразличия требует либо слишком многого, либо слишком малого: если не все предпочтения индивидуума сравнимы, то кривые безразличия не существуют [5]). Если все предпочтения индивидуума сравнимы, то мы можем получить даже единственным образом определенную численную полезность, которая делает кривые безразличия излишними.

---

[1]) Известно, что это дает интересные, хотя до сих пор и чрезвычайно темные связи с теорией накопления и заинтересованности.

[2]) Тот, кто возражает против частотной интерпретации вероятности, может аксиоматизировать оба эти понятия (вероятность и предпочтение) совместно. Это также приводит к удовлетворительному количественному понятию полезности, которое будет рассмотрено нами в другой связи.

[3]) Мы не получили никакой базы для сравнения — качественного или количественного — полезностей для различных индивидуумов.

[4]) Все эти проблемы относятся к математической теории упорядоченных множеств. В частности, указанный выше вопрос сводится к выяснению того, образуют ли события линейно упорядоченное или лишь частично упорядоченное множество в смысле отношения предпочтения. См. п. 65.3.

[5]) Точки на одной и той же кривой безразличия должны отождествляться и не дают поэтому примеров несравнимости.

Разумеется, для предпринимателя, который может проводить калькуляцию в терминах денежных издержек и прибылей, все это становится беспредметным.

3.3.5. Можно выдвинуть то возражение, что для нас вовсе не обязательно входить во все эти запутанные детали, относящиеся в измерениям полезности, поскольку, очевидно, рядовой индивидуум, поведение которого мы хотим описать, не измеряет свои полезности точно; скорее он проводит свою экономическую деятельность в довольно густом тумане. То же, разумеется, справедливо для значительной части его поведения по отношению к свету, теплоте, мускульным усилиям и т. п. Но для построения физической науки эти явления должны были подвергнуться измерению. Впоследствии наш индивидуум пришел даже к использованию — прямому или косвенному — результатов этих измерений в своей повседневной жизни. То же самое может в будущем произойти и в экономике. Если с помощью теории, использующей этот аппарат, будет достигнуто более полное понимание экономического поведения, то это сможет оказать влияние и на материальную жизнь индивидуума. Поэтому изучение этих проблем вовсе не является бесполезным отступлением от темы.

## 3.4. Принципы измерения. Подробное рассмотрение

3.4.1. Из сказанного выше читатель может почувствовать, что мы получим численный масштаб для полезности, лишь выдвинув соответствующий принцип, иначе говоря, постулировав существование подобного масштаба. В п. 3.3.2 мы говорили, что если индивидуум предпочитает $A$ равновероятной комбинации $B$ и $C$ (считая, что $C$ для него является более предпочтительным, чем $A$, а $A$ — более предпочтительным, чем $B$), то это дает правдоподобное основание для численной оценки того, что его предпочтение $A$ по сравнению с $B$ превышает предпочтение $C$ по сравнению с $A$. Не постулируем ли мы здесь — или считаем само собой разумеющимся,— что одни предпочтения могут превышать другие или хотя бы что подобные утверждения имеют смысл? Такая точка зрения была бы полным непониманием нашего подхода.

3.4.2. Мы не постулируем и не предполагаем ничего подобного. Мы предполагаем только одну вещь — и это является достаточно обоснованным эмпирически,— что мыслимые события могут комбинироваться с некоторыми вероятностями. Поэтому то же самое следует предположить для связанных с этими событиями полезностей, каковы бы они ни были. Выскажем это более математическим языком.

В естественных науках часто появляются величины, которые априори не являются математическими и соотнесены некоторым сторонам физического мира. Иногда эти величины можно группировать в области, на которых возможны некоторые естественные, физически осмысленные операции. Так, физически определенная величина «масса» допускает операцию сложения. Ту же операцию допускает определенное в физике и геометрии понятие «расстояния»[1]). С другой стороны, определяемая физически и геометрически величина «положение» не допускает этой операции[2]),

[1]) Для определенности мы считаем геометрию физической дисциплиной — такая точка зрения имеет под собой достаточные основания. Под геометрией мы понимаем — также для определенности — евклидову геометрию.

[2]) Мы имеем в виду «однородное» евклидово пространство, в котором никакая система координат или репер не предпочитаются.

но допускает операцию образования «центра тяжести» двух положений [1]). Другие физико-геометрические понятия, обычно именуемые векторными — например, скорость и ускорение,— снова допускают операцию сложения.

**3.4.3.** Во всех тех случаях, когда подобной «естественной» операции приписывается наименование, напоминающее нам о некоторой математической операции,— подобно упомянутому выше примеру «сложения»,— следует всячески избегать недоразумений. Эта терминология не имеет своей целью провозглашение тождественности двух операций с одним и тем же названием, да это, очевидно, и не имеет места; она выражает лишь мнение о том, что они обладают сходными чертами, и надежду на то, что в конечном счете будет установлено некоторое соответствие между ними. Разумеется, это — если это вообще осуществимо — делается путем нахождения некоторой математической модели для рассматриваемой физической области, в рамках которой эти величины будут представляться числами, так что в модели математическая операция описывает синонимичную с ней «естественную» операцию.

Возвратимся к нашим примерам. «Энергия» и «масса» в подходящих математических моделях становятся числами, а «естественное» их сложение — обычным сложением. «Положение», равно как и векторные величины, становится тройками чисел [2]), именуемых соответственно координатами или компонентами. Естественное понятие «центра тяжести» двух положений [3]) $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ с «массами» $\alpha$ и $1-\alpha$ (см. сноску 1 на стр. 47) реализуется в виде

$$\{\alpha x_1+(1-\alpha)x'_1,\ \alpha x_2+(1-\alpha)x'_2,\ \alpha x_3+(1-\alpha)x'_3\}\ ^{4)}.$$

«Естественная» операция «сложения» векторов $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ описывается как $\{x_1+x'_1, x_2+x'_2, x_3+x'_3\}$ [5]).

Все сказанное выше об «естественных» и математических операциях равным образом применимо к естественным и математическим отношениям. Хорошими примерами являются различные встречающиеся в физике варианты понятия «больше»: бо́льшая энергия, сила, теплота, скорость и т. д.

Эти «естественные» отношения являются наилучшей основой для построения математических моделей и согласования с ними физических данных.

Замечание 1. Наилучшей, но не единственной. Хорошим контрпримером является температура. «Естественное» понятие «больше» оказалось бы недостаточным для установления современной математической модели — шкалы абсолютной температуры. В действительности здесь использовались другие приемы. См. п. 3.2.1.

Замечание 2. Мы не хотим создавать у читателя ложного впечатления, что картина формирования математических моделей, т. е. создания физических теорий, описана здесь исчерпывающим образом. Не нужно забывать, что этот процесс весьма индивидуален и содержит множество этапов, которые трудно предвидеть. Одним из важных этапов является, например, «распутывание» понятий, т. е. расщепление некоторых вещей, которые при поверхностном рассмотрении кажутся представляющими одну физическую величину, на несколько математических понятий. Скажем, в соответствующих областях решающее значение имело «распутывание» силы и энергии или количества теплоты и температуры.

В настоящее время совершенно невозможно предвидеть, сколько подобных дифференциаций нам еще предстоит проделать в экономической теории.

---

[1]) По отношению к двум данным массам $\alpha$ и $\beta$, занимающим эти положения. Может оказаться удобным нормировать их так, чтобы общая масса была равна единице, т. е. принять $\beta = 1-\alpha$.

[2]) Мы имеем в виду трехмерное евклидово пространство.

[3]) Теперь мы описываем их тремя числами — их координатами.

[4]) Обычно это обозначается как $\alpha\{x_1, x_2, x_3\}+(1-\alpha)\{x'_1, x'_2, x'_3\}$. См. (16: A: c) в п. 16.2.1.

[5]) Обычно это обозначается через $\{x_1, x_2, x_3\}+\{x'_1, x'_2, x'_3\}$. См. начало п. 16.2.1.

**3.4.4.** Здесь следует сделать еще одно замечание. Пусть для некоторой физической области найдена удовлетворительная математическая модель в указанном выше смысле и рассматриваемые физические величины согласованы с числами. В этом случае вовсе не обязательно, чтобы описание математической модели давало нам единственный путь согласования физических величин с числами. Иначе говоря, модель может давать целое семейство подобных соответствий — называемых в математике отображениями,— любое из которых можно использовать для целей теории. Переход от одного из этих соответствий к другому приводит к некоторому преобразованию числовых данных, описывающих физические величины. В этом случае мы говорим, что рассматриваемые физические величины описываются числами с точностью до этой системы преобразований. В математике подобные системы преобразований называются группами [1]).

Примеры подобных ситуаций весьма многочисленны. Так, геометрическое понятие расстояния является числом с точностью до умножения на положительные постоянные множители [2]). Такова же ситуация с физической величиной массы. Физическое понятие энергии описывается числом с точностью до линейного преобразования, т. е. прибавления любой постоянной и умножения на любую положительную постоянную [3]). Понятие положения определено с точностью до неоднородного ортогонального линейного преобразования [4, 5]). Векторные понятия определены с точностью до однородных преобразований того же типа [5, 6]).

**3.4.5.** Возможны также случаи, когда физическая величина представляет собой число с точностью до любого монотонного преобразования. Так обстоит дело с величинами, для которых существует только «естественное» отношение «больше» — и ничего другого. Так было, например, с температурой, пока было известно только понятие «теплее» [7]); то же справедливо для шкалы Мооса твердости минералов; то же справедливо и для полезности, если это понятие основано на идее предпочтения. При виде такого произвола в числовом описании в подобных случаях напрашивается мнение о том, что рассматриваемая величина вовсе не является численной. Представляется, однако, более целесообразным воздержаться от подобных качественных утверждений и вместо этого установить объек-

---

[1]) В другом контексте мы встретимся с группами в п. 28.1.1; там же можно найти ссылки на литературу.

[2]) Иначе говоря, фиксация единицы длины в евклидовой геометрии несущественна.

[3]) Иначе говоря, в механике несущественна фиксация нуля или единицы энергии. Ср. это с предыдущей сноской. Расстояние обладает естественным нулем — это расстояние от любой точки до нее самой.

[4]) Это значит, что $\{x_1, x_2, x_3\}$ заменяется на $\{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}$, где

$$x_1^* = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1,$$
$$x_2^* = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2,$$
$$x_3^* = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3.$$

Здесь $a_{ij}$ и $b_i$ — постоянные, а матрица $(a_{ij})$ является ортогональной.

[5]) Иначе говоря, если речь идет о положении, то фиксация начала координат или репера в геометрии несущественна; если рассматриваются векторы, то несущественен выбор репера.

[6]) Это значит, что в приведенной выше сноске 4 все $b_i = 0$. Иногда допустимым является более широкий класс матриц — именно все матрицы с ненулевыми определителями. Рассмотрение этих вопросов нам здесь не понадобится.

[7]) Но не существовало никакого количественно воспроизводимого метода измерения температуры.

тивным образом, с точностью до какой системы преобразований определено это численное описание. Случай, когда эта система преобразований состоит из всех монотонных преобразований, является, конечно, довольно крайним; различные градации на другом конце этой шкалы даются упомянутыми выше системами преобразований: неоднородными или однородными линейными преобразованиями в пространстве, линейными преобразованиями одной числовой переменной, умножением этой переменной на постоянную [1]). В общем, может представиться и случай, когда численное описание является абсолютно строгим, т. е. когда не нужно допускать вообще никаких преобразований [2]).

**3.4.6.** Система преобразований, с точностью до которой данная физическая величина описывается числами, может изменяться во времени, т. е. в зависимости от этапа развития предмета. Так, температура первоначально описывалась числом лишь с точностью до произвольного монотонного преобразования [3]). С развитием термометрии (в частности, термометрии гармоничного идеального газа) класс этих преобразований был сужен до линейных, т. е. не хватало лишь абсолютного нуля и абсолютной единицы. Последующее развитие термодинамики зафиксировало даже абсолютный нуль, так что система преобразований в термодинамике состоит только из умножения на постоянные. Эти примеры могут быть дополнены другими, но, по-видимому, нам нет нужды вдаваться в более подробные обсуждения.

Представляется, что ситуация с полезностью имеет сходную природу. Мы можем встать на ту точку зрения, что единственным «естественным» видом данных в этой области является отношение «больше», т. е. понятие предпочтения. В этом случае полезности представляют собой числа с точностью до некоторого монотонного преобразования. В действительности эта точка зрения является в экономической литературе общепринятой; наиболее полное свое отражение она находит в методе кривых безразличия.

Для сужения системы преобразований необходимо обнаружить дальнейшие «естественные» операции или отношения в области полезности. Так, еще Парето [4]) отметил, что достаточно было бы отношения равенства для разностей полезностей; в нашей терминологии это свело бы систему преобразований к линейным преобразованиям [5]). Однако поскольку это соотношение не кажется нам в полной мере «естественным»— иначе говоря, поддающимся интерпретации путем воспроизводимых наблюдений,— это предположение не достигает своей цели.

---

[1]) Можно представить себе также и промежуточные случаи более широких, чем указанные, систем преобразований, которые, однако, не содержат всех монотонных преобразований. Различные формы теории относительности дают довольно сложные примеры таких случаев.

[2]) Говоря обычным языком, это должно быть справедливо для физических величин, для которых можно определить как абсолютный нуль, так и абсолютную единицу. Таков, например, случай с абсолютной величиной (но не вектором!) скорости в тех физических теориях, в которых скорость света играет некоторую нормативную роль,— в максвелловской электродинамике или в специальной теории относительности.

[3]) Пока было известно только понятие «теплее», т. е. «естественное» отношение «больше». Этот вопрос подробно обсуждался нами ранее.

[4]) V. Pareto, Manuel d'économie politique, Paris, 1907, p. 264.

[5]) Это в точности то же самое, что Евклид проделал для положения точки на прямой. Понятие предпочтения в теории полезности соответствует отношению «лежит справа от» в геометрии, а желательное для нас отношение равенства разностей полезности — геометрической конгруэнтности отрезков.

### 3.5. Принципиальная структура аксиоматического рассмотрения численных полезностей

**3.5.1.** Неудача одного конкретного приема не исключает возможности достижения той же цели посредством другого приема. Наше основное утверждение состоит в том, что область полезности содержит некоторую «естественную» операцию, суживающую систему преобразований в точности до такого предела, как это могло бы быть достигнуто при помощи другого приема. Этой операцией является комбинирование двух полезностей с двумя заданными альтернативными вероятностями $\alpha$, $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$, как это было описано в п. 3.3.2. Этот процесс столь сходен с образованием центров тяжести, упомянутым в п. 3.4.3, что может оказаться выгодным использовать здесь ту же терминологию. Таким образом, для полезностей $u$ и $v$ мы имеем «естественное» *отношение* $u>v$ (читается: $u$ предпочтительнее $v$) и «естественную» *операцию* $\alpha u+(1-\alpha)v$ (читается: центр тяжести $u$ и $v$ с весами $\alpha$, $1-\alpha$, или: комбинация $u$ и $v$ с альтернативными вероятностями $\alpha$, $1-\alpha$). Если признать существование и воспроизводимую наблюдаемость этих понятий, то наш путь становится ясным — нужно найти соответствие между полезностями и числами, которое переводит отношение $u>v$ и операцию $\alpha u+(1-\alpha)v$ для полезностей в синонимичные понятия для чисел.

Обозначим это соответствие через

$$u\to\rho=\mathrm{v}(u),$$

где $u$ — полезность, а $\mathrm{v}(u)$ — число, которое наше соответствие ей сопоставляет. Наши требования заключаются в следующем:

(3:1:a) Из $u>v$ следует $\mathrm{v}(u)>\mathrm{v}(v)$,

(3:1:b) $\mathrm{v}(\alpha u+(1-\alpha)v)=\alpha\mathrm{v}(u)+(1-\alpha)\mathrm{v}(v)$ [1].

Если существуют два таких соответствия:

(3:2:a) $u\to\rho=\mathrm{v}(u)$,

(3:2:b) $u\to\rho'=\mathrm{v}'(u)$,

то они устанавливают соответствие между числами

(3:3) $\rho\rightleftarrows\rho'$,

которое можно записать также в виде

(3:4) $\rho'=\varphi(\rho)$.

Так как соответствия (3:2:a) и (3:2:b) удовлетворяют соотношениям (3:1:a) и (3:1:b), соответствие (3:3), т. е. функция $\varphi(\rho)$ в (3:4), должно сохранять отношение [2] $\rho>\sigma$ и операцию $\alpha\rho+(1-\alpha)\sigma$ (ср. сноску 1 на этой стр.). Это означает, что

(3:5:a) Из $\rho>\sigma$ следует $\varphi(\rho)>\varphi(\sigma)$,

(3:5:b) $\varphi(\alpha\rho+(1-\alpha)\sigma)=\alpha\varphi(\rho)+(1-\alpha)\varphi(\sigma)$.

Следовательно, функция $\varphi(\rho)$ должна быть линейной, т. е.

(3:6) $\rho'=\varphi(\rho)\equiv\omega_0\rho+\omega_1$,

где $\omega_0$ и $\omega_1$ — фиксированные числа (постоянные), причем $\omega_0>0$.

---

[1] Отметим, что в каждом из этих случаев в левой части фигурируют «естественные» понятия для полезностей, а в правой — обычные понятия для чисел.

[2] Эти отношения и операция теперь применяются к числам $\rho$ и $\sigma$!

Итак, мы видим, что если подобное численное представление полезностей [1]) вообще существует, то оно определяется с точностью до линейного преобразования [2, 3]). Это значит, что полезность является числом с точностью до линейного преобразования.

Для того чтобы численное представление полезности в указанном смысле существовало, необходимо постулировать определенные свойства отношения $u > v$ и операции $\alpha u + (1 - \alpha) v$ для полезностей. Выбор этих постулатов, или аксиом, и их последующий анализ приводит к задачам, представляющим определенный математический интерес. Для правильной ориентации читателя мы дадим сейчас лишь общую картину ситуации; полное рассмотрение вопроса можно найти в Приложении.

**3.5.2.** Выбор аксиом не является вполне объективной задачей. Обычно мы ожидаем достижения некоторой определенной цели — скажем, выводимости некоторой конкретной теоремы или теорем из данной системы аксиом — и наша задача является точной и объективной только в этих пределах. Но помимо этого всегда имеются другие важные пожелания менее формального характера. Аксиомы не должны быть слишком многочисленными, их система должна быть максимально простой и прозрачной, и каждая аксиома должна иметь интуитивно ясный смысл, на основании которого можно непосредственно оценить ее пригодность [4]). В ситуации, подобной нашей, последнее требование является особенно существенным, несмотря на свою неопределенность: мы хотим сделать интуитивное понятие поддающимся математическому изучению и увидеть с максимальной ясностью, каких предположений это требует.

Объективная часть нашей задачи ясна: из постулатов должно следовать существование соответствия (3 : 2 : a), обладающего, как отмечалось в п. 3.5.1, свойствами (3 : 1 : a) и (3 : 1 : b). Высказанные выше дальнейшие эвристические и даже эстетические пожелания не определяют единственного пути получения аксиоматической трактовки. Далее мы сформулируем некоторую систему аксиом, которая представляется достаточно удовлетворительной.

### 3.6. Аксиомы и их интерпретация

**3.6.1.** Наши аксиомы заключаются в следующем. Мы рассматриваем систему $U$ величин [5]) $u, v, w, \ldots$ На $U$ задано *отношение* $u > v$ и для любого числа $\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ определена *операция*

$$\alpha u + (1 - \alpha) v = w.$$

---

[1]) То есть соответствие (3:2:a), удовлетворяющее (3:1:a) и (3:1:b).

[2]) То есть преобразования вида (3:6).

[3]) Вспомним физические примеры той же ситуации, рассмотренные в п. 3.4.4. Правда, сейчас наше рассмотрение является несколько более подробным. Мы не фиксируем абсолютного нуля и абсолютной единицы полезности.

[4]) Первый и последний принципы могут представлять, по крайней мере в определенных пределах, противоположные тенденции. Если мы сократим число аксиом, объединяя их в пределах технических возможностей, то мы можем утратить возможность различения различных интуитивных основ. Так, мы могли бы выразить требования (3:B) в п. 3.6.1 меньшим числом аксиом, но это затемнило бы последующий анализ в п. 3.6.2.

Соблюдение надлежащего равновесия является делом практического, а до некоторой степени и эстетического суждения.

[5]) Под ними, конечно, понимается система абстрактных полезностей, которые должны быть охарактеризованы нашими аксиомами. По поводу общей природы аксиоматического метода см. замечания и ссылки в последней части п. 10.1.1.

Эти понятия удовлетворяют следующим аксиомам:

(3:A) Отношение $u > v$ является *линейным упорядочением*[1]) на $U$. Поэтому мы пишем $u < v$, когда $v > u$. Тогда

(3:A:a) Для любых двух $u$, $v$ имеет место одно и только одно из следующих трех отношений: $u = v$, $u > v$, $u < v$.

(3:A:b) Из $u > v$, $v > w$ следует $u > w$[2]).

(3:B) *Упорядочение и комбинирование*[3]).

(3:B:a) Из $u < v$ следует $u < \alpha u + (1-\alpha) v$.

(3:B:b) Из $u > v$ следует $u > \alpha u + (1-\alpha) v$.

(3:B:c) Из $u < w < v$ следует существование такого $\alpha$, что
$$\alpha u + (1-\alpha) v < w.$$

(3:B:d) Из $u > w > v$ следует существование такого $\alpha$, что
$$\alpha u + (1-\alpha) v > w.$$

(3:C) *Алгебраические правила комбинирования.*

(3:C:a) $\alpha u + (1-\alpha) v = (1-\alpha) v + \alpha u$;

(3:C:b) $\alpha (\beta u + (1-\beta) v) + (1-\alpha) v = \gamma u + (1-\gamma) v$, где $\gamma = \alpha\beta$.

Можно показать, что из этих аксиом вытекает существование соответствия (3:2:a), обладающего свойствами (3:1:a) и (3:1:b), как это описывалось в п. 3.5.1. Следовательно, выводы п. 3.5.1 сохраняют силу: система $U$ (т. е. в нашей интерпретации система абстрактных полезностей) представляет собой систему чисел с точностью до линейного преобразования.

Построение (3:2:a) на основе (3:1:a) и (3:1:b) при помощи аксиом (3:A) — (3:C) является чисто математической задачей, правда, несколько кропотливой, хотя она решается обычными путями и не доставляет особенных трудностей. (По этому поводу см. Приложение.)

Равным образом нам представляется излишним проводить здесь обычное логическое обсуждение этих аксиом[4]). Однако мы скажем несколько слов об их интуитивном смысле, т. е. о подтверждении каждой из наших аксиом (3:A) — (3:C).

**3.6.2.** Дадим анализ наших постулатов.

(3:A:a*) Это утверждение о полноте системы индивидуальных предпочтений. Его обычно принимают при рассмотрении полезностей или предпочтений, например, в анализе кривых безразличия. Эти вопросы уже рассматривались в пп. 3.3.4 и 3.4.6.

(3:A:b*) Это «транзитивность» предпочтений — правдоподобное и общепринятое свойство.

---

[1]) Более систематическое математическое рассмотрение этого понятия приведено в п. 65.3.1. Эквивалентное понятие полноты системы предпочтений рассматривалось ранее в начале пп. 3.3.2 и 3.4.6.

[2]) Эти условия (3:A:a) и (3:A:b) соответствуют условиям (65:A:a) и (65:A:b) из п. 65.3.1.

[3]) Напомним, что фигурирующие здесь числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ всегда расположены между нулем и единицей.

[4]) Аналогичная ситуация рассматривается более подробно в § 10. Приводимые там аксиомы относятся к гораздо более важному для нас вопросу. Логическое обсуждение дано в п. 10.2. Некоторые общие замечания п. 10.3. применимы и к данному случаю.

(3:B:a*) Здесь утверждается, что если $v$ предпочтительнее $u$, то более предпочтительным по сравнению с $u$ является даже $v$ с некоторой вероятностью $1 - \alpha$. Это предположение законно, так как мы исключаем какую бы то ни было дополнительность (или противоположное). См. начало п. 3.3.2.

(3:B:b*) Является двойственным к (3:B:a*) с заменой отношения «предпочтительнее» на «менее предпочтительно, чем».

(3:B:c*) Здесь утверждается следующее. Если $w$ предпочтительнее $u$ и дано также еще более предпочтительное $v$, то комбинация $u$ и $v$, взятого с вероятностью $1 - \alpha$, не повлияет на предпочтительность $w$ по сравнению с $u$, если эта вероятность достаточно мала. Иными словами, сколь бы предпочтительно ни было $v$ само по себе, его влияние можно сделать сколь угодно слабым, придавая ему достаточно малую вероятность. Это правдоподобное предположение «непрерывности».

(3:B:d*) Является двойственным к (3:B:c*) с заменой отношения «предпочтительнее» на «менее предпочтительно, чем».

(3:C:a*) Это утверждение говорит о том, что порядок, в котором упоминаются составляющие $u$ и $v$ некоторой комбинации, безразличен. Такое предположение законно, в частности, потому, что составляющие суть альтернативные события (см. (3:B:a*)).

(3:C:b*) Безразлично, получена ли комбинация двух составляющих в два последовательных приема — сначала с вероятностями $\alpha$, $1 - \alpha$, затем с вероятностями $\beta$, $1 - \beta$ — или же в один прием — с вероятностями $\gamma$, $1 - \gamma$, где [1]) $\gamma = \alpha\beta$. Здесь можно сказать то же самое, что и в (3:C:a*). Может случиться, однако, что этот постулат будет иметь и более глубокое значение; некоторый намек на это делается в п. 3.7.1.

### 3.7. Общие замечания об аксиомах

**3.7.1.** Сейчас уместно будет остановиться и обозреть ситуацию. Не показали ли мы слишком много? Мы можем вывести из постулатов (3:A) — (3:C) численный характер полезности в смысле (3:2:a), а также свойства (3:1:a) и (3:1:b) из п. 3.5.1. При этом (3:1:b) утверждает, что численные значения полезности сочетаются (с вероятностями) подобно математическим ожиданиям! Но ведь и само понятие математического ожидания до сих пор оспаривается, и его законность определенным образом зависит от некоторых предположений, касающихся природы «ожидания» [2]). Не считаем ли мы здесь решенным этот спорный вопрос? Не вводят ли наши постулаты — быть может, некоторым косвенным путем — предположений, которые определяют математическое ожидание?

Говоря более конкретно, не может ли для индивидуума существовать полезность, положительная или отрицательная, от самого акта «испытания случая», от участия в азартной игре, которая затушевывается при использовании математического ожидания?

---

[1]) Разумеется, правильная арифметика для учета двух последовательных смешиваний $v$ и $u$ должна быть именно такой.

[2]) См. K. Menger, Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre, *Zeitschr. für Nationalökonomie* 5 (1934), 459; G. Tintner, A contribution to the non-static theory of choice; *Quart. J. of Econ.* LVI (1942), 274.

Как обходили эту возможность наши аксиомы (3:A) — (3:C)?

Насколько мы можем судить, наши постулаты (3:A) — (3:C) не пытаются избежать ее. Даже тот из них, который ближе всего подходит к исключению «полезности от азарта» — (3:C:b) (см. его обсуждение в п. 3.6.2),— представляется правдоподобным и законным, если не использовать гораздо более утонченную психологическую систему, чем та, которой мы в настоящее время располагаем для целей экономики. Представляется, что возможность построения на основе (3:A) — (3:C) численной полезности вместе с формулой, приводящей к использованию математических ожиданий, говорит о следующем. Мы практически определили численную полезность как объект, для которого подсчет математических ожиданий является законным [1]). Так как аксиомы (3:A) — (3:C) обеспечивают нам осуществимость необходимого построения, на этом уровне нельзя формулировать такие понятия, как «величина полезности от азарта», не впадая при этом в противоречие [2]).

**3.7.2.** Как мы уже указывали — последний раз в п. 3.6.1 — наши аксиомы основаны на отношении $u > v$ и операции $\alpha u + (1 - \alpha) v$ для полезностей. Примечательно, что можно считать более непосредственно заданной именно эту операцию, а не отношение. Действительно, вряд ли можно усомниться в том, что некто, могущий вообразить себе две альтернативные ситуации с соответствующими им полезностями $u$, $v$, не мог бы представить себе перспективу осуществления обеих ситуаций с вероятностями $\alpha$ и $1 - \alpha$. С другой стороны, для отношения $u > v$ можно оспаривать постулат (3:A:a), т. е. линейность этого упорядочения.

Остановимся бегло на этом вопросе. Мы признали сомнительность того положения, что индивидуум всегда может решить, какую из двух альтернатив с полезностями $u$ и $v$ он предпочитает [3]). Но, каковы бы ни были достоинства такого сомнения, эта возможность, т. е. полнота системы индивидуальных предпочтений, должна предполагаться даже для целей «метода кривых безразличия» (см. наши замечания по поводу (3:A:a) в п. 3.6.2). Но если предположить наличие этого свойства [4]) у отношения $u > v$, то использование нами гораздо менее сомнительной операции [5]) $\alpha u + (1 - \alpha) v$ также приведет к численным полезностям!

З а м е ч а н и е. Здесь читатель может вспомнить известное рассуждение, в соответствии с которым рассмотрение полезностей, не являющееся численным (при помощи «кривых безразличия»), предпочтительнее любого численного их рассмотрения, так как оно проще и основывается на меньшем числе допущений. Это возражение могло бы быть законным, если бы численное рассмотрение основывалось на предложенном Парето отношении равенства для разностей полезностей (см. конец п. 3.4.6). Действительно, это отношение является более сильным и более сложным допущением, добавляемым к исходным гипотезам о неограниченной сравнимости полезностей (линейность отношения предпочтения).

Вместо этого мы однако использовали операцию $\alpha u + (1 - \alpha)v$. Мы надеемся, что читатель согласится с нами в том, что это дает нам даже более надежное допущение, чем линейность предпочтения. Поэтому мы считаем, что наш подход, в отличие от подхода Парето, может считаться свободным от возражений, основанных на утрате простоты и необходимости искусственных допущений.

---

[1]) Таким образом, известное предложение Даниила Бернулли о разрешении «Петербургского парадокса» путем использования так называемого «морального ожидания» вместо математического ожидания означает численное определение полезности как логарифма обладаемых денег.

[2]) Это утверждение может показаться парадоксальным. Однако всякий, кто всерьез пытался аксиоматизировать это неуловимое понятие, вероятно, согласится с ним.

[3]) Или может отметить, что обе они в равной степени желательны.

[4]) То есть постулата о линейности (3:A:a).

[5]) То есть постулатов (3:B), (3:C) вместе с очевидным постулатом (3:A:b).

Если не делать общего предположения о сравнимости [1]), то построение математической теории, основанной на операции $\alpha u + (1 - \alpha) v$ и на том, что остается от отношения $u > v$, все еще остается возможным [2]). Это приводит к понятию полезности как многомерного вектора. Такое построение является более сложным и менее удовлетворительным, и мы не предполагаем подвергать его сейчас систематическому рассмотрению.

**3.7.3.** Это краткое введение вовсе не претендует на то, чтобы исчерпать данный вопрос; однако мы надеемся, что наиболее существенные положения нами отражены. Следующие замечания помогут избежать каких бы то ни было недоразумений.

1) Подчеркнем еще раз, что мы рассматриваем только полезности, относящиеся к одному лицу. Из наших рассмотрений не вытекает никаких результатов, касающихся сравнения полезностей, которые принадлежат различным индивидуумам.

2) Нельзя отрицать, что анализ методов, использующих математическое ожидание (по поводу литературы см. сноску 2 на стр. 53), в настоящее время далек от завершенности. Наши замечания в п. 3.7.1 направлены именно на это, хотя по данному поводу следовало бы сказать еще весьма много. Здесь мы сталкиваемся с весьма интересными вопросами, которые, однако, выходят за пределы настоящей работы. Для наших целей вполне достаточно отметить, что справедливость простых и правдоподобных аксиом (3:A) — (3:C) из п. 3.6.1 для отношения $u > v$ и операции $\alpha u + (1 - \alpha) v$ превращает полезности в числа с точностью до линейного преобразования — в том смысле, как это оговаривалось в этих пунктах.

### 3.8. Роль понятия маргинальной полезности

**3.8.1.** Из предыдущих рассуждений ясно, что мы вправе свободно пользоваться понятием численной полезности. С другой стороны, наши дальнейшие рассмотрения покажут, что мы не можем избежать предположения о том, что все участники рассматриваемой экономики полностью информированы о физических характеристиках ситуации, в которой они действуют, и могут выполнять все статистические, математические и т. п. операции, которые эти знания делают возможными. В литературе уделялось большое внимание природе и важности этого предположения, и вопрос, вероятно, еще далек от исчерпания. Мы не предполагаем останавливаться на нем. Эта проблема слишком обширна и сложна, и мы считаем, что лучше всего здесь будет «поделить трудности». Иначе говоря, мы хотим избежать этого усложнения, которое, будучи само по себе интересным, должно рассматриваться отдельно от нашей основной проблемы.

В действительности мы считаем, что наши исследования — хотя в них и предполагается без всяких дальнейших дискуссий наличие «полной информации»— вносят некоторый реальный вклад в изучение данного вопроса. Мы увидим, что многие экономические и социальные явления, обычно приписываемые «неполной информации» у индивидуума, появляются и в нашей теории и с ее помощью могут быть удовлетворительным

---

[1]) Это приводит к ослаблению (3:A:a) до (3:A:a*), получающегося путем замены слов «одно и только одно» на «не более, чем одно». Тогда условия (3:A:a*) и (3:A:b) соответствуют (65:B:a) и (65:B:b).

[2]) В этом случае оказываются также необходимыми некоторые видоизменения постулатов групп (3:A) и (3:C).

образом интерпретированы. Так как в нашей теории предполагается «полная информация», мы заключаем, что указанные явления на деле не имеют ничего общего с «неполной информацией» индивидуума. Некоторые особенно яркие примеры можно найти в понятиях «дискриминирования» в п. 33.1, «неполной эксплуатации» в п. 38.3 и «передачи» или «дани» в п. 46.11 и 46.12.

Исходя из сказанного, мы решились бы даже оспаривать важность роли, обычно приписываемой неполной информации в ее общепринятом смысле [1]) в экономических и социальных теориях. Далее будет выяснено, что некоторые явления, которые на первый взгляд следовало бы отнести на счет этого фактора, на деле не имеют с ним ничего общего [2]).

**3.8.2.** Рассмотрим теперь изолированного индивидуума с определенными физическими характеристиками, располагающего определенными количествами товаров. В силу сказанного перед ним стоит задача нахождения максимальной полезности, которая в этой ситуации может быть получена. Так как этот максимум представляет собой вполне определенную величину, вполне определенным будет и то увеличение, которое будет иметь место при добавлении одной единицы любого товара к запасу всех товаров, находящихся в распоряжении индивидуума. Разумеется, это и есть классическое понятие маргинальной полезности единицы рассматриваемого товара [3]).

Ясно, что эти величины имеют решающее значение в экономике Робинзона Крузо. Упомянутая выше маргинальная полезность соответствует, очевидно, максимальным усилиям, которые он согласится предпринять — если он ведет себя в соответствии с обычными критериями рациональности — для получения еще одной единицы этого товара.

Вовсе не ясно, однако, какое значение имеет это понятие при определении поведения участника экономики общественного обмена. Мы видели, что в этом случае принципы рационального поведения все еще ждут своей формулировки и что они вовсе не выражаются посредством требования максимальности робинзоновского типа. Таким образом, сомнительно, имеет ли в этом случае маргинальная полезность вообще какой-либо смысл [4]).

Положительные утверждения по этому вопросу станут возможными только после того, как нам удастся построить теорию рационального поведения в экономике общественного обмена. Как мы указывали выше, такая возможность открывается теорией стратегических игр. Мы увидим, что маргинальная полезность действительно играет важную роль и в этом случае, но гораздо более тонким образом, чем это обычно предполагается.

---

[1]) Мы увидим, что правила рассматриваемых нами игр могут явным образом предписывать отсутствие у определенных участников определенных частей информации. См. пп. 6.3, 6.4. (Игры, в которых этого не происходит, рассматриваются в п. 14.8 и в (15:В) из п. 15.3.2; они называются играми с «полной информацией».) Мы узнаем и используем этот тип «несовершенной информации» (в соответствии со сказанным его следовало бы назвать «неполной информацией»). Однако мы отбрасываем все иные типы, расплывчато описываемые посредством понятий типа «запутанность».

[2]) Наша теория приписывает эти явления возможности множественных «устойчивых норм поведения»— см. п. 4.6 и конец п. 4.7.

[3]) Точнее говоря, так называемая «косвенно зависимая ожидаемая полезность».

[4]) Все это следует понимать в рамках наших обычных упрощающих предположений. Если эти предположения ослабить, то возникают различные дальнейшие трудности.

# § 4. СТРУКТУРА ТЕОРИИ. РЕШЕНИЯ И НОРМЫ ПОВЕДЕНИЯ

## 4.1. Простейшее понятие решения для одного участника

**4.1.1.** Теперь мы достигли того момента, когда становится возможным дать положительное описание предлагаемой нами процедуры. Это означает, прежде всего, краткий очерк и разъяснение основных технических понятий и приемов.

Как мы уже говорили, мы хотим найти математически полные принципы, которые определяют «рациональное поведение» для участников экономики общественного обмена, и вывести из них общие характеристики такого поведения. Хотя подобные принципы должны быть достаточно общими, т. е. справедливыми во всех ситуациях, мы можем в настоящее время удовольствоваться лишь нахождением решений для некоторых характерных частных случаев.

Прежде всего мы должны составить ясное представление о том, что можно принять в качестве решения задачи, иначе говоря, какое количество информации должно нести в себе решение и чего следует ожидать в отношении его формальной структуры. Точный анализ станет возможным только после выяснения этих вопросов.

**4.1.2.** Весьма правдоподобно, что непосредственное понятие решения должно сводиться к набору правил для каждого участника, предписывающих ему способ поведения в любой ситуации, которая только может возникнуть. На это можно возразить, что такая точка зрения излишне широка. Поскольку мы хотим теоретизировать по поводу «рационального поведения», представляется излишним давать индивидууму советы относительно его поведения в тех ситуациях, которые отличны от ситуаций, возникающих в рациональном сообществе. Это было бы справедливо в предположении рационального поведения и со стороны всех других участников — независимо от того, каким образом мы собираемся его характеризовать. Подобная процедура, вероятно, привела бы к некоторому единственному набору ситуаций, к которым только и должна была бы относиться наша теория.

Это возражение представляется неверным по двум причинам. Во-первых, «правила игры», т. е. физические законы, определяющие фактические условия рассматриваемой экономической деятельности, могут быть явно стохастическими. Действия участников экономики могут определять исход только в связи с событиями, зависящими от случая (с известными вероятностями); см. сноску 1 на стр. 36 и п. 6.2.1. Если принять это во внимание, то правила поведения даже для вполне рационального сообщества должны предусматривать великое множество ситуаций, часть которых будет весьма далека от оптимума [1]).

Во-вторых, что еще более важно, правила рационального поведения должны предусматривать возможность нерационального поведения со стороны других участников. Иными словами, пусть мы нашли набор правил, именуемых «оптимальными» или «рациональными», каждое из которых действительно оптимально при условии, что остальные участники ведут себя соответствующим образом. Тогда остается вопрос: что произойдет, если некоторые из участников отступят от этого образа действий? Если это оказалось бы для них выгодным — и, в частности, невыгодным для

---

[1]) То, что единственное оптимальное поведение вообще мыслимо при всей множественности определяемых случаем возможностей, разумеется, основано на использовании математического ожидания.

конформистов, — то указанное решение показалось бы весьма сомнительным. Пока что мы еще не в состоянии дать положительное обсуждение этих вопросов; мы хотим лишь подчеркнуть, что при таких условиях «решение» или по крайней мере его мотивация должны считаться несовершенными и неполными. Каким бы образом мы ни формулировали ведущие принципы и объективное оправдание «рационального поведения», при этом должны быть сделаны оговорки на все мыслимые случаи поведения «остальных». Только в этом случае можно построить удовлетворительную и исчерпывающую теорию. Однако если должно быть установлено превосходство «рационального поведения» над любыми другими типами поведений, то его описание должно включать правила поведения для всех мыслимых ситуаций, включая и те из них, когда «остальные» ведут себя нерациональным образом в смысле норм, которые эта теория им предписывает.

**4.1.3.** На этой стадии читатель подметит большое сходство с повседневным понятием игры. Мы считаем, что это сходство весьма существенно и что в действительности здесь имеет место нечто большее, чем простое сходство. Для экономических и социальных проблем игры выполняют — или должны выполнять — ту же роль, которую различные геометрические и математические модели с успехом осуществляют в физических науках. Подобные модели представляют собой теоретические построения с точными, исчерпывающими и не слишком сложными определениями; они должны быть сходными с реальностью в тех сторонах, которые существенны для проводимого исследования. Резюмируем: для того чтобы сделать возможным математическое рассмотрение, определение должно быть точным и исчерпывающим. Построение не должно быть чрезмерно сложным с тем, чтобы это математическое рассмотрение могло быть продвинуто за рамки простого формализма до того момента, когда оно даст полные численные результаты. Сходство с действительностью нужно для осмысленности всех проводимых операций. Что же касается этого сходства, то оно обычно может быть ограничено несколькими сторонами, которые в данную минуту считаются «существенными», ибо в противном случае высказанные выше требования вступили бы в противоречие друг с другом [1]).

Ясно, что если модель экономической деятельности будет строиться в соответствии с этими принципами, то в результате получится описание игры. Особенно ярко это утверждение проявляется в описании рынков, которые, в конце концов, являются ядром экономической системы, однако оно справедливо во всех случаях и без ограничений.

**4.1.4.** В п. 4.1.2 мы описывали, из чего, по нашему мнению, должно состоять решение, т. е. характеристика «рационального поведения». Оно свелось к полному набору правил поведения во всех мыслимых ситуациях. Это справедливо равным образом и для общественной экономики, и для игр. Таким образом, весь результат в указанном выше смысле заключается в чудовищно сложном комбинаторном переборе. Однако мы приняли упрощенное понятие полезности, в соответствии с которым все побуждения индивидуума полностью описываются одной численной величиной (см. пп. 2.1.1 и 3.3). Таким образом, сложное комбинаторное перечисление случаев, которого мы ожидаем от решения, допускает сжатое и содер-

---

[1]) Примером является ньютоновское описание солнечной системы посредством небольшого числа «точечных масс». Эти точки притягивают друг друга и движутся подобно звездам; это и есть сходство в существенных чертах, в то время как огромное количество других физических характеристик планет здесь не принимается во внимание.

жательное синтезирование — выяснение того, сколько [1, 2]) рассматриваемый участник может получить, если он ведет себя рациональным образом. Разумеется, под этим «может получить» имеется в виду некоторый минимум; он может получить и больше, если остальные будут делать ошибки (т. е. вести себя нерационально).

Следует отдавать себе отчет в том, что все эти рассуждения проводятся в указанных выше направлениях предварительно, перед построением удовлетворительной теории. Мы лишь формулируем пожелания, которые послужат нам своеобразным критерием успешности наших последующих рассмотрений. Однако и предварительные рассуждения об этих пожеланиях полностью согласуются с обычным эвристическим подходом — даже до того, как мы будем в состоянии их осуществить. Действительно, эти предварительные рассуждения составляют существенную часть процесса нахождения удовлетворительной теории [3]).

### 4.2. Обобщение на всех участников

**4.2.1.** Пока мы рассматривали лишь то, каким должно быть решение для одного участника. Представим теперь всех участников одновременно. Иначе говоря, рассмотрим общественную экономику или, что то же самое, игру с фиксированным числом участников (скажем, $n$). Полная информация, которую должно нести в себе решение, имеет, как мы уже говорили, комбинаторный характер. Кроме того, указывалось, каким образом одно количественное утверждение может вобрать в себя решающую часть этой информации. Это утверждение заключается в указании того, сколько получает каждый участник при рациональном поведении. Рассмотрим те количества, которые получают несколько участников. Если бы решение не давало нам в количественном отношении ничего, кроме указания этих количеств [4]), то оно совпало бы с известным понятием дележа — оно определяло бы, каким образом имеющиеся суммы должны быть распределены между участниками [5]).

Подчеркнем, что проблема дележа как для случая, когда имеющиеся суммы в действительности тождественно равны нулю, так и для случая, когда они являются переменными, в экономической литературе не была в своей общей форме ни надлежащим образом сформулирована, ни решена.

**4.2.2.** Мы не видим причин, по которым нельзя было бы удовлетвориться решением такого типа, т. е. единственным дележом, удовлетворяющим определенным требованиям для оптимального (рационального)

---

[1]) Имеется в виду полезность; для предпринимателя — прибыли; для игрока — выигрыш или проигрыш.

[2]) Если здесь явным образом присутствует элемент случайности, то, разумеется, мы имеем в виду математическое ожидание. См. первое замечание в п. 4.1.2, а также обсуждение в п. 3.7.1.

[3]) Те, кто знаком с развитием физики, признают всю важность, которую могут иметь подобные эвристические рассмотрения. Ни общая теория относительности, ни квантовая механика не могли бы быть построены без «дотеоретического» обсуждения пожеланий, касающихся будущей теории.

[4]) И, разумеется, процесса их нахождения в указанном выше комбинаторном смысле.

[5]) В играх в обычном понимании этого слова общие имеющиеся суммы всегда равны нулю: один участник может выиграть только то, что теряют другие. Таким образом, здесь имеется чистая задача распределения, т. е. дележа, и полностью отсутствует проблема повышения общей полезности, «общественного продукта». Во всех экономических вопросах последняя проблема также возникает, но задача о дележе остается. Впоследствии мы расширим понятие игры, опустив требование равенства имеющихся сумм нулю (см. гл. XI).

поведения, — при условии, что такое решение может быть найдено. (Конечно, эти требования мы еще не сформулировали. Подробное обсуждение дано в указываемых ниже пунктах.) В этом случае структура рассматриваемого общества была бы чрезвычайно простой: существовало бы некоторое абсолютное состояние равновесия, в котором количественная доля каждого участника была бы точно определена.

Однако далее мы увидим, что подобного решения, обладающего всеми необходимыми свойствами, вообще говоря, не существует. Понятие решения должно быть значительно расширено; мы увидим, что это тесно связано с некоторыми неотъемлемыми сторонами общественной организации, которые, будучи весьма прозрачными с точки зрения «здравого смысла», не подвергались до сих пор рассмотрению под надлежащим углом зрения. (См. пп. 4.6 и 4.8.1.)

**4.2.3.** Наше математическое исследование проблемы покажет, что в действительности существует не столь уж малочисленный класс игр, в которых может быть определено и найдено решение в указанном выше смысле, т. е. в виде единственного дележа. В таких случаях каждый участник, точно придерживаясь надлежащего, рационального поведения, получает по меньшей мере количество, приписываемое ему этим дележом. Он получает в точности это количество, если другие участники также ведут себя рациональным образом; если они отходят от рационального поведения, то он может получить даже больше.

Таковы игры двух участников, в которых сумма всех платежей равна нулю. Хотя эти игры и не вполне типичны для основных экономических процессов, они содержат некоторые всеобщие и важные черты всех игр вообще, и получаемые для них результаты являются основой для общей теории игр. Мы подробно рассмотрим эти игры в гл. III.

### 4.3. Решение как множество дележей

**4.3.1.** Если снять любое из двух указанных выше ограничений, то ситуация существенно изменится.

Простейшей игрой, в которой снято второе требование, является игра двух лиц, в которой сумма всех платежей переменна. Это соответствует общественной экономике с двумя участниками и допускает как их взаимозависимость, так и переменность суммарной полезности в зависимости от их поведения [1]). В сущности, это в точности случай двусторонней монополии (см. пп. 61.2—61.6). Известная «зона неопределенности», возникающая в современных попытках решения проблемы дележа, указывает, что здесь следует искать более широкое понятие решения. Этот случай будет рассматриваться в указанных выше пунктах. Пока же мы хотим использовать его лишь в качестве своеобразного индикатора трудности и перейти к другому случаю, который более подходит в качестве основы для первого конструктивного шага.

**4.3.2.** Простейшей игрой, в которой отброшено первое требование, является игра трех лиц с равной нулю суммой всех платежей. В отличие от названной выше игры двух лиц, эта игра не соответствует никакой фундаментальной экономической проблеме, но тем не менее она представляет некоторую важную сторону человеческих отношений. Существенной ее чертой является то, что любые два игрока, объединяющиеся и дей-

---

[1]) Напомним, что мы пользуемся здесь трансферабельностью полезности. См. п. 2.1.1.

ствующие совместно против третьего, могут тем самым обеспечить себе некоторую выгоду. Проблема заключается в том, каким образом в этой комбинации распределить выгоду между обоими партнерами. Любая такая схема дележа должна будет принимать во внимание то, что объединяться могут любые два партнера; это значит, что в процессе формирования любого объединения каждый партнер должен считаться с тем, что его предполагаемый союзник может отколоться и примкнуть к третьему участнику.

Разумеется, правила игры будут предписывать, каким образом доходы коалиции должны делиться между партнерами. Однако подробное рассмотрение, которое будет приведено в п. 22.1, показывает, что такой приговор не будет, вообще говоря, окончательным. Представим себе игру (трех или более лиц), где два участника могут образовать весьма выгодную коалицию, в которой, однако, правила игры предусматривают передачу львиной доли выигрыша первому участнику. Предположим, кроме того, что второй участник этой коалиции может войти также в коалицию с третьим, менее эффективную в целом, но обещающую ему больший индивидуальный выигрыш, чем предыдущая. В этой ситуации для первого участника является, очевидно, разумным передать часть выигрыша, который он мог бы получить в первой коалиции, второму участнику с тем, чтобы спасти эту коалицию. Иными словами, можно ожидать, что в определенных условиях один участник коалиции будет согласен выплатить своему партнеру некоторую компенсацию. Таким образом, распределение доходов внутри коалиции зависит не только от правил игры, но и от указанных принципов — под влиянием других возможных коалиций [1]).

Здравый смысл подсказывает, что мы не можем ожидать каких-либо теоретических утверждений, согласно которым будут создаваться союзы [2]); речь может идти лишь об информации, касающейся того, каким образом партнеры в возможной комбинации должны делить прибыли, чтобы избежать случая, когда один из них дезертирует и образует объединение с третьим игроком. Все это будет подробно рассматриваться с количественной точки зрения в гл. V.

Здесь нам достаточно лишь сформулировать результат, который проведенные выше качественные рассуждения делают вполне правдоподобным и который будет установлен более строго в указанной главе. Разумное понятие решения сводится в этом случае к системе из трех дележей. Они соответствуют упомянутым выше трем объединениям (союзам) и выражают разделение прибылей между соответствующими союзниками.

**4.3.3.** Последний результат окажется прототипом общей ситуации. Мы увидим, что понятие решений, представляющих собой не отдельные дележи, а системы дележей, приведет к некоторой согласованной теории.

Ясно, что в описанной игре трех лиц никакой отдельный дележ, принадлежащий решению, сам по себе не представляет ничего похожего на решение. Любой конкретный союз описывает только одно конкретное соображение, завладевающее умами участников, когда они планируют свое поведение. Даже если в конечном счете некоторый конкретный союз оказывается

---

[1]) Это не означает нарушения правил игры, так как подобные компенсационные платежи, если они делаются, свободно производятся во исполнение соображений рациональности.

[2]) Очевидно, что возможны три объединения по два партнера в каждом. В примере, приводимом в § 21, любое предпочтение какого-либо конкретного союза внутри решения будет исключено из соображений симметрии. Иначе говоря, игра будет симметрична по отношению ко всем трем участникам. См., однако, п. 33.1.1.

сформированным, то на разделение доходов между союзниками будут оказывать существенное влияние другие союзы, в которые каждый из них мог бы вступить. Таким образом, только эти три объединения и их дележи образуют в совокупности некоторое разумное целое, которое определяет все свои детали и само по себе обладает устойчивостью. Именно эта совокупность является подлинно значимым объектом, гораздо более значимым, чем составляющие его дележи. Даже если один из этих дележей будет фактически осуществлен, т. е. будет фактически образовано некоторое конкретное объединение, другие дележи будут «потенциальным» образом присутствовать: хотя они и не реализовались, но они все же существенно повлияли на формирование и определение реальной действительности.

Рассматривая общую проблему, экономику общественного обмена или, что то же самое, игру с $n$ участниками, мы с оптимизмом, который может быть оправдан только последующими успехами, будем ожидать аналогичного: решение должно представлять собой систему дележей [1]), обладающую в совокупности своего рода уравновешенностью, или устойчивостью, природу которой мы еще попытаемся определить. Подчеркнем, что эта устойчивость — чем бы она в конце концов ни оказалась — будет свойством системы в целом, а не отдельных составляющих ее дележей. Наши краткие рассмотрения игры трех лиц уже проиллюстрировали это положение.

**4.3.4.** Точные критерии, характеризующие систему дележей как решение нашей проблемы, имеют, разумеется, математический характер. Поэтому за четким и исчерпывающим рассмотрением мы должны отослать читателя к последующему математическому развитию теории. Точное определение сформулировано в п. 30.1.1. Тем не менее мы дадим здесь предварительное качественное описание. Мы надеемся, что это поможет пониманию идей, на которых основано количественное рассмотрение. Кроме того, при этом более отчетливо будет обрисовано место наших рассмотрений в общей структуре социальных теорий.

### 4.4. Нетранзитивное понятие «превосходства», или «доминирования»

**4.4.1.** Вернемся к более примитивному понятию решения, которое, как мы уже знаем, должно быть отвергнуто. Мы имеем в виду идею решения как единственного дележа. Если бы решение такого рода существовало, то оно должно было бы представлять собой дележ, в некотором разумном смысле превосходящий все остальные дележи. Это понятие превосходства для дележей должно формулироваться с учетом физической и социальной структуры окружающего мира. Иначе говоря, мы должны были бы сказать, что дележ $x$ превосходит дележ $y$, если происходит следующее. Предположим, что общество, т. е. совокупность всех участников, должно рассмотреть вопрос о том, принять или отвергнуть статическое решение всех вопросов распределения, описываемое дележом $y$. Предположим, кроме того, что в этот же момент рассматривается также и альтернативное решение этого вопроса, даваемое дележом $x$. Тогда эта альтернатива $x$ будет достаточной для исключения $y$. Под этим мы понимаем то, что, с точки зрения личных интересов достаточного количества участников, $x$ является более предпочтительным, чем $y$, и они убеждены или могут быть убеждены в возможности получения выгод от дележа $x$. В этом сравнении

[1]) Они снова могут включать компенсации между партнерами в коалиции, как это описывалось в п. 4.3.2.

$x$ с $y$ на участников не должно влиять рассмотрение какого-либо третьего дележа. Иначе говоря, мы считаем отношение превосходства элементарным отношением, связывающим только два дележа $x$ и $y$. Дальнейшее сравнение трех или более — а в конечном счете и всех — дележей является предметом теории, которая должна быть построена. Она должна представлять собой как бы надстройку, воздвигнутую над элементарным понятием превосходства.

Сможет ли возможность получения определенных выгод в результате отказа от $y$ в пользу $x$, рассмотренная в этом определении, быть сделана убедительной для заинтересованных сторон,— зависит от физических фактов данной ситуации, или, говоря языком теории игр, от правил игры.

Мы предпочитаем использовать вместо термина «превосходство» с его многочисленными ассоциациями другое слово, более подходящее в качестве технического термина. Когда имеет место описанное выше отношение между двумя дележами $x$ и $y$ [1]), мы будем говорить, что *$x$ доминирует $y$*.

Если переформулировать несколько более тщательным образом то, что мы вправе ожидать от решения, состоящего из одного дележа, то можно сказать, что такой дележ должен доминировать все остальные и не должен сам доминироваться никаким другим дележом.

**4.4.2.** Понятие доминирования, сформулированное — или скорее намеченное — выше, носит, очевидно, характер некоторого упорядочения, аналогичного вопросу о предпочтении или же о размере в любой количественной теории. Понятие решения, состоящего из единственного дележа [2]), соответствует понятию первого элемента в условиях этого упорядочения [3]).

Поиск такого первого элемента был бы правдоподобным, если бы рассматриваемое упорядочение, т. е. понятие доминирования, обладало бы важным свойством транзитивности; иначе говоря, если бы из того, что $x$ доминирует $y$, а $y$ доминирует $z$, следовало бы, что $x$ доминирует $z$. В этом случае мы могли бы действовать следующим образом: начиная с произвольного $x$, искать $y$, которое доминирует $x$; если подобное $y$ существует, то взять его и искать $z$, которое доминирует $y$; если такое $z$ существует, то взять его и искать $u$, которое доминирует $z$, и т. д. В большинстве практических проблем имеются хорошие шансы на то, что либо этот процесс закончился за конечное число шагов нахождением элемента $w$, не доминируемого никаким другим, либо же последовательность $x, y, z, u, \ldots$ будет продолжаться *бесконечно*, но эти $x, y, z, u, \ldots$ будут стремиться к предельному элементу $w$, не доминируемому никаким другим. При этом, благодаря указанной выше транзитивности, окончательное $w$ будет в любом из этих случаев доминировать все ранее полученные $x, y, z, u, \ldots$

Мы не будем здесь входить в более тонкие детали, которые могли бы и должны были бы быть затронуты при более подробном рассмотрении.

---

[1]) То есть когда оно имеет место в своей математически точной форме, которая будет дана нами в п. 30.1.1.

[2]) Мы продолжаем использовать это в качестве иллюстрации, хотя выше уже было показано, что подобную надежду следует оставить навсегда. Это можно мотивировать следующим образом. Показывая, что произойдет при отсутствии некоторых осложняющих обстоятельств, мы можем взглянуть на сами эти обстоятельства с новых точек зрения. Разумеется, на данном этапе наши подлинные интересы касаются именно этих усложняющих обстоятельств, которые весьма существенны.

[3]) Математическая теория упорядочения довольно проста. Она дает более глубокое понимание этих условий, чем любое словесное рассмотрение. Необходимые математические сведения можно найти в п. 65.3.

Читателю должно быть ясно, что продвижение вдоль последовательности $x$, $y$, $z$, $u$, ... соответствует последовательным «улучшениям», завершающимся нахождением «оптимума», т. е. «первого» элемента $w$, который доминирует все остальные и не доминируется никакими другими элементами.

В случае, когда транзитивность не имеет места, положение дел становится совершенно иным. В этом случае любая попытка достижения «оптимума» путем последовательных улучшений может оказаться тщетной. Может случиться, что $x$ доминируется элементом $y$, $y$ доминируется элементом $z$, а $z$ в свою очередь доминируется элементом $x$ [1]).

4.4.3. В действительности отношение доминирования, на котором мы основываемся, не является транзитивным. В нашем пробном описании этого понятия мы указывали, что $x$ доминирует $y$, когда существует группа участников, каждый из которых предпочитает свою индивидуальную ситуацию в $x$ соответствующей ситуации в $y$, причем эти участники убеждены в том, что, действуя как одна группа, т. е. как некоторый союз, они могут провести свои предпочтения в жизнь. Подробно мы рассмотрим эти вопросы в п. 30.2. Мы будем называть эту группу участников «эффективным множеством» для доминирования $x$ над $y$. Но если $x$ доминирует $y$ и $y$ доминирует $z$, то эффективные множества для этих двух доминирований могут быть непересекающимися, и поэтому никаких заключений по поводу отношения между $z$ и $x$ сделать нельзя. Может случиться даже, что $z$ доминирует $x$ при помощи некоторого третьего эффективного множества, быть может, не пересекающегося с первыми двумя.

Это отсутствие транзитивности, особенно в приведенном выше формальном изложении, может показаться досадным усложнением. Может даже представиться желательной попытка освободить теорию от него. Однако читатель, который посмотрит на последний абзац с несколько другой точки зрения, отметит, что он содержит лишь описание в общих терминах одного в высшей степени типичного для социальных организаций явления. Соотношения доминирования между различными дележами $x$, $y$, $z$, ..., т. е. между различными состояниями общества, соответствуют различным путям, которыми они могут вывести из равновесия, т. е. расстроить планы друг друга. Тот факт, что различные группы участников, действуя в качестве эффективных множеств в различных соотношениях подобного рода, могут вызвать появление «циклических» доминирований (т. е. доминирования $y$ над $x$, $z$ над $y$ и $x$ над $z$), является в действительности одной из наиболее характерных трудностей, с которыми придется столкнуться теории этих явлений.

## 4.5. Точное определение решения

4.5.1. Таким образом, наша задача состоит в замене понятия оптимума, т. е. первого элемента, некоторым другим понятием, которое может взять на себя его функции в состоянии статического равновесия. Это становится необходимым потому, что первоначальное понятие стало несостоятельным. Впервые мы подметили его провал на конкретном примере игры трех лиц в пп. 4.3.2, 4.3.3. Однако теперь мы получили возможность более глубокого проникновения в причины его неудачности: эти причины

---

[1]) В случае транзитивности это невозможно, так как — если есть нужда в доказательстве — $x$ никогда не доминирует себя. Действительно, если, скажем, $y$ доминирует $x$, $z$ доминирует $y$ и $x$ доминирует $z$, то из транзитивности мы можем заключить, что $x$ доминирует $x$.

заключаются в самой природе нашего понятия доминирования и особенно в его нетранзитивности.

Этот тип отношения вовсе не является присущим исключительно нашей проблеме. Другие его примеры хорошо известны во многих областях, и достойно сожаления, что они никогда не подвергались общему математическому рассмотрению. Мы имеем в виду все те понятия, которые носят общий характер сравнения предпочтений, «превосходства» или порядка, но не обладают транзитивностью; таковы, например, сила игроков в шахматном турнире или гандикапы в спортивных состязаниях и скачках и т. п. [1]).

**4.5.2.** Обсуждение игры трех лиц в пп. 4.3.2, 4.3.3 показало, что решение будет, вообще говоря, уже не единственным дележом, а некоторым множеством дележей. Иначе говоря, нам придется заменить понятие первого элемента понятием множества элементов (дележей) с надлежащими свойствами. При подробном рассмотрении этой игры в § 32 (см. также ее интерпретацию в п. 33.1.1, в которой обращается внимание на некоторые отклонения) мы дадим точный вывод с помощью системы постулатов из п. 30.1.1 той системы трех дележей, которая была введена в качестве решения игры трех лиц в пп. 4.3.2, 4.3.3. Эти постулаты будут весьма сходны с постулатами, характеризующими первый элемент. Разумеется, они представляют собой условия, налагаемые на некоторое множество элементов (дележей); однако если это множество окажется состоящим только из одного элемента, то наши постулаты перейдут в характеризацию первого элемента в общей системе всех дележей.

Пока что мы не будет вдаваться в детальное обоснование этих постулатов; однако мы сформулируем их сейчас же в надежде, что читатель найдет их достаточно правдоподобными. В следующих абзацах мы приведем некоторые мотивы качественного характера или, точнее говоря, одну возможную интерпретацию предлагаемых постулатов.

**4.5.3.** Наши постулаты заключаются в следующем. Множество $S$ элементов (дележей) является решением, если оно обладает следующими двумя свойствами.

(4:A:a) Ни одно $y$, содержащееся в $S$, не доминируется каким бы то ни было $x$, содержащимся в $S$.

(4:A:b) Любое $y$, не содержащееся в $S$, доминируется некоторым $x$, содержащимся в $S$.

(4:A:a) и (4:A:b) можно сформулировать в виде одного условия:

(4:A:c) Элементами $S$ являются в точности те элементы, которые не доминируются элементами самого $S$ [2]).

Читатель, который заинтересуется упражнением подобного рода, может теперь проверить наше предыдущее утверждение о том, что для множества $S$, состоящего из одного элемента $x$, написанные выше условия

[1]) Некоторые из этих задач рассматривались математически путем введения понятий случая и вероятности. Не отрицая оправданности такого подхода, мы сомневаемся, что он может привести к полному пониманию сути дела даже в этих случаях. Он оказался бы совершенно непригодным в нашем рассмотрении социальных организаций.

[2]) Таким образом, (4:A:c) эквивалентно совокупности (4:A:a) и (4:A:b). Недостаточно искушенному в математике читателю это может показаться несколько запутанным, хотя в действительности это утверждение представляет собой непосредственное выражение довольно простых идей.

представляют собой точное выражение того факта, что $x$ является первым элементом.

4.5.4. Часть беспокойства, которое приведенные выше постулаты могут внушить с первого взгляда, вызвана, вероятно, их «круговым» характером. Это особенно очевидно в условии (4:A:c), в котором элементы множества $S$ характеризуются некоторым отношением, в свою очередь зависящим от $S$. Весьма существенно не допускать недоразумений относительно значения этого обстоятельства.

Так как наши определения для $S$ (4:A:a) и (4:A:b) или (4:A:c) являются «круговыми», т. е. неявными, то вовсе не очевидно ни существование удовлетворяющего им множества $S$, ни, в случае его существования, его единственность. В действительности эти вопросы, остающиеся на этом этапе без ответа, являются основным предметом последующей теории. Ясно, однако, что эти определения недвусмысленным образом говорят, является ли любое конкретное множество $S$ решением или нет. Если настаивать на придании к определяемому понятию еще и свойств существования и единственности, то мы должны сказать следующее. Мы дали не определение $S$, а определение некоторого свойства $S$ — мы не определили решение, но охарактеризовали все возможные решения. Содержит ли совокупность всех очерченных таким образом решений в точности одно множество $S$, несколько таких множеств или же ни одного — этот вопрос является предметом дальнейших исследований [1]).

## 4.6. Интерпретация нашего определения в терминах «норм поведения»

4.6.1. Единственный дележ представляет собой часто используемое и хорошо понимаемое понятие экономической теории, тогда как множества дележей, к рассмотрению которых мы пришли, являются довольно непривычными объектами. Поэтому желательно увязать их с какими-либо понятиями, занимающими вполне определенное место в наших рассуждениях, касающихся общественных явлений.

Действительно, представляется, что рассматриваемые нами множества дележей $S$ соответствуют «нормам поведения», связанным с общественной организацией. Рассмотрим это утверждение более подробно.

Пусть нам дан физический базис общественной экономики или, говоря более широко, общества [2]). В соответствии с традициями и опытом человеческие существа придерживаются некоторого характерного способа приспособления самих себя к подобным обстоятельствам. Он заключается не только в установлении некоторой жесткой системы распределения, т. е. дележа, но и в некотором многообразии альтернатив, которые будут выражать некоторые общие принципы, но тем не менее отличаться друг от друга многими конкретными чертами [3]). Система дележей описывает «установленный порядок общества», или «принятую норму поведения».

[1]) По-видимому, излишне говорить, что «круговой» характер или, точнее говоря, неявность (4:A:a) и (4:A:b) или (4:A:c) вовсе не означает, что они являются простыми тавтологиями. Разумеется, они выражают весьма серьезное ограничение на $S$.

[2]) В случае игры это попросту означает, как мы уже говорили, что заданы правила игры. Однако для проведения нашей параллели более полезным оказывается сравнение с общественной экономикой. Поэтому мы предлагаем читателю на время забыть аналогию с играми и рассуждать целиком в терминах общественной организации.

[3]) Могут представиться крайние, или, говоря математическим языком, «вырожденные» частные случаи, когда вся система отличается столь исключительной простотой, что может быть реализовано одно жесткое распределение. Однако представляется законным исключить их из рассмотрения, как нетипичные.

Очевидно, никакая случайная группировка дележей не сможет служить такой «нормой поведения»: она должна будет удовлетворять определенным условиям, характеризующим ее как некоторый возможный порядок вещей. Ясно, что это понятие возможности должно предусматривать условия устойчивости. Читатель, несомненно, заметит, что наш подход, развитый в предыдущих пунктах, выдержан целиком в этом духе. Множества $S$ дележей $x$, $y$, $z$, . . . соответствуют тому, что мы теперь называем «нормами поведения», а условия (4:A:a) и (4:A:b) или (4:A:c), характеризующие решение $S$, как раз и выражают устойчивость в указанном выше смысле.

**4.6.2.** Разделение нашего условия на (4:A:a) и (4:A:b) оказывается в этом случае особенно подходящим. Напомним, что доминирование $y$ со стороны $x$ означает, что включение в рассмотрение дележа $x$ исключает принятие дележа $y$; при этом вовсе не предсказывается, какой дележ будет в конечном счете принят — ср. пп. 4.4.1 и 4.4.2. Таким образом, (4:A:a) выражает тот факт, что норма поведения свободна от внутренних противоречий: никакой дележ $y$, принадлежащий $S$ (т. е. согласующийся с «принятой нормой поведения»), не может отменяться (т. е. доминироваться) другим дележом $x$ того же типа. С другой стороны, условие (4:A:b) выражает, что «норма поведения» может быть использована для дискредитации любой не согласующейся с нормами процедуры: любой дележ $y$, не принадлежащий $S$, может отменяться (т. е. доминироваться) некоторым дележом $x$, принадлежащим $S$.

Отметим, что в п. 4.5.3 мы не постулировали, что дележ $y$, принадлежащий $S$, не должен доминироваться каким-либо дележом $x$ [1]). Разумеется, если это произойдет, то в силу (4:A:a) $x$ должен будет лежать вне $S$. В терминологии общественных организаций это означает, что дележ $y$, согласующийся с «принятой нормой поведения», может отменяться другим дележом $x$; однако в этом случае можно с уверенностью сказать, что сам дележ $x$ с этими нормами не согласуется [2]). Из других наших требований следует, что $x$ в свою очередь отменяется некоторым третьим дележом $z$, который снова будет согласовываться. Так как дележи $y$ и $z$ согласуются с нормами поведения, $z$ не может отменить $y$ — дальнейшая иллюстрация нетранзитивности отношения доминирования. Таким образом, наши решения $S$ соответствуют тем «нормам поведения», которые обладают внутренней устойчивостью: если только они приняты, они аннулируют все остальное, причем никакая их часть не может быть аннулирована в рамках принятых норм. Это, очевидно, совпадает с положением вещей в реальных общественных организациях, чем еще раз подтверждается приемлемость кругового характера наших условий из п. 4.5.3.

**4.6.3.** Мы уже упоминали одно важное возражение, сознательно отложив его анализ. Именно ни существование, ни единственность решения $S$ в смысле условий (4:A:a) и (4:A:b) или (4:A:c) из п. 4.5.3 не являются очевидными или хотя бы установленными.

Разумеется, в том, что касается существования, нельзя идти ни на какие уступки. Если бы оказалось, что требования, предъявляемые нами к решению $S$, в каком-то частном случае невыполнимы, то это, разумеется,

---

[1]) Можно показать (см. (31:M) в п. 31.2.3), что подобный постулат, вообще говоря, не может выполняться. Иначе говоря, ни в одном из представляющих реальный интерес случаев невозможно найти $S$, удовлетворяющее этому постулату вместе с другими нашими требованиями.

[2]) Мы временно пользуемся словом «согласующийся» (применительно к нормам поведения) в качестве синонима слов «содержащийся в $S$» и словом «отменять» в качестве синонима слова «доминировать».

потребовало бы серьезного изменения теории. Таким образом, общее доказательство существования решений для всех частных случаев [1]) является весьма желательным. Из наших дальнейших исследований будет видно, что это доказательство еще не проведено в полной общности, но что во всех рассмотренных до сих пор случаях решения были найдены.

Положение с единственностью оказывается совершенно иным. Часто упоминавшийся выше «круговой» характер наших требований делает неединственность решений в общем случае весьма вероятной. Действительно, в большинстве случаев мы будем сталкиваться с множественностью решений [2]). С учетом того, что было сказано выше об интерпретации решений как устойчивых «норм поведения», эта множественность имеет простой и вполне разумный смысл. Именно, в одних и тех же физических условиях можно построить различные «установленные порядки общества», или «принятые нормы поведения», причем все они будут обладать рассмотренными выше характеристиками внутренней устойчивости. Так как это понятие устойчивости носит «внутренний» характер — т. е. действует лишь в предположении, что рассматриваемые нормы поведения являются общепринятыми,— то эти различные нормы поведения вполне могут оказаться противоречащими друг другу.

4.6.4. Наш подход следовало бы сравнить с широко распространенным мнением о том, что построение социальной теории возможно лишь на основе некоторых априорных принципов, касающихся целеустремленности общества. Эти принципы должны охватывать количественные утверждения как относительно целей, которых нужно в конечном счете достигнуть, так и относительно пропорционального распределения между индивидуумами. Если эти принципы приняты, то возникает простая задача максимизации.

Отметим, что никакое провозглашение принципов не является само по себе удовлетворительным, а приводимые в его пользу аргументы сводятся либо к внутренней устойчивости, либо к еще менее четко определенным видам желательности. Последнее главным образом касается вопросов распределения.

О мотивировках последнего типа можно сказать немногое. Наша задача заключается не в определении того, что должно произойти при следовании некоторому набору произвольных априорных принципов, а в исследовании того, где лежит равновесие сил.

Что же касается мотивировок первого типа, то наша цель состояла в придании этим аргументам точной и удовлетворительной формы в отношении как глобальных целей, так и индивидуальных распределений. Это привело к необходимости рассмотрения всего вопроса о внутренней устойчивости как самостоятельной проблемы. Теория, являющаяся непротиворечивой в этом отношении, не может не дать нам точной картины полного взаимодействия экономических интересов, влияний и сил.

## 4.7. Игры и общественные организации

4.7. Теперь может оказаться своевременным возобновить аналогию с играми, которую мы намеренно скрывали в предыдущих пунктах (см. сноску 2 на стр. 66). Параллелизм между решениями в смысле п. 4.5.3, с одной стороны, и устойчивыми «нормами поведения», с другой, может

[1]) В терминологии теории игр — для любого числа участников и для любых возможных правил игры.

[2]) Одно интересное исключение приведено в п. 65.8.

быть использован для подтверждения различных утверждений в обоих направлениях. По крайней мере мы надеемся, что это предложение будет иметь для читателя некоторую привлекательность. Мы считаем, что математическая теория стратегических игр сильно выигрывает в своей правдоподобности благодаря тому соответствию, которое существует между игровыми понятиями и понятиями общественных организаций. С другой стороны, почти любое утверждение относительно организации общества, которое мы (или кто-либо другой) высказывали до сих пор, имеет своим источником существующее мнение. Большинство же мнений в силу самой природы вещей до сих пор вряд ли могло быть доказано или опровергнуто в рамках социальной теории. Поэтому большой помощью для нас является то, что все наши утверждения могут быть подкреплены конкретными примерами из теории стратегических игр.

В сущности, в этом и заключается один из стандартных приемов при использовании моделей в физических науках. Эта двусторонняя процедура выявляет некоторую существенную функцию моделей, не подчеркивавшуюся при их рассмотрении в п. 4.1.3.

Проиллюстрируем сказанное. Вопрос о том, возможно ли наличие нескольких устойчивых «порядков общества», или «норм поведения», основанных на одних и тех же физических данных, является весьма дискуссионным. Мало надежды на то, что он будет выяснен обычными методами. Одна из главных причин этого — чрезвычайная сложность поставленной проблемы. Однако мы приведем конкретные примеры игр трех или четырех лиц, в которых игра обладает несколькими решениями в смысле п. 4.5.3. Мы увидим, что некоторые из этих примеров оказываются моделями определенных простых экономических задач (см. § 62).

### 4.8. Заключительные замечания

**4.8.1.** В заключение нам остается сделать несколько замечаний более формального характера.

Начнем со следующего соображения. Исходным пунктом наших рассмотрений был единственный дележ, который первоначально являлся количественным экстрактом из более сложного комбинаторного набора правил. Отсюда мы были вынуждены перейти к множествам дележей $S$, которые при определенных условиях выступали в качестве решений. Так как представляется, что эти решения не обязательно будут единственными, полный ответ на любую конкретную задачу будет заключаться не в нахождении решения, а в определении множества всех решений. Таким образом, объект, который мы ищем в любой конкретной задаче, в действительности представляет собой множество множеств дележей. Само по себе это может показаться неестественно усложненным; кроме того, не видно никакой гарантии того, что этот процесс не придется продолжить дальше. По поводу этих сомнений достаточно сказать следующее. Во-первых, математическая структура теории стратегических игр дает формальное обоснование нашей процедуры. Во-вторых, обсуждавшиеся ранее связи с «нормами поведения» (соответствующими множествам дележей), а также множественность «норм поведения» в тех же физических условиях (что отвечает множествам множеств дележей) делают именно такую степень усложненности желательной.

Нашу интерпретацию множеств дележей как «норм поведения» можно подвергнуть критике. В пп. 4.1.2 и 4.1.4 мы ввели более элементарное понятие, которое может произвести на читателя впечатление непосред-

ственной формулировки «нормы поведения». Это было предварительное комбинаторное понятие решения как набора правил для каждого участника, говорящих ему, как вести себя в любой возможной ситуации в игре. (Затем из этих правил в качестве некоторого их количественного резюме извлекался единственный дележ.) Однако столь простую точку зрения на «норму поведения» можно проводить лишь в играх, в которых коалиции и компенсации между партнерами по коалиции не играют роли (см. п. 4.3.2), так как описанные выше правила не предусматривают подобных возможностей. Существуют игры, в которых коалиции и компенсации можно не принимать во внимание: таковы, например, игры двух лиц с нулевой суммой, упоминавшиеся в п. 4.2.3, и более общие «несущественные» игры, которые будут рассматриваться в п. 27.3 и в (31:P) из п. 31.2.3. Однако общие, типичные игры, в частности, все существенные проблемы экономики общественного обмена, не могут рассматриваться без этих приемов. Таким образом, те же аргументы, которые заставили нас рассматривать множества дележей вместо отдельных дележей, вынуждают нас отвергнуть такое узкое понимание «нормы поведения». В действительности мы будем называть эти наборы правил «стратегиями» игры.

4.8.2. Следующий вопрос, заслуживающий упоминания, касается статического или динамического характера теории. Мы весьма настойчиво повторяем, что наша теория является целиком статической. Несомненно, динамическая теория была бы более полной и поэтому более предпочтительной. Однако другие отрасли науки с полной очевидностью показывают, что попытки построения такой теории до полного проникновения в статическую сторону вопроса являются тщетными. С другой стороны, читатель может оспаривать некоторые проводившиеся нами в ходе наших рассмотрений соображения, носящие отчетливо выраженный динамический характер. Это относится, в частности, ко всем рассуждениям, касающимся взаимодействия различных дележей под влиянием «доминирования» (см. п. 4.6.2). Мы считаем, что это вполне законно. Статическая теория рассматривает состояния равновесия [1]. Существенной характеристикой состояния равновесия является отсутствие тенденций к изменениям, иначе говоря, равновесие не приводит к динамическому развитию. Разумеется, анализ этой стороны вопроса немыслим без использования определенных элементарных динамических понятий. Здесь важно то, что они являются элементарными. Иными словами, для создания настоящей динамики, исследующей точные движения, обычно являющиеся далекими от состояний равновесия, требуется гораздо более глубокое понимание этих динамических явлений [2,3]).

4.8.3. Отметим, наконец, один вопрос, в котором теория общественных явлений, по-видимому, весьма существенно разойдется с существующими образцами математической физики. Разумеется, это лишь некоторая догадка, ибо здесь преобладает еще полная неясность.

---

[1]) Динамическая теория рассматривает также неравновесные состояния, даже если они иногда и называются состояниями «динамического равновесия».

[2]) Разумеется, это противопоставление статики и динамики вовсе не является построением специально для данного случая. Читатель, знакомый, например, с механикой, узнает в нем переформулировку известных черт классической механической теории статики и динамики. Сейчас мы утверждаем лишь, что это является общей характеристикой любого научного подхода, включающего силы и изменения состояний.

[3]) Динамические понятия, входящие в рассмотрение состояний статического равновесия, параллельны «виртуальным перемещениям» в классической механике. Здесь читатель может вспомнить также наши замечания о «возможном существовании» в п. 4.3.3.

Наша статическая теория определяет состояния равновесия, т. е. решения в смысле п. 4.5.3, представляющие собой множества дележей. Динамическая теория, когда она будет построена, вероятно, будет описывать изменения в терминах более простых понятий, например отдельного дележа, имеющего место в рассматриваемый момент времени, или чего-либо аналогичного. Это показывает, что формальная структура этой части теории — соотношение между статикой и динамикой — может существенно отличаться от положения дел в классических физических теориях [1]).

Все эти соображения еще раз иллюстрируют нам, сколь сложных теоретических форм мы можем ожидать от социальных теорий. Уже наш статический анализ сделал необходимым создание идейного и формального аппарата, совершенно отличного от используемого, например, в математической физике. Так, мы убедились, что общепринятая точка зрения на решение как на единственным образом определенное число или систему чисел является для наших целей слишком узкой, несмотря на ее успех в других областях. Представляется, что в отношении математического аппарата главенствующая роль должна принадлежать уже не теории дифференциальных уравнений, пронизывающей всю математическую физику, а комбинаторике и теории множеств.

---

[1]) Особенно от классической механики. Аналогии, подобные приводившимся в сноске 2 на стр. 70, здесь уже не имеют места.

*Глава II*

# ОБЩЕЕ ФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ИГР

## § 5. ВВЕДЕНИЕ

### 5.1. Перенесение центра внимания с экономики на игры

**5.1.** Из рассуждений гл. I должно стать ясно, что теория рационального поведения, т. е. теория оснований экономики и основных механизмов социальных организаций, требует глубокого изучения «стратегических игр». Следовательно, теперь мы должны рассматривать теорию игр как независимый предмет. При изучении ее как самостоятельной проблемы наши исходные позиции необходимо должны претерпеть серьезный сдвиг. В гл. I наши основные интересы лежали в области экономики. Лишь убедившись в невозможности продвижения в этом вопросе без предварительного основательного проникновения в игровые проблемы, мы постепенно подошли к формулировкам и задачам, которые являются частью этого предмета. Тем не менее экономические точки зрения оставались в гл. I преобладающими. Начиная с настоящей главы, мы, однако, должны будем рассматривать игры как таковые. Поэтому нас не будет особенно беспокоить то, что некоторые рассматриваемые нами вопросы вообще не будут иметь связей с экономикой,— в противном случае было бы невозможно отдать должное самой теории. Разумеется, большинство основных понятий будет уже знакомо нам по экономической литературе (см. следующий п. 5.2), хотя детали при этом часто будут чуждыми для экономики и, как обычно, могут загромождать изложение и затемнять ведущие принципы.

### 5.2. Общие принципы классификации и подхода

**5.2.1.** Некоторые аспекты стратегических игр, которые уже стали играть существенную роль в последних параграфах гл. I, не будут затрагиваться на начальных этапах предпринимаемых нами рассуждений. Точнее говоря, вначале мы не будем упоминать о коалициях между игроками и о компенсациях, которые они друг другу выплачивают. (Относительно этих понятий см. пп. 4.3.2 и 4.3.3 из гл. I.) Причины этого мы сейчас вкратце рассмотрим; это прольет также некоторый свет на наш общий подход к предмету.

Одним из важных признаков при классификации игр является следующий: равна или не равна нулю сумма всех выплат, получаемых всеми игроками в конце игры. Если эта сумма равна нулю, то мы можем сказать, что игроки платят только друг другу и что никакого создания или уничтожения благ не происходит. Именно таковы все игры, в которые играют для развлечения. Однако большинство экономически содержательных схем существенно отличается от описанной. В этих схемах сумма всех платежей — совокупный общественный продукт — будет, вообще говоря, отлична от нуля и может даже не быть постоянной. Иначе говоря, она будет зависеть от поведения игроков, т. е. участников общественной экономики. Это различие уже упоминалось в п. 4.2.1, особенно в сноске 5 на стр. 59. Мы будем называть игры первого из названных типов играми с нулевой суммой, а игры второго типа — играми с ненулевой суммой.

В первую очередь мы построим теорию игр с нулевой суммой; в дальнейшем, однако, будет найдена возможность рассматривать с ее помощью все без исключения игры. Именно, мы покажем, что общую игру $n$ лиц (в частности, и игру с переменной суммой) можно свести к игре $n+1$ лица с нулевой суммой. (По этому поводу см. п. 56.2.2.) После этого теория игр $n$ лиц с нулевой суммой будет строиться на основе частного случая игры двух лиц с нулевой суммой (см. п. 25.2). Поэтому мы начнем наше исследование с теории таких игр; это будет проделано в гл. III.

Итак, в играх двух лиц с нулевой суммой коалиции и компенсации не могут играть никакой роли [1]). Проблемы, существенные для этих игр, носят иной характер. Основные вопросы заключаются в следующем. Каким образом каждый игрок планирует свои действия, иначе говоря, как сформулировать точное понятие стратегии? Какая информация доступна каждому игроку на любом этапе игры? Какую роль играет информированность игрока о стратегии другого игрока? Что можно сказать о теории этой игры в целом?

**5.2.2.** Разумеется, все эти вопросы существенны в любых играх и при любом количестве игроков, в том числе и тогда, когда для них оказываются доступными коалиции и компенсации. Однако, как покажут наши последующие рассмотрения, для игр двух лиц с нулевой суммой только эти вопросы и представляют интерес. С другой стороны, важность всех этих вопросов уже признана в экономике; однако мы считаем, что в теории игр они возникают более элементарным образом. Поэтому они могут быть совершенно точно рассмотрены и, как мы надеемся показать, разрешены. Вместе с тем в процессе этого исследования нам будет выгодно (с чисто технической точки зрения) опираться на образы и примеры, довольно далекие от экономической области и принадлежащие, строго говоря, к области игр в общепринятом понимании этого слова. Таким образом, в дальнейшем будут преобладать иллюстрации, заимствованные из шахмат, игры в орлянку, покера, бриджа и т. п., а не из структуры картелей, рынков, олигополий и т. п.

Здесь уместно также напомнить, что мы считаем все расчеты в конце игры чисто денежными, иначе говоря, всем игрокам приписываются побуждения, связанные исключительно с денежной прибылью. Смысл этого допущения анализировался в терминах понятия полезности в п. 2.1.1 из гл. I. Пока что — особенно для игр двух лиц с нулевой суммой, которые будут рассматриваться сначала (см. обсуждение в п. 5.2.1),— это упрощающее предположение является совершенно необходимым. Мы будем придерживаться его в большей части нашей теории, хотя далее будут рассмотрены и некоторые его варианты (см. гл. XII и особенно § 66).

**5.2.3.** Наша первая задача состоит в точном определении того, что составляет игру. Пока понятие игры не описано с абсолютной математической точностью, мы не можем ожидать получения точных и исчерпывающих ответов на вопросы, сформулированные в конце п. 5.2.1. Хотя нашей ближайшей целью будет, как это объяснялось в п. 5.2.1, построение

---

[1]) Единственное вполне удовлетворительное «доказательство» этого утверждения состоит в построении полной теории всех игр двух лиц с нулевой суммой без использования этих понятий. Это будет проделано в гл. III, причем основной результат будет приведен в § 17. Однако и из соображений здравого смысла ясно, что «соглашения» и «коалиции» здесь не могут играть роли. Действительно, любое такое объединение должно охватывать хотя бы двух игроков — в данном случае всех игроков, — для которых сумма всех платежей тождественно равна нулю. Иначе говоря, при этом уже не остается противников и не представляется возможным сформулировать какие-либо цели.

теории игр двух лиц с нулевой суммой, все же представляется нецелесообразным ограничивать точное описание составляющих игру компонент именно этим случаем. Следовательно, мы можем начать с описания общей игры $n$ лиц. Здесь мы попытаемся отразить все мыслимые тонкости и усложнения, которые могут возникнуть в игре, за исключением явно несущественных. Встав на этот путь, мы за несколько последовательных шагов придем к довольно сложной, но исчерпывающей и математически точной схеме. Затем мы увидим, что эту общую схему можно заменить существенно более простой, являющейся тем не менее полной и строго эквивалентной исходной схеме. Кроме того, математический прием, который приводит к такому упрощению, также имеет непосредственное значение для нашей теории: он заключается во введении точного понятия стратегии.

Следует отдавать себе отчет в том, что этот обходный маневр, ведущий в конечном счете от сложных формулировок проблемы к значительно более простой, является неизбежным. Необходимо прежде всего показать, что все мыслимые усложнения приняты во внимание и что используемый математический аппарат действительно обеспечивает эквивалентность сложного построения простому.

Все сказанное может быть и должно быть проделано для всех игр, с любым числом игроков. Однако после того, как эта цель будет во всей своей общности достигнута, следующая задача нашей теории будет заключаться, как уже упоминалось, в нахождении полного решения для игры двух лиц с нулевой суммой. В связи с этим в настоящей главе будут рассматриваться все игры, а в следующей — только игры двух лиц с нулевой суммой. После анализа этих игр и рассмотрения некоторых важных примеров мы снова начнем расширять объект исследования — сначала до игр $n$ лиц с нулевой суммой, а затем до всех игр вообще.

Коалиции и компенсации появятся вновь только на дальнейших этапах.

## § 6. УПРОЩЕННОЕ ПОНЯТИЕ ИГРЫ

### 6.1. Объяснение технических терминов

**6.1.** До того, как давать точное определение комбинаторного понятия игры, следует прежде всего уяснить использование основных терминов. Некоторые фундаментальные для изучения игр понятия используются в повседневном языке весьма двусмысленным образом. Описывающие их слова иногда употребляются в одном смысле, иногда в другом, а подчас, что хуже всего, они используются как синонимы. Поэтому мы должны ввести определенное использование технических терминов и строго придерживаться его в дальнейшем.

Во-первых, следует различать абстрактное понятие *игры* и индивидуальные *партии* этой игры. Игра представляет собой попросту совокупность описывающих ее правил. Каждый конкретный пример разыгрывания игры некоторым конкретным образом от начала и до конца представляет собой партию [1]).

[1]) Во многих спортивных играх партии называются в обиходе играми. В бридже партия соответствует робберу, в теннисе — сету; к сожалению, в этих играх некоторые компоненты партии снова называются играми. Французская терминология совершенно недвусмысленна: «игра» = «jeu», «партия» = «partie».

Во-вторых, следует проводить соответствующее различие и для ходов, которые служат составляющими элементами игры. Ход представляет собой возможность выбора между различными альтернативами, производимого либо одним из игроков, либо некоторым случайным устройством, в условиях, точно определяемых правилами игры. *Ход* является не чем иным, как этой абстрактной «возможностью» с соответствующими деталями описания, т. е. некоторой компонентой *игры*. Конкретная альтернатива, выбранная в конкретной ситуации, т. е. в конкретной *партии*, называется *выбором*. Таким образом, ходы относятся к выборам точно таким же образом, как игра — к партии. Игра состоит из последовательности ходов, а партия — из последовательности выборов [1].

Наконец, *правила* игры не следует смешивать со *стратегиями* игроков. Точные определения будут приведены позднее, но подчеркиваемое нами различие должно быть ясно с самого начала. Каждый игрок выбирает свою стратегию (т. е. общие принципы, которым подчинены его выборы) свободно. В то время как любая конкретная стратегия может быть хорошей или плохой — при условии, что эти понятия могут быть интерпретированы точным образом (см. пп. 14.5 и 17.8—17.10),— принятие или непринятие этой стратегии полностью находится в распоряжении игрока. Правила игры, однако, представляют собой абсолютные предписания. Если они когда-либо нарушаются, то, по определению, все мероприятие уже перестает быть игрой, описываемой этими правилами. Во многих случаях нарушение правил игры невозможно даже физически [2].

### 6.2. Элементы игры

**6.2.1.** Рассмотрим теперь игру $n$ игроков $\Gamma$. Для краткости игроки будут обозначаться через $1, \ldots, n$. Привычные представления говорят нам о том, что эта игра представляет собой некоторую последовательность ходов; мы будем предполагать, что как число, так и чередование этих ходов заданы с самого начала. Впоследствии мы увидим, что эти ограничения не являются в действительности существенными и могут быть без труда сняты. Пока что обозначим фиксированное число ходов игры $\Gamma$ через $\nu$; оно является целым числом: $\nu = 1, 2, \ldots$ Сами ходы обозначим через $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_\nu$; предположим, что они уже выписаны в том хронологическом порядке, в котором они согласно предписанию должны выполняться.

Каждый ход $\mathcal{M}_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, \nu$, в действительности состоит из ряда альтернатив, среди которых происходит выбор, составляющий ход $\mathcal{M}_\varkappa$. Обозначим число этих альтернатив через $\alpha_\varkappa$, а сами альтернативы — через $\mathcal{A}_\varkappa(1), \ldots, \mathcal{A}_\varkappa(\alpha_\varkappa)$.

Ходы могут быть двух типов. *Ходы первого типа*, или *личные ходы*, представляют собой выборы, производимые конкретным игроком, т. е. зависящие от свободного решения последнего и больше ни от чего. *Ходы второго типа*, или *случайные ходы*, представляют собой выборы, зависящие от некоторого механического устройства, которое производит свои выборы

---

[1]) В этом смысле применительно к шахматам мы говорили бы о первом ходе и о выборе «e2—e4».

[2]) Например, в шахматах правила игры запрещают ставить короля под шах. Это запрещение носит столь же абсолютный характер, как, скажем, запрещение ходить пешками по горизонтали. Однако поставить короля на поле, на котором противник может заматовать его следующим ходом, было бы попросту неразумно, хотя это правилами и не запрещается.

случайным образом с некоторыми вероятностями [1]. Таким образом, для каждого личного хода должно быть указано, решение какого игрока определяет этот ход,— иначе говоря, чей это ход. Обозначим рассматриваемого игрока (т. е. его номер) через $k_\varkappa$. Таким образом, $k_\varkappa = 1, \ldots, n$. Условимся полагать для случайного хода $k_\varkappa = 0$. В этом случае должны быть заданы вероятности различных альтернатив $\mathcal{A}_\varkappa(1), \ldots, \mathcal{A}_\varkappa(\alpha_\varkappa)$. Мы обозначим эти вероятности [2] соответственно через $p_\varkappa(1), \ldots, p_\varkappa(\alpha_\varkappa)$.

**6.2.2.** Выбор в ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ состоит в указании некоторой альтернативы из $\mathcal{A}_\varkappa(1), \ldots, \mathcal{A}_\varkappa(\alpha_\varkappa)$, т. е. ее номера $1, \ldots, \alpha_\varkappa$. Обозначим выбранное таким образом число через $\sigma_\varkappa$. Таким образом, этот выбор характеризуется числом $\sigma_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$. Партия в целом описывается указанием всех выборов, соответствующих всем ходам $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_\nu$. Иначе говоря, она описывается последовательностью $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$.

Правила игры Г должны указать, каким будет исход партии для каждого игрока $k = 1, \ldots, n$, если партия описывается данной последовательностью $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$. Иначе говоря, должно быть известно, какие выигрыши получает каждый игрок при окончании партии. Обозначим выигрыш для $k$-го игрока через $\mathcal{F}_k$ ($\mathcal{F}_k > 0$, если игрок $k$ получает выигрыш, $\mathcal{F}_k < 0$, если он сам должен платить, и $\mathcal{F}_k = 0$, если ни то, ни другое не имеет места). Таким образом, каждое $\mathcal{F}_k$ должно быть задано как функция от $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$:

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Подчеркнем еще раз, что правила игры Г определяют функцию $\mathcal{F}_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)$ лишь как функцию [3], т. е. как абстрактную зависимость $\mathcal{F}_k$ от переменных $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$. Но каждое $\sigma_\varkappa$ представляет собой переменную с областью изменения $1, \ldots, \alpha_\varkappa$. Указание конкретных численных значений для $\sigma_\varkappa$, т. е. выбор конкретной последовательности $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$, не является частью игры Г. Оно является, как мы отмечали выше, заданием партии.

## 6.3. Информация и предварение

**6.3.1.** Наше описание игры Г пока что не является полным. Нам еще не удалось включить в него сведения о состоянии информации каждого игрока при каждом решении, которое он должен принять, т. е. при наступлении очереди его личного хода. Поэтому мы сейчас обратимся к этому вопросу.

---

[1] Например, сдача карт из надлежащим образом растасованной колоды, бросание кости и т. п. Сюда можно включить даже некоторые игры, основанные на силе и умении, в которых «стратегия» играет определенную роль, например, футбол или теннис. Действия игроков в этих играх до некоторой степени являются личными ходами, т. е. зависят от их свободного решения, а в остальном являются ходами случайными, причем соответствующие вероятности служат характеристиками рассматриваемого игрока.

[2] Поскольку $p_\varkappa(1), \ldots, p_\varkappa(\alpha_\varkappa)$ являются вероятностями, они необходимо представляют собой неотрицательные числа. Так как они соответствуют несовместным и единственно возможным альтернативам, их сумма (для любого фиксированного $\varkappa$) должна быть равна единице. Таким образом,

$$p_\varkappa(\sigma) \geqq 0, \quad \sum_{\sigma=1}^{\alpha_\varkappa} p_\varkappa(\sigma) = 1.$$

[3] Систематическое рассмотрение понятия функции дано в п. 13.1.

Лучше всего проводить это рассмотрение, прослеживая ходы $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_\nu$ по мере осуществления соответствующих выборов.

Сосредоточим поэтому наше внимание на некотором конкретном ходе $\mathcal{M}_\varkappa$. Если $\mathcal{M}_\varkappa$ является случайным ходом, то прибавить больше нечего: выбор производится случайным образом, ничья воля и ничье знание других вещей не могут на него повлиять. Однако, если $\mathcal{M}_\varkappa$ является личным ходом игрока $k_\varkappa$, то весьма важным является состояние информации этого игрока в процессе формирования его решения относительно $\mathcal{M}_\varkappa$, т. е. формирования его выбора $\sigma_\varkappa$.

Единственное, о чем он может быть информирован, это о выборах, соответствующих ходам, которые предшествуют $\mathcal{M}_\varkappa$, т. е. ходам $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{\varkappa-1}$. Иначе говоря, он может знать значения $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$. Но он может всего этого и не знать. Важной особенностью игры Г является объем информации относительно $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$, которой игрок $k_\varkappa$ располагает в момент, когда ему предстоит выбрать $\sigma_\varkappa$. Вскоре мы выясним на нескольких примерах природу подобных ограничений.

Простейший тип правил, описывающих состояние информации игрока $k_\varkappa$ при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$, заключается в следующем. Указывается множество $\Lambda_\varkappa$, состоящее из некоторых чисел, взятых из $\lambda = 1, \ldots, \varkappa - 1$. Принимается, что игрок $k_\varkappa$ знает значения $\sigma_\lambda$, если $\lambda$ принадлежит $\Lambda_\varkappa$, и совершенно не располагает информацией относительно $\sigma_\lambda$ при любом другом $\lambda$.

Если $\lambda$ принадлежит $\Lambda_\varkappa$, то будем говорить, что $\lambda$ *предваряет* $\varkappa$. Отсюда следует, что $\lambda$ принимает одно из значений $1, \ldots, \varkappa - 1$, т. е. $\lambda < \varkappa$; однако обратное заключение не обязательно будет верно. Иными словами, если рассматривать вместо $\lambda$ и $\varkappa$ соответствующие ходы $\mathcal{M}_\lambda$ и $\mathcal{M}_\varkappa$, то можно сказать, что из предварения следует предшествование [1]), но обратное может быть и неверным.

6.3.2. Несмотря на свой несколько ограничительный характер, понятие предварения заслуживает более подробного рассмотрения. Рассматриваемое как само по себе, так и в своем отношении к предшествованию (см. последнюю сноску), оно дает почву для возникновения различных комбинаторных возможностей. Эти возможности имеют различный смысл в тех играх, в которых они возникают; сейчас мы проиллюстрируем их на нескольких примерах особенно характерных ситуаций.

## 6.4. Предварение, транзитивность и сигнализация

6.4.1. Мы начнем со следующего замечания. Существуют игры, в которых предварение и предшествование совпадают. Например, ими будут те игры, в которых игрок $k_\varkappa$, совершающий свой личный ход $\mathcal{M}_\varkappa$, информирован об исходах выборов на всех предшествующих ходах $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{\varkappa-1}$. Типичным представителем этого класса игр с «полной» информацией являются шахматы. Обычно считается, что подобные игры носят особенно рациональный характер. В § 15, особенно в п. 15.7, мы увидим, в каком смысле можно точно интерпретировать это утверждение.

Шахматы обладают еще и той характерной чертой, что все ходы в этой игре являются личными. Однако отмеченное выше свойство, т. е. эквивалентность предварения и предшествования, можно сохранить даже в играх, в которых производятся случайные ходы. Примером такой игры

[1]) Во времени, т. е. $\lambda < \varkappa$ означает, что $\mathcal{M}_\lambda$ происходит перед $\mathcal{M}_\varkappa$.

является трик-трак[1]). Можно высказать некоторые сомнения по поводу того, не нарушает ли наличие случайных ходов «рационального характера» игр, упомянутых в связи с предыдущими примерами.

В п. 15.7.1 мы увидим, что этого не произойдет, если придерживаться некоторого весьма правдоподобного толкования этого «рационального характера». Неважно, являются ли все ходы личными или нет; существенным является совпадение предварения и предшествования.

6.4.2. Рассмотрим теперь игры, в которых из предшествования не следует предварения. Так бывает, когда игрок $k_\varkappa$, делающий свой личный ход $\mathcal{M}_\varkappa$, не информирован обо всем происшедшем ранее. Существует обширный класс игр, в которых это имеет место. Эти игры обычно содержат как случайные, так и личные ходы. Обычно считается, что эти игры носят смешанный характер: хотя их исход существенно зависит от случая, сильное влияние на него оказывают также и стратегические способности игроков.

Удобными примерами являются покер и бридж. Эти две игры показывают также, какие характерные черты понятия предварения могут обнаружиться, если оно обособлено от понятия предшествования. Этот момент, по-видимому, заслуживает несколько более подробного рассмотрения.

Предшествование, т. е. хронологическое упорядочение ходов, обладает свойством транзитивности[2]). В наших же примерах предварение не обязано быть транзитивным. Действительно ни в покере, ни в бридже это не так, и условия, при которых это имеет место, довольно характерны.

Рассмотрим в связи с этим покер. Пусть $\mathcal{M}_\mu$ — случайный ход, состоящий в сдаче игроку 1 его карт; $\mathcal{M}_\lambda$ — первая ставка игрока 1, его личный ход; $\mathcal{M}_\varkappa$ — первая последующая ставка игрока 2, личный ход второго игрока. Тогда $\mathcal{M}_\mu$ предваряет $\mathcal{M}_\lambda$ и $\mathcal{M}_\lambda$ предваряет $\mathcal{M}_\varkappa$, но $\mathcal{M}_\mu$ не предваряет $\mathcal{M}_\varkappa$[3]). Таким образом, мы встретили нетранзитивность, но в ней участвуют оба игрока. Действительно, на первый взгляд может показаться неправдоподобным, что предварение может оказаться в какой-либо игре нетранзитивным по отношению к личным ходам одного и того же игрока. Для этого требовалось бы, чтобы этот игрок между ходами $\mathcal{M}_\lambda$ и $\mathcal{M}_\varkappa$ «забывал» исход выбора, связанного с $\mathcal{M}_\mu$[4]). Трудно представить себе, каким путем могло бы реализоваться или тем более вынуждаться подобное забывание. Тем не менее следующий наш пример иллюстрирует именно эту ситуацию.

Обратимся к бриджу. Хотя в бридже участвуют четыре игрока, которых можно обозначить через *А*, *Б*, *В*, *Г*, эту игру следует считать игрой двух лиц. Действительно, *А* и *В* образуют объединение, которое является более чем добровольной коалицией; то же относится к игро-

[1]) Случайными ходами в трик-траке являются бросания кости, определяющие общее число клеток, на которое могут продвинуться шашки каждого игрока. Личными ходами являются решения о распределении общего числа продвижений, разрешенных данному игроку, между его шашками. Личным ходом является также решение игрока о распределении возможностей при выпадении дубля. Во всяком случае, на каждом ходе исходы выборов всех предшествующих ходов видны на доске всем.

[2]) Это значит, что если $\mathcal{M}_\mu$ предшествует $\mathcal{M}_\lambda$, а $\mathcal{M}_\lambda$ предшествует $\mathcal{M}_\varkappa$, то $\mathcal{M}_\mu$ предшествует $\mathcal{M}_\varkappa$. Особые случаи, когда наличие или отсутствие транзитивности имело серьезное значение, анализировались в пп. 4.4.2 и 4.6.2 из гл. I в связи с отношением доминирования.

[3]) Иначе говоря, игрок 1 делает свою первую ставку, зная свои собственные карты; игрок 2 делает свою первую ставку, зная предыдущий торг игрока 1; однако в то же время игрок 2 не знает карт игрока 1.

[4]) Мы предполагаем, что $\mathcal{M}_\mu$ предваряет $\mathcal{M}_\lambda$ и $\mathcal{M}_\lambda$ предваряет $\mathcal{M}_\varkappa$, но $\mathcal{M}_\mu$ не предваряет $\mathcal{M}_\varkappa$.

кам *Б* и *Г*. Для игрока *А* объединение с *Б* или *Г* вместо объединения с *В* было бы «жульничеством» в том же самом смысле, в каком было бы жульничеством подглядывание в карты игрока *Б* или ход не в масть. Иначе говоря, это было бы нарушением правил игры. Если три (или более) игрока играют в покер, то вполне допустимо для двух (или более) из них, если их интересы параллельны, объединиться против оставшегося игрока. Однако в бридже должны объединяться игроки *А* и *В* и аналогично *Б* и *Г*, в то время как объединение *А* и *Б* запрещено. Естественный способ описания этого факта состоит в обозначении *А* и *В* одним игроком 1, а *Б* и *Г* — одним игроком 2. Можно привести следующую равносильную формулировку: бридж является игрой двух лиц, но оба игрока 1 и 2 не действуют в нем самостоятельным образом. Игрок 1 действует посредством своих представителей *А* и *В*, а игрок 2 — посредством своих представителей *Б* и *Г*.

Рассмотрим теперь представителей *А* и *В* игрока 1. Правила игры ограничивают их общение, т. е. обмен информацией между ними. Например, пусть $\mathcal{M}_\mu$ — случайный ход, состоящий в сдаче игроку *А* его карт, $\mathcal{M}_\lambda$ — первая карта, с которой ходит *А*, т. е. личный ход игрока 1; $\mathcal{M}_\varkappa$ — карта, с которой ходит при розыгрыше этой взятки *В*, т. е. личный ход игрока 1. Тогда $\mathcal{M}_\mu$ предваряет $\mathcal{M}_\lambda$, и $\mathcal{M}_\lambda$ предваряет $\mathcal{M}_\varkappa$, но $\mathcal{M}_\mu$ не предваряет $\mathcal{M}_\varkappa$ [1]). Таким образом, мы снова сталкиваемся с нетранзитивностью, но на этот раз она относится уже только к одному игроку. Отметим, что нужное нам «забывание» хода $\mathcal{M}_\mu$ между ходами $\mathcal{M}_\lambda$ и $\mathcal{M}_\varkappa$ было достигнуто здесь путем «раздвоения личности» игрока 1 на *А* и *В*.

**6.4.3.** Приведенные примеры показывают, что нетранзитивность отношения предварения соответствует хорошо известной компоненте практической стратегии, а именно возможности «сигнализации». Если при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ не имеется никаких сведений о $\mathcal{M}_\mu$, но оказывается возможным наблюдать при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ исход хода $\mathcal{M}_\lambda$, а на $\mathcal{M}_\lambda$ оказывает влияние $\mathcal{M}_\mu$ (из-за знания об исходе $\mathcal{M}_\mu$), то $\mathcal{M}_\lambda$ в действительности является сигналом от $\mathcal{M}_\mu$ к $\mathcal{M}_\varkappa$, т. е. некоторым косвенным носителем информации. Теперь могут возникнуть две противоположные ситуации в зависимости от того, являются ли $\mathcal{M}_\lambda$ и $\mathcal{M}_\varkappa$ ходами одного и того же игрока или двух различных игроков.

В первом случае, который, как мы видели, имеет место в бридже, интересы игрока (который есть $k_\lambda = k_\varkappa$) лежат в содействии «сигнализации», т. е. в распространении информации «в пределах своей фирмы». Это стремление находит свою реализацию в широкой системе «условных сигналов» в бридже [2]). Они являются частями стратегии, а не правил игры (см. п. 6.1) и, следовательно, могут варьироваться [3]), в то время как сама игра в бридж остается неизменной.

Во втором случае, который, как мы видели, имеет место в покере, интересы игрока (теперь мы имеем в виду игрока $k_\lambda$; заметим, что здесь

---

[1]) Иначе говоря, *А* ходит со своей первой карты, зная собственные карты; *В* участвует в разыгрывании этой взятки, зная первую карту, с которой пошел *А*; в то же время *В* не знает имеющихся у *А* карт.

[2]) Отметим, что эта «сигнализация» считается в бридже абсолютно честной, если только она осуществляется путем действий, которые для этого предусмотрены правилами игры. Например, вполне допустимо, чтобы игроки *А* и *В* (две составляющих игрока 1, см. п. 6.4.2) договорились — до начала партии! — о том, что «начальный торг» на два козыря указывает на слабость других мастей. Однако недопустимо, т. е. является жульничеством, указывать на слабость своих карт путем интонаций голоса при торге или постукивания по столу.

[3]) Они могут быть даже различными для двух игроков, т. е. для *А* и *В*, с одной стороны, и *Б* и *Г* — с другой. Однако «в пределах фирмы» одного игрока они должны совпадать.

уже $k_\lambda \neq k_\varkappa$) лежат в предотвращении этой «сигнализации», т. е. получения информации противником $k_\varkappa$. Это обычно достигается путем беспорядочного и на первый взгляд нелогичного поведения при совершении выбора на ходе $\mathscr{M}_\lambda$. Оно делает для противника затруднительным извлечение из наблюдаемого исхода $\mathscr{M}_\lambda$ информации относительно исхода $\mathscr{M}_\mu$, о котором у него нет никаких непосредственных сведений. Иначе говоря, эти действия делают «сигнал» ненадежным и двусмысленным. В п. 19.2.1 мы увидим, что в действительности в этом и заключается функция блефа в покере[1]).

Мы будем называть эти две процедуры *прямой* и *обратной сигнализацией*. К этому стоит добавить, что обратная сигнализация, т. е. сбивание противника с толку, имеет место почти во всех играх, включая бридж. Так происходит потому, что она основана на нетранзитивности предварения в случае нескольких игроков. С другой стороны, прямая сигнализация является более редкой: покер, например, не содержит ни малейшего намека на нее. Действительно, как мы уже отмечали выше, из нее следует нетранзитивность предварения, когда мы имеем дело только с одним игроком. Иначе говоря, она требует надлежащим образом урегулированной «забывчивости» этого игрока, которая достигается в бридже путем «расщепления» игрока на два лица.

Во всяком случае, бридж и покер представляются достаточно характерными примерами этих двух типов нетранзитивности — соответственно при прямой и обратной сигнализации.

Оба типа сигнализации приводят к деликатной проблеме разумного их сочетания при фактическом разыгрывании игры, т. е. при попытках нахождения «хороших», «рациональных» способов игры. Всякая попытка сигнализировать больше или меньше, чем этого требует «бесхитростная» игра, неизбежно приводит к отклонениям от «бесхитростного» способа игры. А это обычно оказывается возможным лишь ценой определенных затрат, т. е. прямыми последствиями здесь являются убытки. Таким образом, задача состоит в том, чтобы установить эту дополнительную сигнализацию на таком уровне, при котором ее преимущества — передача или сокрытие информации — перевесили бы непосредственно вызываемые ею потери. Чувствуется, что это приводит к чему-то похожему на поиск оптимума, хотя все это никоим образом не является четко определенным. Мы увидим, каким образом теория игр двух лиц уже позаботилась об этой проблеме; она будет подробно рассмотрена на одном характерном примере, представляющем собой упрощенную форму покера (см. § 19).

Отметим, наконец, что все важные примеры нетранзитивности предварения доставляются нам играми, содержащими случайные ходы. Это довольно странно, поскольку видимой связи между этими двумя явлениями нет[2,3]). В действительности дальнейшее исследование покажет, что наличие или отсутствие случайных ходов лишь в малой мере влияет на существенные аспекты стратегий в этой ситуации.

---

[1]) И что блеф вовсе не является попыткой обеспечить себе дополнительные выигрыши — в любом прямом смысле,— имея на руках слабую карту. См. указанный пункт.

[2]) См. соответствующий случай, разобранный в п. 6.4.1, когда предварение совпадает с предшествованием и является поэтому транзитивным. Как было там упомянуто, наличие или отсутствие случайных ходов в этом случае несущественно.

[3]) Довольно важный в этой связи пример дается игрой в орлянку. Эта игра вместе с некоторыми родственными ей играми рассматривается в § 18.

# § 7. ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ ПОНЯТИЯ ИГРЫ

## 7.1. Переменность характеристик каждого хода

**7.1.1.** В п. 6.2.1 мы ввели $\alpha_\varkappa$ альтернатив $\mathcal{A}_\varkappa(1), \ldots, \mathcal{A}_\varkappa(\alpha_\varkappa)$ хода $\mathcal{M}_\varkappa$, а также индекс $k_\varkappa$, характеризующий ход как личный или как случайный и в первом случае определяющий того игрока, чья очередь ходить, а во втором — задающий вероятности $p_\varkappa(1), \ldots, p_\varkappa(\alpha_\varkappa)$ указанных выше альтернатив. В п. 6.3.1 мы описали понятие предварения с помощью множеств $\Lambda_\varkappa$, представляющих собой множество всех тех $\lambda$ (из значений $\lambda = 1, \ldots, \varkappa - 1$), которые предваряют $\varkappa$. Мы не указали, однако, зависят ли все эти объекты — $\alpha_\varkappa$, $k_\varkappa$, $\Lambda_\varkappa$ и $\mathcal{A}_\varkappa(\sigma)$, $p_\varkappa(\sigma)$ для $\sigma = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$ — только от $\varkappa$ или также и от других вещей. Разумеется, этими «другими вещами» могут быть только исходы выборов, соответствующих ходам, которые предшествуют $\mathcal{M}_\varkappa$. Иначе говоря, речь идет о числах $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$ (см. п. 6.2.2).

Эта зависимость требует более подробного рассмотрения.

Во-первых, зависимость самих альтернатив $\mathcal{A}_\varkappa(\sigma)$ (в отличие от их числа $\alpha_\varkappa$) от $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$ несущественна. Мы можем с полным основанием предположить, что выбор, соответствующий ходу $\mathcal{M}_\varkappa$, производится не среди самих альтернатив $\mathcal{A}_\varkappa(\sigma)$, а среди их номеров $\sigma$. В конце концов в выражениях, описывающих исход игры, т. е. в функциях $\mathcal{F}_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$, $k = 1, \ldots, n$ [1]), появляется только $\sigma$, соответствующее ходу $\mathcal{M}_\varkappa$, т. е. $\sigma_\varkappa$ (см. п. 6.2.2).

Во-вторых, все зависимости от $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$, которые имеют место, когда $\mathcal{M}_\varkappa$ оказывается случайным ходом, т. е. когда $k_\varkappa = 0$ (см. конец п. 6.2.1), не вызывают никаких усложнений. Они не препятствуют нашему анализу поведения игроков. Это относится, в частности, ко всем вероятностям $p_\varkappa(\sigma)$, так как они возникают только в связи со случайными ходами. С другой стороны, множества $\Lambda_\varkappa$ при случайных ходах никогда не появляются.

В-третьих, мы должны рассмотреть зависимости $\alpha_\varkappa$, $k_\varkappa$, $\Lambda_\varkappa$ от $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$, когда $\mathcal{M}_\varkappa$ оказывается личным ходом [2]). Теперь эта возможность действительно является источником затруднений. К тому же возможность эта весьма реальна [3]). Причина состоит в следующем.

**7.1.2.** Игрок $k_\varkappa$ на ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ должен быть информирован о значениях $\alpha_\varkappa$, $k_\varkappa$, $\Lambda_\varkappa$, поскольку они составляют теперь часть правил игры, которых

---

[1]) Форма и характер альтернатив $\mathcal{A}_\varkappa(\sigma)$, имеющихся на ходе $\mathcal{M}_\varkappa$, могли бы, разумеется, доставить игроку $k_\varkappa$ (если $\mathcal{M}_\varkappa$ является личным ходом) некоторую информацию о предшествующих значениях $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$, если бы $\mathcal{A}_\varkappa(\sigma)$ от них зависели. Однако любую такую информацию можно было бы определить независимым образом как информацию, имеющуюся у игрока $k_\varkappa$ при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$. Мы рассматривали простейшие схемы, относящиеся к понятию информации, в п. 6.3.1 и дополним этот анализ в п. 7.1.2. Следующее далее рассмотрение $\alpha_\varkappa$, $k_\varkappa$, $\Lambda_\varkappa$ также характерно в том, что касается роли альтернатив $\mathcal{A}_\varkappa(\sigma)$ в качестве возможных источников информации.

[2]) Произойдет ли это для данного $\varkappa$, будет зависеть само от $k_\varkappa$ и, следовательно, косвенным образом от $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$, так как оно характеризуется соотношением $k_\varkappa \neq 0$ (см. конец п. 6.2.1).

[3]) Например, в шахматах число возможных альтернатив $\alpha_\varkappa$ на ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ зависит от положения фигур, т. е. от прошлого развития партии. В бридже игроком, кладущим первую карту при разыгрывании следующей взятки, т. е. игроком $k_\varkappa$ на ходе $\mathcal{M}_\varkappa$, является тот, кто взял последнюю взятку, что зависит опять-таки от предыдущего хода партии. В некоторых вариантах покера и родственных ему игр количество информации, доступное игроку в данный момент, т. е. множество $\Lambda_\varkappa$ на ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ зависит от того, что он и другие игроки делали до этого.

он должен придерживаться. В той части, в какой они зависят от $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$, он может вывести из них определенные заключения относительно значений $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$. Но мы предположили, что он абсолютно ничего не знает о значениях $\sigma_\lambda$ для $\lambda$, не принадлежащих $\Lambda_\varkappa$! Вовсе не ясно, каким образом можно здесь избежать противоречий.

Выскажемся более точно. Противоречие не будет иметь места в следующем случае. Пусть $\Lambda_\varkappa$ не зависит ни от одного из $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$, а $\alpha_\varkappa$ и $k_\varkappa$ зависят только от $\sigma_\lambda$ для $\lambda$, принадлежащих $\Lambda_\varkappa$. Тогда игрок $k_\varkappa$ не может извлечь никакой информации из $\alpha_\varkappa$, $k_\varkappa$ и $\Lambda_\varkappa$, помимо той, которой он уже располагает (т. е. о значениях $\sigma_\lambda$ для $\lambda$ из $\Lambda_\varkappa$). Если это имеет место, то мы будем говорить, что перед нами *частная форма зависимости*.

Но всегда ли мы имеем частную форму зависимости? Возьмем крайний случай: что будет, если $\Lambda_\varkappa$ всегда пусто — т. е. если игрок $k_\varkappa$ предполагается совершенно неинформированным на ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ — и все же, скажем, $\alpha_\varkappa$ явным образом зависит от некоторых из $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$?

Это, очевидно, недопустимо. Мы должны потребовать, чтобы все количественные выводы, которые можно сделать, зная $\alpha_\varkappa$, $k_\varkappa$ и $\Lambda_\varkappa$, были бы явным образом и с самого начала определены как информация, имеющаяся у игрока $k_\varkappa$ при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$. Было бы, однако, ошибочным пытаться достичь этого путем включения в $\Lambda_\varkappa$ индексов $\lambda$ всех тех $\sigma_\lambda$, от которых $\alpha_\varkappa$, $k_\varkappa$ и $\Lambda_\varkappa$ явным образом зависят. Что касается $\Lambda_\varkappa$, то следует, прежде всего, проявить большую аккуратность, чтобы избежать кругового характера в этом требовании [1]). Но даже если эта трудность и не возникает в силу того, что $\Lambda_\varkappa$ зависит только от $\varkappa$ и не зависит от $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$, т. е. в случае, когда информация, имеющаяся у любого игрока в любой момент игры, не зависит от предыдущего течения партии, указанный выше подход может все-таки быть недопустимым. Предположим, например, что $\alpha_\varkappa$ зависит от определенной комбинации некоторых $\sigma_\lambda$ из значений $\lambda = 1, \ldots, \varkappa - 1$ и что правила игры предусматривают, что игрок $k_\varkappa$ на ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ знает значение этой комбинации, но не разрешают ему знать большего (т. е. значения индивидуальных $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$). Он может, например, знать значение $\sigma_\mu + \sigma_\lambda$, где $\mu$ и $\lambda$ предшествуют $\varkappa$ ($\mu, \lambda < \varkappa$), но ему не разрешается знать значения $\sigma_\mu$ и $\sigma_\lambda$ по отдельности.

Можно было бы испытать различные приемы сведе́ния описанной ситуации к нашей прежней, более простой схеме, которая описывает состояние информации игрока $k_\varkappa$ посредством множества $\Lambda_\varkappa$ [2]). Однако становится совершенно невозможным распутать различные компоненты информации игрока $k_\varkappa$ на ходе $\mathcal{M}_\varkappa$, если сами они происходят от личных ходов разных игроков или одного и того же игрока, но на различных этапах его информированности. В приведенном выше примере это произойдет, если $k_\mu \neq k_\lambda$ или если $k_\mu = k_\lambda$, но состояние информации этого игрока на ходах $\mathcal{M}_\mu$ и $\mathcal{M}_\lambda$ является различным [3]).

---

[1]) Те $\sigma_\lambda$, от которых, кроме всего прочего, зависит $\Lambda_\varkappa$, можно определить лишь путем рассмотрения совокупности всех $\Lambda_\varkappa$ для всех последовательностей $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$. Должно ли каждое $\Lambda_\varkappa$ содержать эти $\lambda$?

[2]) В приведенном примере можно было бы попытаться заменить ход $\mathcal{M}_\mu$ новым ходом, в котором выбирается не $\sigma_\mu$, а $\sigma_\mu + \sigma_\lambda$. Ход $\mathcal{M}_\varkappa$ остался бы неизменным. Тогда игрок $k_\varkappa$ на ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ был бы информирован об исходе выбора, связанного только с новым ходом $\mathcal{M}_\mu$.

[3]) В примере, приведенном в предыдущей сноске, это означает следующее. Если $k_\mu \neq k_\lambda$, то не существует игрока, которому может быть приписан новый ход $\mathcal{M}_\mu$ (на котором выбрано $\sigma_\mu + \sigma_\lambda$ и который должен быть личным). Если $k_\mu = k_\lambda$, но состояние информации меняется от $\mathcal{M}_\mu$ к $\mathcal{M}_\lambda$, то новому ходу $\mathcal{M}_\mu$ нельзя удовлетворительным образом приписать никакого состояния информации.

## 7.2. Общее описание

**7.2.1.** В нашем распоряжении все же имеются различные более или менее искусственные приемы, при помощи которых мы могли бы пытаться обойти эти трудности. Однако представляется, что наиболее естественный подход состоит в их принятии и в соответствующем видоизменении наших определений.

Мы сделаем это, пожертвовав множеством $\Lambda_\varkappa$, как средством описания состояния информации. Вместо этого мы опишем состояние информации игрока $k_\varkappa$ при его личном ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ явным образом, а именно путем перечисления тех функций переменных $\sigma_\lambda$, предшествующих по отношению к этому ходу, т. е. переменных $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$, численные значения которых предполагаются в данный момент известными этому игроку. Эта система функций будет обозначаться нами через $\Phi_\varkappa$.

Таким образом, $\Phi_\varkappa$ представляет собой множество функций

$$h(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}).$$

Так как элементы $\Phi_\varkappa$ описывают зависимость от $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$, само $\Phi_\varkappa$ является фиксированным, т. е. зависящим только от $\varkappa$ [1]). $\alpha_\varkappa$ и $k_\varkappa$ могут зависеть от $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$, и, поскольку их значения известны игроку $k_\varkappa$ при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$, эти функции

$$\alpha_\varkappa = \alpha_\varkappa(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}), \qquad k_\varkappa = k_\varkappa(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1})$$

должны принадлежать $\Phi_\varkappa$. Разумеется, когда оказывается, что $k_\varkappa = 0$ (для конкретного набора значений $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$), этот ход $\mathcal{M}_\varkappa$ является случайным (см. выше) и $\Phi_\varkappa$ вообще не будет использоваться. Однако это уже несущественно.

Наш предыдущий способ описания с помощью множеств $\Lambda_\varkappa$ является, очевидно, частным случаем изложенного [2]).

**7.2.2.** Читатель может сейчас ощутить некоторую неудовлетворенность тем направлением, которое приняли наши рассуждения. Действительно, этот анализ получил такую направленность из-за тех усложнений, которые возникают в конкретных и типичных играх (см. сноску 3 на стр. 81). Однако необходимость замены $\Lambda_\varkappa$ на $\Phi_\varkappa$ возникла благодаря нашему стремлению сохранить абсолютно формальную (математическую) общность. По существу, мы экстраполировали те решающие трудности (рассмотренные в п. 7.1.2 и, в частности, проиллюстрированные в приведенных там сносках), которые заставили нас предпринять этот шаг. Иначе говоря, они не были характерны для первоначальных примеров, представлявших собой действительные игры. Скажем, шахматы и бридж могут быть описаны с помощью множеств $\Lambda_\varkappa$.

Игры, требующие рассмотрения с помощью $\Phi_\varkappa$, действительно существуют. Однако в большинстве этих игр мы могли бы вернуться к множествам $\Lambda_\varkappa$ посредством различных посторонних приемов. Весь этот вопрос требует довольно тонкого анализа, вдаваться в который здесь не

[1]) Это построение допускает тем не менее возможность того, что выражаемое $\Phi_\varkappa$ состояние информации зависит от $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$. Это будет, например, тогда, когда все функции $h(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1})$ из $\Phi_\varkappa$ явным образом зависят от $\sigma_\mu$ для одного множества значений $\sigma_\lambda$, будучи независимыми от $\sigma_\mu$ для других значений $\sigma_\lambda$. Само $\Phi_\varkappa$ является все же фиксированным.

[2]) Если окажется, что $\Phi_\varkappa$ состоит из всех функций от некоторых переменных $\sigma_\lambda$ — скажем, от тех, для которых $\lambda$ принадлежит некоторому множеству $\mu_\varkappa$,— и только от них, то описание с помощью $\Phi_\varkappa$ сводится к описанию с помощью $\Lambda_\varkappa$: именно, в качестве $\Lambda_\varkappa$ нужно взять указанное множество $\mu_\varkappa$. Но мы уже видели, что в общем случае рассчитывать на существование подобного множества не приходится.

представляется целесообразным[1]). Бесспорно то, что существуют экономические модели, в которых рассмотрение $\Phi_\varkappa$ является необходимым[2]).

Однако наиболее существенный момент заключается в следующем. Преследуя поставленные перед собой цели, мы должны быть уверены в том, что все комбинаторные возможности, связанные со всеми взаимодействиями различных решений игроков, изменениями их состояний информации и т. п., нами исчерпаны. Эти проблемы широко обсуждались в экономической литературе. Мы надеемся показать, что они могут быть полностью проанализированы. Но для этого мы хотим обезопасить себя от любых возможных обвинений в том, что из-за чрезмерной специализации моделей некоторые существенные возможности нами упущены.

Кроме того, мы увидим, что все формальные элементы, вводимые нами в рассмотрение игры, не усложняют ее окончательного анализа. Иначе говоря, они усложняют только настоящий, предварительный этап формального описания. Окончательный вид задачи оказывается не зависящим от них (см. п. 11.2).

**7.2.3.** Нам еще остается рассмотреть только один вопрос, а именно сформулированное в самом начале этого обсуждения (в начале п. 6.2.1) предположение о том, что как число, так и расположение ходов заданы (т. е. фиксированы) с самого начала. Мы сейчас увидим, что это ограничение несущественно.

Рассмотрим сначала «расположение» ходов. Возможная переменность характера каждого хода, т. е. соответствующего $k_\varkappa$, была уже полностью рассмотрена (особенно в п. 7.2.1). Упорядочение ходов $\mathscr{M}_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, \nu$, было с самого начала попросту хронологическим. Таким образом, здесь обсуждать больше нечего.

Обратимся теперь к числу ходов $\nu$. Эта величина также может быть переменной, т. е. зависящей от развития партии. Описание этого переменного характера $\nu$ требует определенной аккуратности.

Замечание. Это имеет место в большинстве игр (шахматы, трик-трак, покер, бридж). В случае бриджа эта переменность появляется, во-первых, из-за переменной длины этапа торгов и, во-вторых, из-за изменяющегося числа соглашений, необходимых для завершения роббера (т. е. партии). Сложнее указать примеры игр с фиксированным $\nu$. Мы увидим, что в любой игре можно сделать $\nu$ фиксированным при помощи некоторого искусственного приема, но те игры, в которых $\nu$ фиксировано с самого начала, как правило, скучноваты.

Развитие партии характеризуется последовательностью выборов $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$ (см. п. 6.2.2). Теперь нельзя утверждать попросту, что $\nu$ может быть некоторой функцией от переменных $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$, поскольку всю последовательность $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$ нельзя представить себе, не зная наперед, какой будет ее длина $\nu$[3]). Правильной формулировкой будет

---

[1]) Мы имеем в виду карточные игры, в которых игроки могут сбросить некоторые карты, не открывая их, а впоследствии взять обратно или использовать другим образом часть сброшенных карт. Существует также игра в «закрытые шахматы», иногда называемая «морской бой», принадлежащая этому классу. Описание ее приведено в п. 9.2.3. Сошлемся на это описание. Каждый игрок знает о «возможности» предшествующих выборов другого, не зная самих этих выборов, причем эта возможность является функцией всех предшествующих выборов.

[2]) Пусть, например, некоторый участник не знает всех деталей предыдущих действий других участников, но информирован об определенных статистических характеристиках этих действий.

[3]) То есть нельзя сказать, что длина партии зависит от всех выборов, произведенных в связи со всеми ходами, так как от самой этой длины партии зависит, будут ли те или иные ходы вообще иметь место и т. д. Это рассуждение очевидным образом носит круговой характер.

следующая. Предположим, что переменные $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ выбираются одна за другой [1]). Если эта последовательность выборов осуществляется неопределенно долго, то правила игры должны в некоторый момент прервать этот процесс. Тогда то $\nu$, на котором процесс остановится, будет, разумеется, зависеть от всех выборов, сделанных к этому моменту. Это будет число ходов в данной конкретной партии.

Далее это *правило остановки* должно гарантировать нам, что любая мыслимая партия когда-нибудь закончится. Иначе говоря, должно быть невозможно расположить последовательные выборы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ таким образом (при ограничениях, приведенных в данной здесь сноске), чтобы остановка никогда не наступила. Очевидным способом гарантирования этого является создание правила остановки, обеспечивающего, что остановка произойдет до некоторого фиксированного момента, скажем до $\nu^*$. Иначе говоря, в то время как $\nu$ может зависеть от $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, наверняка будет $\nu \leqq \nu^*$, где $\nu^*$ не зависит от $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ Если это так, то мы будем говорить, что правило остановки *ограничено числом* $\nu^*$. Для рассматриваемых нами игр мы предположим, что они имеют правила остановки, ограниченные (подходящими, но фиксированными) числами $\nu^*$.

Замечание 1. Это правило остановки действительно является существенной частью любой игры. В большинстве игр легко найти фиксированную верхнюю границу $\nu^*$ для $\nu$. Иногда, однако, общепринятая форма правил игры не исключает того, что игра в отдельных исключительных условиях может продолжаться до бесконечности. Во всех подобных случаях в правила игры впоследствии были включены некоторые практические предосторожности, имеющие целью обеспечить существование границы $\nu^*$. Следует, однако, сказать, что эти предосторожности не всегда оказываются абсолютно эффективными, хотя идея их в каждом случае достаточно ясна. Если даже существуют исключительные бесконечные партии, они не имеют большого практического значения. Тем не менее будет весьма поучительным, по крайней мере с чисто математической точки зрения, рассмотреть несколько типичных примеров.

Мы приведем четыре примера, расположив их в порядке убывания эффективности.

*Экарте.* Партия представляет собой «роббер», «роббер» состоит в выигрыше двух «игр» из трех (см. сноску на стр. 74), «игра» состоит из выигрыша пяти «пунктов», а каждая «сдача» дает одному из игроков один или два пункта. Следовательно, «роббер» заканчивается не позднее, чем после трех «игр», «игра»— после самое большее девяти «сдач», и легко проверить, что «сдача» состоит из 13, 14 или 18 ходов. Следовательно, $\nu^* = 3 \cdot 9 \cdot 18 = 486$.

*Покер.* В принципе два игрока могли бы «торговаться» друг с другом до бесконечности. Поэтому к правилам обычно добавляется некоторое соглашение, ограничивающее допустимое число «переторговываний». Суммы ставок также ограничиваются, чтобы сделать число альтернатив $\alpha_\varkappa$ при этих личных ходах конечным. Это, разумеется, обеспечивает существование конечного $\nu^*$.

*Бридж.* Партия представляет собой «роббер», который мог бы продолжаться до бесконечности, если бы обе стороны (игроки) неизменно отказывались вступить в соглашение. Вполне можно себе представить, что сторона, стоящая перед опасностью проигрыша «роббера», могла бы, таким образом, неизменно препятствовать окончанию партии путем назначения абсурдно высоких ставок. На практике этого не происходит, хотя правилами игры и не предусматривается ничего, что явным образом предотвращало бы указанную возможность. Во всяком случае, теоретически в бридж должно быть введено некоторое правило остановки.

*Шахматы.* Легко построить последовательности выборов (или, придерживаясь обычной терминологии,— ходов), особенно в эндшпиле, которые могли бы продолжаться до бесконечности, не давая окончания партии, т. е. не приводя к мату. Простейшими из таких последовательностей являются периодические, т. е. бесконечные повторения одного и того же цикла выборов, хотя существуют и непериодические последовательности. Все они дают игроку, находящемуся под угрозой проигрыша,

[1]) Область изменения $\sigma_1$ есть $1, \ldots, \alpha_1$. Область изменения $\sigma_2$ есть $1, \ldots, \alpha_2$ и может зависеть от $\sigma_1$, т. е. $\alpha_2 = \alpha_2(\sigma_1)$. Область изменения $\sigma_3$ есть $1, \ldots, \alpha_3$ и может зависеть от $\sigma_1$ и $\sigma_2$, т. е. $\alpha_3 = \alpha_3(\sigma_1, \sigma_2)$. И т. д. и т. д.

весьма реальную возможность добиться в некоторых случаях ничьей. По этой причине для предотвращения указанного явления используются различные «ничейные правила», т. е. правила остановки.

Одним из известных «ничейных правил» является следующее. Любой цикл выборов (т. е. «ходов»), повторенный трижды, приводит к ничьей. Это правило не является вполне эффективным, так как оно исключает большинство бесконечных последовательностей, но не все.

Другое «ничейное правило» состоит в следующем. Если в течение 40 ходов ни одна пешка не была сдвинута с места и ни одна фигура не была взята (эти операции являются необратимыми в том смысле, что после их осуществления первоначальная позиция уже не может быть восстановлена), то партия считается закончившейся вничью. Легко видеть, что это правило эффективно, хотя соответствующее $\nu^*$ оказывается чудовищно большим.

Замечание 2. С чисто математической точки зрения можно поставить следующий вопрос. Пусть правило остановки эффективно только в том смысле, что невозможно расположить последовательные выборы $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, ... таким образом, чтобы остановка никогда не наступила. Иначе говоря, пусть всегда существует конечное $\nu$, зависящее от $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, ... Гарантирует ли это само по себе существование некоторого фиксированного конечного $\nu^*$, ограничивающего правило остановки, т. е. такого, что $\nu \leqslant \nu^*$?

Этот вопрос является весьма академическим, так как все практические правила игры имеют в виду непосредственное установление $\nu^*$. (См., однако, предыдущее замечание.) Тем не менее с математической точки зрения он весьма интересен [1]).

Теперь мы можем использовать эту границу $\nu^*$ для того, чтобы полностью избавиться от переменного характера $\nu$.

Это делается попросту путем такого расширения схемы игры, при котором всегда будут иметься $\nu^*$ ходов $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{\nu^*}$. Для любой последовательности $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, ... ничего не меняется вплоть до хода $\mathcal{M}_\nu$, а все ходы, следующие за $\mathcal{M}_\nu$, считаются фиктивными. Иначе говоря, если рассматривается ход $\mathcal{M}_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, \nu^*$, для последовательности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, где $\nu < \varkappa$, то мы делаем $\mathcal{M}_\varkappa$ случайным ходом только с одной альтернативой [2]), т. е. ходом, на котором ничего не происходит.

Таким образом, предположения, сделанные в начале п. 6.2.1, особенно предположение о том, что $\nu$ задано с самого начала, оказываются в конечном счете оправданными.

## § 8. МНОЖЕСТВА И РАЗБИЕНИЯ

### 8.1. Желательность теоретико-множественного описания игры

**8.1.** Мы получили удовлетворительное и достаточно общее описание понятия игры, которое можно теперь переформулировать с аксиоматической точностью и строгостью и сделать его тем самым основой для последующего математического изучения. Однако прежде чем к этому перейти, представляется заслуживающим внимания дать некоторую другую формулировку. Эта формулировка строго эквивалентна той, к которой мы пришли в предыдущих пунктах, но, будучи высказана в общей форме, является более единообразной и простой; кроме того, она приводит к более изящным и простым обозначениям.

Для того чтобы прийти к этой формулировке, мы должны использовать символику теории множеств — особенно разбиения — более широко, чем мы это пока делали. Это требует некоторых объяснений и иллюстраций, к которым мы сейчас и перейдем.

---

[1]) Ответ на него является утвердительным, т. е. такое $\nu^*$ всегда существует. См., например, D. König, Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche, *Acta Litt. ac. Scient, Univ. Szeged, Sect. Mat.* III/II (1927), 121—130, особенно Приложение, стр. 129—130.

[2]) Это, разумеется, означает, что $\alpha_\varkappa = 1$, $k_\varkappa = 0$ и $p_\varkappa(1) = 1$.

### 8.2. Множества, их свойства и их графическое представление

**8.2.1.** *Множеством* называется произвольная совокупность объектов (на природу и количество которых не накладывается абсолютно никаких ограничений), называемых *элементами* рассматриваемого множества. Элементы образуют и определяют множество как таковое; никакого упорядочения или отношений иного рода между ними не предполагается. Иначе говоря, если два множества $A$ и $B$ таковы, что любой элемент $A$ является также элементом $B$ и наоборот, то эти множества тождественны во всех отношениях, т. е. $A = B$. Тот факт, что $\alpha$ является элементом множества $A$, мы выражаем также, говоря, что $\alpha$ *принадлежит* $A$ [1]).

Нас будут интересовать главным образом (хотя и не всегда) только *конечные* множества, т. е. множества, состоящие из конечного числа элементов.

Пусть даны произвольные объекты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, . . .; множество, элементами которого они являются, будет обозначаться через $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$. Будет также удобно ввести множество, которое вовсе не содержит элементов,— *пустое множество* [2]). Мы будем обозначать пустое множество через $\varnothing$. В частности, мы можем образовывать множества, состоящие в точности из одного элемента,— *одноэлементные множества*. Одноэлементное множество $(\alpha)$ и его единственный элемент $\alpha$ представляют собой вовсе не одно и то же и поэтому никогда не должны смешиваться [3]).

Подчеркнем еще раз, что элементами множества могут быть любые объекты. Разумеется, мы ограничимся математическими объектами. Эти элементы вполне могут быть, например, множествами, что приведет к рассмотрению множеств множеств и т. д. Последние нередко называются, например, *системами* или *классами* множеств, хотя это и не обязательно.

**8.2.2.** Перечислим основные понятия и операции, связанные с множествами.

(8:A:a) $A$ является *подмножеством* $B$ ($B$ является *надмножеством* $A$), если любой элемент $A$ является также элементом $B$. Символически это записывается в виде $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. $A$ является *собственным* подмножеством $B$, а $B$ — собственным надмножеством $A$, если сказанное выше верно, но $B$ содержит элементы, не являющиеся элементами $A$. В символах: $A \subset B$ или $B \supset A$. Мы видим, что если $A$ является подмножеством $B$ и $B$ является подмножеством $A$, то $A = B$. (Это представляет собой переформулировку принципа, высказанного в начале п. 8.2.1.) Отметим еще, что $A$ является

---

1) Математическая литература по теории множеств весьма обширна. Мы не будем пользоваться ею в пределах, выходящих за рамки изложенного в тексте. Заинтересованный читатель найдет больше сведений по теории множеств в хорошем вводном курсе: A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, Berlin, 1928, а также в сжатой и технически превосходной книге F. Hausdorff, Mengenlehre, 2nd Edit, Leipzig, 1927 (рус. пер. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, 1937).

2) Если два множества $A$ и $B$ оба не содержат элементов, то мы можем сказать, что они содержат одни и те же элементы. Следовательно, в силу сказанного выше $A = B$. Иначе говоря, существует только одно пустое множество. Это рассуждение может показаться странным, но тем не менее оно безупречно.

3) В некоторых разделах математики $(\alpha)$ и $\alpha$ можно отождествить. Это время от времени и делается, однако такую практику следует считать нездоровой. В общем случае это, конечно, недопустимо. Пусть, например, $\alpha$ представляет собой нечто, решительно не являющееся одноэлементным множеством, например, $\alpha$ есть двухэлементное множество $(\beta, \gamma)$ или пустое множество $\varnothing$. Тогда $(\alpha)$ и $\alpha$ следует различать, так как $(\alpha)$ является одноэлементным множеством, а $\alpha$ им не является.

собственным подмножеством $B$ в том и только в том случае, когда $A$ является подмножеством $B$ и не имеет места равенство $A = B$.

(8:A:b) *Суммой* или *объединением* двух множеств $A$ и $B$ называется множество всех элементов $A$ вместе со всеми элементами $B$. Объединение $A$ и $B$ будет обозначаться через $A \cup B$. Аналогично образуются объединения более чем двух множеств [1]).

(8:A:c) *Произведением* или *пересечением* двух множеств $A$ и $B$ называется множество всех общих элементов $A$ и $B$. Пересечение $A$ и $B$ будет обозначаться через $A \cap B$. Аналогично образуются пересечения более чем двух множеств [1]).

(8:A:d) *Разностью* двух множеств $A$ и $B$ называется множество всех тех элементов $A$, которые не принадлежат $B$. Разность $A$ и $B$ будет обозначаться через $A - B$ [1]).

(8:A:e) Если $B$ является подмножеством $A$, то мы будем называть разность $A - B$ *дополнением* $B$ в $A$. Иногда будет настолько очевидным, какое множество $A$ имеется в виду, что мы будем писать просто $-B$ и говорить просто о дополнении множества $B$ без всяких дальнейших уточнений.

(8:A:f) Два множества $A$ и $B$ называются *непересекающимися* (*дизъюнктными*), если они не имеют общих элементов, т. е. если $A \cap B = \varnothing$.

(8:A:g) Система (множество) $\mathcal{A}$ множеств называется системой *попарно непересекающихся* множеств, если все пары различных элементов системы $\mathcal{A}$ представляют собой дизъюнктные множества, т. е. для $A, B \in \mathcal{A}$ из $A \neq B$ следует $A \cap B = \varnothing$.

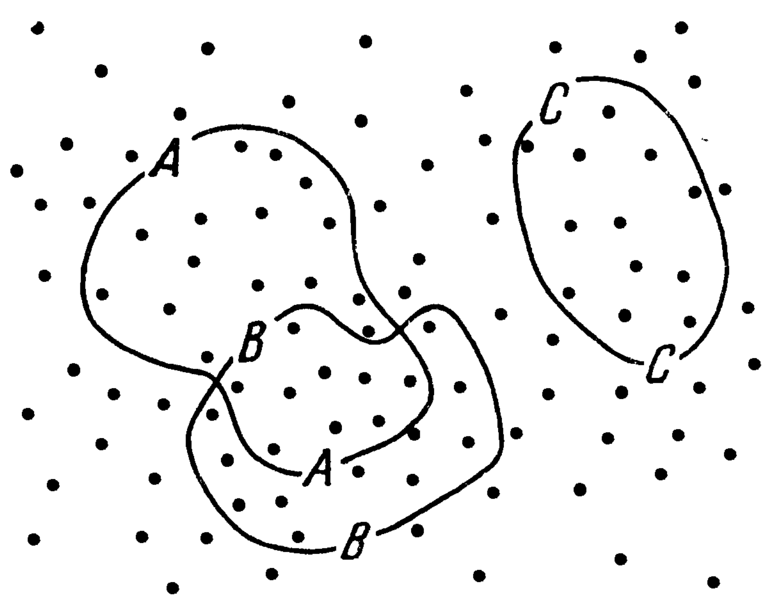


Рис. 1.

8.2.3. Здесь могут оказаться полезными некоторые графические иллюстрации.

Мы будем обозначать объекты, являющиеся в этих рассмотрениях элементами множеств, точками (рис. 1). Множество будет обозначаться путем обведения принадлежащих ему точек (элементов), причем обозначающий множество символ будет писаться в разрыве обводящей линии в одном или в нескольких местах. Изображенные на рис. 1 множества $A$ и $C$ являются непересекающимися, а множества $A$ и $B$ таковыми не являются.

С помощью этого приема можно проиллюстрировать также понятия объединений, пересечений и разности множеств (рис. 2). На этом рисунке

[1]) Эта терминология (суммы, произведения, разности) является традиционной. Она основана на некоторых алгебраических аналогиях, которые мы здесь использовать не будем. В действительности алгебра этих операций $\cup$, $\cap$, известная под названием *булевой алгебры*, имеет большой самостоятельный интерес. См., например, A. Tarski, Introduction to logic, New York, 1941, а также G. Birkhoff, Lattice theory, New York, 1940 (русский перевод: Г. Биркгоф, Теория структур, М., ИЛ, 1952). Последняя книга представляет большой интерес для понимания современного абстрактного метода. Гл. VI посвящена булевым алгебрам; там же указана дальнейшая литература.

$A$ не является подмножеством $B$, равно как и $B$ не является подмножеством $A$; следовательно, ни разность $A - B$, ни разность $B - A$ не

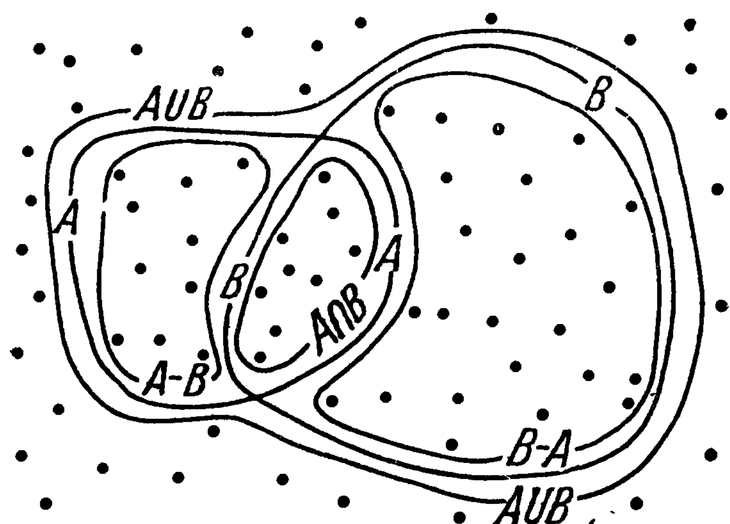


Рис. 2.

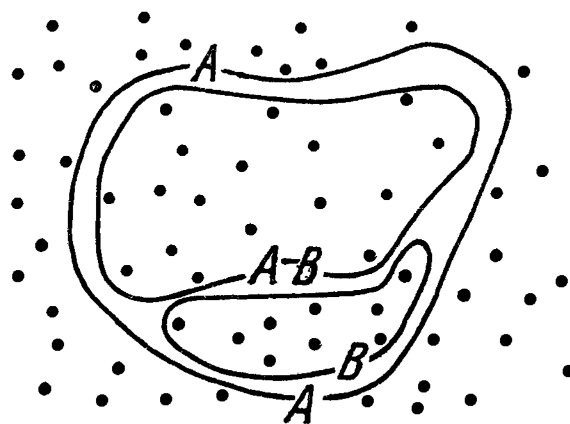


Рис. 3.

являются дополнением одного из этих множеств до другого. На следующем рисунке, однако, $B$ является подмножеством $A$, так что $A - B$ является дополнением $B$ в $A$ (рис. 3).

### 8.3. Разбиения, их свойства и их графическое представление

**8.3.1.** Пусть дано множество $\Omega$ и система множеств $\mathcal{A}$. Мы будем говорить, что $\mathcal{A}$ является *разбиением в* $\Omega$, если оно удовлетворяет следующим двум требованиям:

(8:B:a) Любой элемент $A$ системы $\mathcal{A}$ является непустым подмножеством множества $\Omega$.

(8:B:b) $\mathcal{A}$ представляет собой систему попарно непересекающихся множеств.

Это понятие также породило обширную литературу [1]).

Если даны два разбиения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то мы будем говорить, что $\mathcal{A}$ является *подразбиением* $\mathcal{B}$, если они удовлетворяют следующему условию:

(8:B:c) Любой элемент $A$ разбиения $\mathcal{A}$ является подмножеством некоторого элемента $B$ разбиения $\mathcal{B}$ [2]). Отметим, что если $\mathcal{A}$ является подразбиением $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}$ является подразбиением $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ [3]).

Сформулируем теперь следующее определение.

---

[1]) См. цитированную в сноске на стр. 88 книгу Г. Биркгофа. Наши требования (8:B:a), (8:B:b) не совпадают дословно с общепринятыми. Именно в (8:B:a) иногда не требуется, чтобы элементы $A$ системы $\mathcal{A}$ были непустыми. Действительно, нам придется сделать одно исключение в п. 9.1.3 (см. сноску 1 на стр. 95). В условии (8:B:b) обычно требуется, чтобы объединение всех элементов $\mathcal{A}$ было равно множеству $\Omega$. Для наших целей будет более удобным это требование опустить.

[2]) Так как $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ также представляют собой множества, уместно сравнить отношение «быть подмножеством» (применительно к $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$) с отношением «быть подразбиением». Легко видеть, что если $\mathcal{A}$ является подмножеством $\mathcal{B}$, то $\mathcal{A}$ является и подразбиением $\mathcal{B}$, но обратное, вообще говоря, неверно.

[3]) Доказательство. Рассмотрим некоторый элемент $A$ из $\mathcal{A}$. Он должен быть подмножеством некоторого элемента $B$ из $\mathcal{B}$, а $B$ в свою очередь — подмножеством некоторого элемента $A_1$ из $\mathcal{A}$. Таким образом, $A$ и $A_1$ имеют общие элементы (именно все элементы непустого множества $A$) и тем самым не являются дизъюнктными. Так как оба они принадлежат разбиению $\mathcal{A}$, отсюда следует $A = A_1$. Поэтому $A$ является подмножеством $B$, а $B$ — подмножеством $A$ ($= A_1$). Следовательно, $A = B$, так что $A$ принадлежит $\mathcal{B}$. Отсюда мы получаем, что $\mathcal{A}$ есть подмножество $\mathcal{B}$ (см. предыдущую сноску). Аналогично $\mathcal{B}$ является подмножеством $\mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

(8:B:d) Пусть даны два разбиения $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Образуем систему всех непустых пересечений $A \cap B$, где $A$ пробегает все элементы $\mathscr{A}$, а $B$ — элементы $\mathscr{B}$. Очевидно, мы снова получим разбиение, называемое *суперпозицией* $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ [1]).

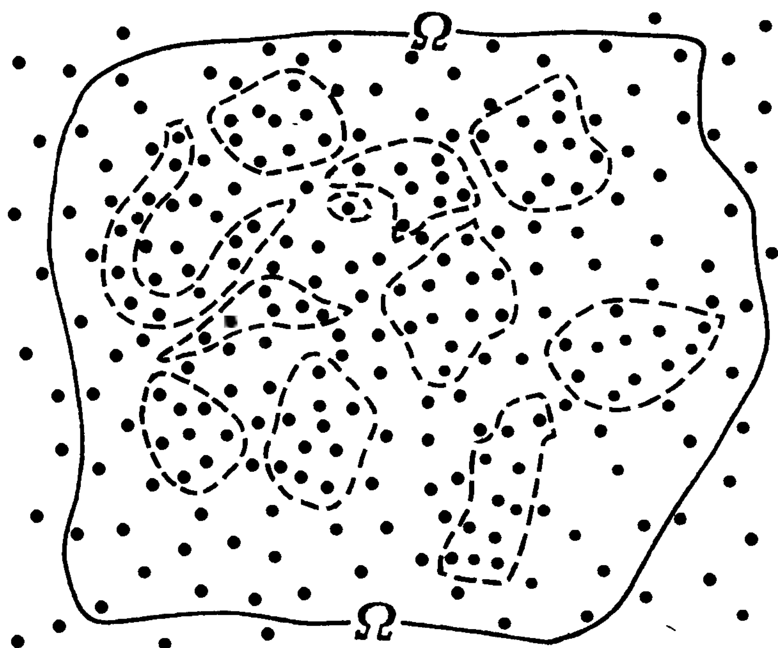



Рис. 4.

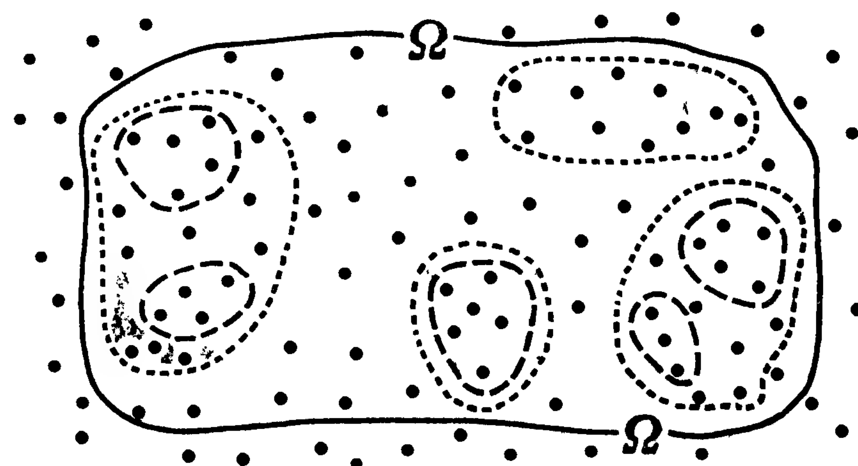



Рис. 5.

Определим, наконец, описанные выше соотношения для двух разбиений $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ *на* данном множестве $C$.

(8:B:e) $\mathscr{A}$ является *подразбиением* $\mathscr{B}$ *на* множестве $C$, если любое $A$, принадлежащее $\mathscr{A}$ и являющееся подмножеством $C$, является также подмножеством некоторого $B$, которое принадлежит $\mathscr{B}$ и является подмножеством $C$.

(8:B:f) $\mathscr{A}$ *равно* $\mathscr{B}$ *на* множестве $C$, если элементами $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ являются одни и те же подмножества множества $C$.

Очевидно, сноска 3 со стр. 89 снова применима — с соответствующими изменениями. Кроме того, определенные сейчас понятия на множестве Ω совпадают с первоначальными понятиями.

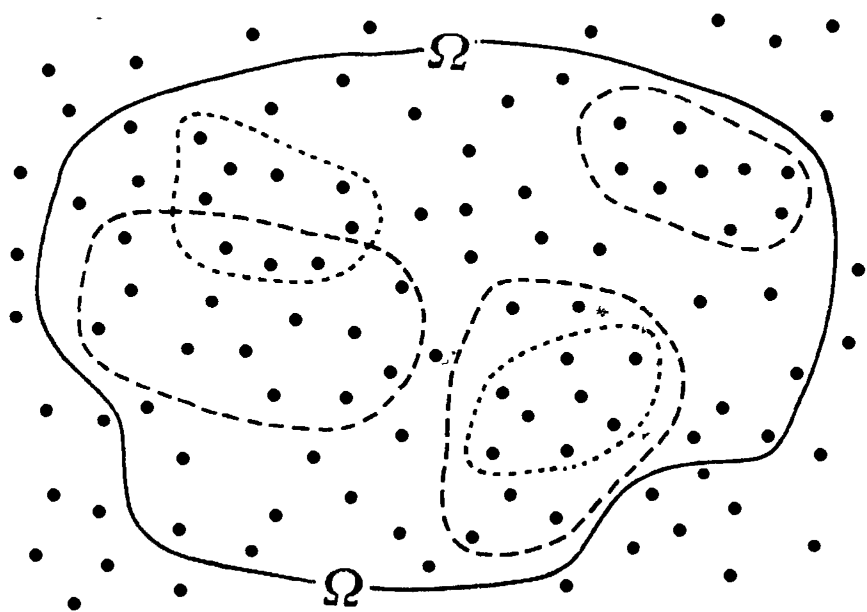



Рис. 6.

**8.3.2.** Приведем снова некоторые графические иллюстрации в смысле п. 8.2.3.

Начнем с изображения разбиения. Мы не будем обозначать элементы разбиения, представляющие собой множества, буквами, а будем обводить каждое из них пунктиром (рис. 4).

Далее мы изобразим два разбиения $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$; для различения их условимся изображать обводящие линии элементов $\mathscr{A}$ «длинным» пунктиром, а элементов $\mathscr{B}$ —«коротким» пунктиром. На рис. 5 $\mathscr{A}$ является подразбиением $\mathscr{B}$. На следующем рис. 6 $\mathscr{A}$ не является подразбиением $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}$ не является подразбиением $\mathscr{A}$. Предоставляем читателю определить суперпозицию $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ на рис. 6.

---

[1]) Легко показать, что суперпозиция разбиений $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ является подразбиением как $\mathscr{A}$, так и $\mathscr{B}$ и что любое разбиение $\mathscr{C}$, представляющее собой подразбиение как $\mathscr{A}$, так и $\mathscr{B}$, оказывается также подразбиением их суперпозиции. Отсюда происходит и название. См. гл. I и II цитированной выше книги Г. Биркгофа.

Другое, более схематичное описание разбиений можно получить, представляя множество $\Omega$ одной точкой, а любой элемент разбиения, представляющий собой подмножество $\Omega$, отрезком, идущим из этой точки вверх. Тогда разбиение $\mathcal{A}$ (рис. 5) будет представлено гораздо более простым чертежом (рис. 7). Такое представление не указывает элементов,

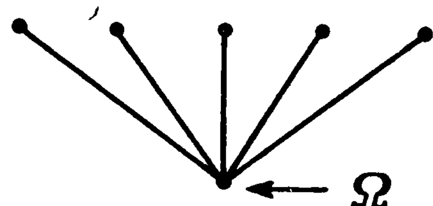



Рис. 7.

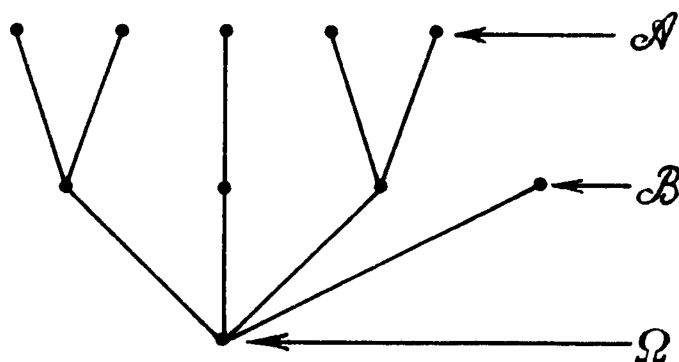



Рис. 8.

составляющих элементы разбиения, и не может быть использовано для изображения одновременно нескольких разбиений в $\Omega$, как это было проделано на рис. 6. Этот недостаток, однако, может быть устранен, если два разбиения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в $\Omega$ соотносятся так, как на рис. 5, а именно если $\mathcal{A}$ является подразбиением $\mathcal{B}$. В этом случае мы снова можем представить $\Omega$ точкой внизу, каждый элемент $\mathcal{B}$ — отрезком, идущим вверх от этой точки, как на рис. 7, а каждый элемент $\mathcal{A}$ — другим отрезком, идущим

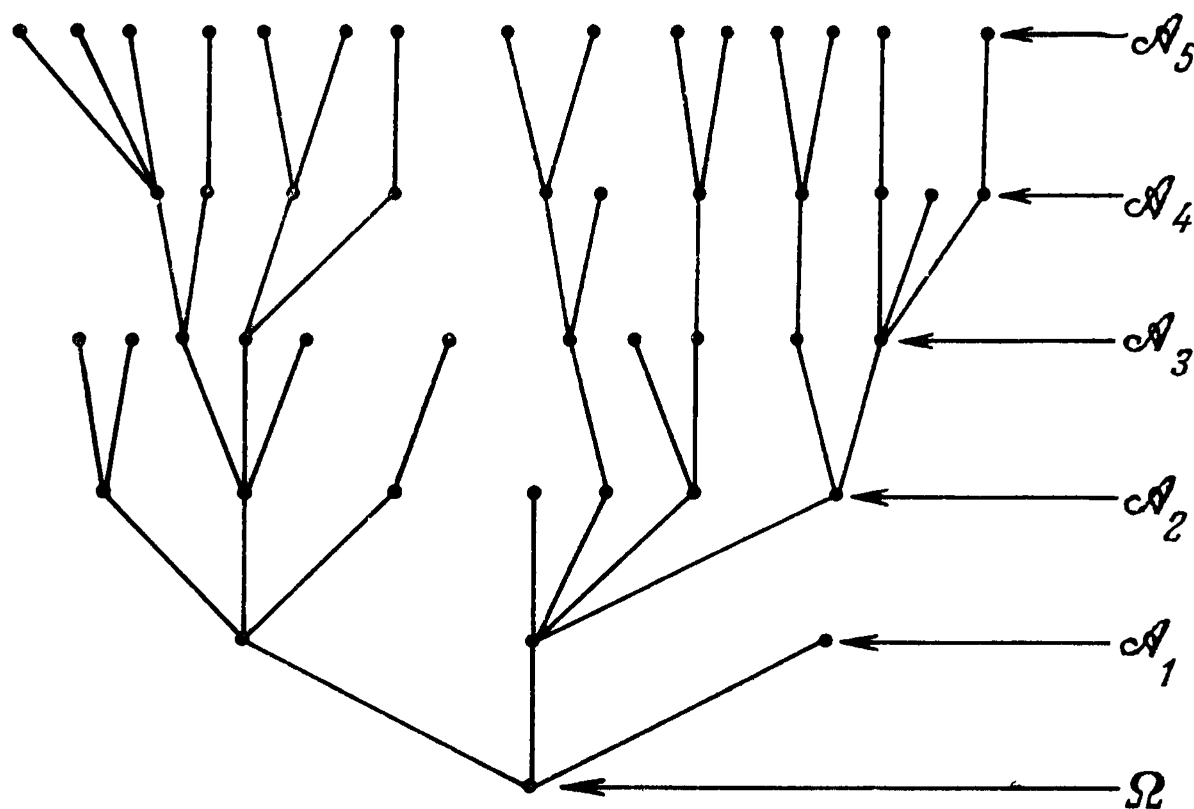



Рис. 9.

дальше вверх и начинающимся в верхнем конце того отрезка $\mathcal{B}$, который представляет элемент $\mathcal{B}$, подмножеством которого является этот элемент $\mathcal{A}$. Мы можем таким образом представить два разбиения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, изображенные на рис. 5 (см. рис. 8). Это представление опять-таки является менее наглядным, чем соответствующее ему изображение на рис. 5. Однако его простота позволяет продолжить его гораздо дальше, чем могут практически зайти картинки в духе рис. 4—6. Именно, мы можем изобразить при помощи этого приема последовательность разбиений $\mathcal{A}_1, \ldots$ $\ldots, \mathcal{A}_\mu$, в которой каждое разбиение является подразбиением своего непосредственного предшественника. На рис. 9 изображен пример для $\mu = 5$.

Конфигурации такого типа уже изучались в математике; они называются *деревьями*.

### 8.4. Логическая интерпретация множеств и разбиений

**8.4.1.** Описанные в пп. 8.2.1, 8.3.2 понятия будут полезными в последующем рассмотрении игр в силу той логической интерпретации, которая может быть им приписана.

Начнем с интерпретации множеств.

Если $\Omega$ представляет собой множество объектов любой природы, то любое мыслимое *свойство*, которым некоторые из этих объектов могут, а другие не могут обладать, можно полностью охарактеризовать указанием множества тех элементов $\Omega$, которые этим свойством обладают. Иначе говоря, если два свойства соответствуют в этом смысле одному и тому же множеству (одному и тому же подмножеству $\Omega$), то этими двумя свойствами будут обладать одни и те же элементы $\Omega$. Сказанное означает, что эти свойства *эквивалентны* в $\Omega$ в том смысле, как это понимается в логике.

Теперь уже не только свойства (элементов $\Omega$) находятся в этом простом соответствии с множествами (подмножествами $\Omega$), но и элементарные логические операции над этими свойствами оказываются находящимися в соответствии с теоретико-множественными операциями, рассмотренными нами в п. 8.2.2.

Так, *дизъюнкция* двух свойств, т. е. утверждение о том, что справедливо по крайней мере одно из них, соответствует, очевидно, образованию объединения их множеств — операции $A \cup B$. *Конъюнкция* двух свойств, т. е. утверждение о том, что оба они справедливы, отвечает образованию пересечения соответствующих множеств — операции $A \cap B$. Наконец, *отрицание* некоторого свойства, т. е. утверждение противоположного, отвечает образованию дополнения соответствующего множества, операции $-A$ [1]).

Вместо сопоставления подмножеств множества $\Omega$ свойствам объектов из $\Omega$, как это было проделано выше, мы можем равным образом сопоставить их всем возможным объемам информации, относящимся к некоторому, в остальном неопределенному, элементу из $\Omega$. Действительно, любая такая информация сводится к утверждению о том, что этот неизвестный элемент из $\Omega$ обладает определенным конкретным свойством. Эту информацию можно эквивалентным образом представить при помощи множества всех тех элементов из $\Omega$, которые этим свойством обладают; иначе говоря, при помощи множества, до которого данная информация сужает область возможного изменения этого неизвестного элемента из $\Omega$.

Отметим, в частности, что пустое множество $\varnothing$ соответствует свойству, которое никогда не имеет места, т. е. абсурдной информации. Два непересекающихся множества отвечают двум несовместным свойствам, т. е. двум взаимно исключающим объемам информации.

**8.4.2.** Обратимся теперь к разбиениям.

Возвращаясь к определениям (8:B:a) и (8:B:b) из п. 8.3.1 и переформулируя их в нашей новой терминологии, мы видим, что разбиение представляет собой систему попарно взаимно исключающих объемов информации (относительно некоторого неизвестного элемента из $\Omega$), ни один из которых не является сам по себе абсурдным. Другими словами, разбиение является предварительным сообщением, которое говорит, сколько информации будет впоследствии дано по поводу некоторого (в остальном неизвестного) элемента из $\Omega$, т. е. до какой степени будет в дальнейшем сужена

---

[1]) По поводу связей теории множеств и формальной логики см., например, гл. VIII цитированной выше книги Г. Биркгофа.

область возможного изменения для этого элемента. Однако разбиение не дает нам фактической информации — это свелось бы к выбору некоторого элемента этого разбиения, так как такой элемент является подмножеством $\Omega$, т. е. дает фактическую информацию.

Поэтому мы можем сказать, что разбиение в $\Omega$ является *информационной схемой*. Что касается подмножеств $\Omega$, то в п. 8.4.1 мы видели, что каждое из них соответствует определенной информации. Чтобы избежать путаницы с терминологией, используемой для разбиений, мы будем в этом случае (т. е. для подмножества $\Omega$) употреблять термин *фактическая информация*.

Рассмотрим теперь определение (8:B:c) из п. 8.3.1 и сопоставим его с нашей теперешней терминологией. Оно выражает для двух разбиений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в $\Omega$ смысл того утверждения, что $\mathcal{A}$ является подразбиением $\mathcal{B}$. Это сводится к утверждению о том, что информация, даваемая разбиением $\mathcal{A}$, содержит всю информацию, даваемую разбиением $\mathcal{B}$ (а возможно, еще и больше); иными словами, информационная схема $\mathcal{A}$ содержит информационную схему $\mathcal{B}$.

Эти замечания показывают значение рис. 4—9 из п. 8.3.2 в некотором новом свете. Представляется, в частности, что *дерево*, изображенное на рис. 9, описывает последовательность непрерывно возрастающих информационных схем.

## § 9. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ИГРЫ

### 9.1. Разбиения, описывающие игру

**9.1.1.** Пусть число ходов фиксировано — мы теперь знаем, что такое допущение правомерно. Обозначим это число снова через $\nu$, а сами ходы — через $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_\nu$.

Рассмотрим все возможные партии игры $\Gamma$ и составим множество $\Omega$, элементами которого они являются. Если воспользоваться описанием, данным в предыдущих пунктах, то всевозможные партии будут попросту всевозможными последовательностями $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$ [1]. Таких последовательностей существует лишь конечное число [2], так что $\Omega$ является конечным множеством.

Однако имеются также и более непосредственные пути формирования $\Omega$. Мы можем, например, образовать это множество, описывая каждую партию как последовательность $\nu + 1$ последовательных позиций, возникающих при ее протекании [3]. В общем, разумеется, не всякая позиция может следовать за данной позицией, но позиции, возможные в данный момент, ограничены предыдущими позициями некоторым специальным образом, который должен быть точно описан правилами игры [4]. Так как наше описание правил игры начинается с образования $\Omega$, может оказаться нежелательным допускать столь жесткую зависимость самого $\Omega$ от всех деталей этих правил. Отметим поэтому, что нет никаких возражений против включения в $\Omega$ также и абсурдных последовательностей позиций [5]. Таким образом, было бы вполне допустимо даже

[1]) См., в частности, п. 6.2.2. Область изменения $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$ в сноске на стр. 85.

[2]) Доказательство сразу следует из указанной выше сноски.

[3]) Перед $\mathcal{M}_1$, между $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, между $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_3$ и т. д., между $\mathcal{M}_{\nu-1}$ и $\mathcal{M}_\nu$, после $\mathcal{M}_\nu$.

[4]) Это аналогично развертыванию последовательности $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$, как оно описано в сноске на стр. 85.

[5]) То есть последовательностей, которые впоследствии окажутся запрещенными правилами игры, когда последние будут сформулированы полностью.

образовывать $\Omega$ из всех последовательностей $\nu+1$ последовательных позиций без всяких ограничений.

Наши дальнейшие описания покажут, как следует выбирать реально возможные партии из этого, возможно избыточного, множества $\Omega$.

**9.1.2.** Задавшись $\nu$ и $\Omega$, приступим к рассмотрению более сложных деталей развития партии.

Рассмотрим определенный момент в этом развитии, скажем тот, который непосредственно предшествует данному ходу $\mathcal{M}_\varkappa$. В этот момент правила игры должны давать следующие общие сведения.

Во-первых, необходимо описать, до каких пределов события, которые привели к ходу $\mathcal{M}_\varkappa$ [1], определили развитие партии. Любая конкретная последовательность этих событий сужает множество $\Omega$ до некоторого подмножества $A_\varkappa$, представляющего собой множество всех тех партий из $\Omega$, развитие которых до хода $\mathcal{M}_\varkappa$ совпадает с указанной последовательностью. В терминологии предыдущих пунктов $\Omega$ является, как отмечалось в п. 9.1.1, множеством всех последовательностей $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$; тогда $A_\varkappa$ будет множеством тех последовательностей $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$, для которых $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$ имеют данные численные значения (см. сноску 1). Однако с нашей теперешней более широкой точки зрения нам достаточно лишь указать, что $A_\varkappa$ должно быть некоторым подмножеством $\Omega$.

Теперь различные возможные развития, которые игра может принять до хода $\mathcal{M}_\varkappa$, должны быть представлены различными множествами $A_\varkappa$. Любые два таких развития, если они отличны друг от друга, порождают два совершенно различных множества партий; это значит, что никакая партия не может начаться (т. е. дойти до $\mathcal{M}_\varkappa$) обоими путями одновременно. Отсюда следует, что любые два различных множества $A_\varkappa$ должны быть дизъюнктными.

Таким образом, полные формальные возможности развития всех мыслимых партий нашей игры вплоть до хода $\mathcal{M}_\varkappa$ описываются семейством попарно непересекающихся подмножеств множества $\Omega$. Это и есть семейство всех множеств $A_\varkappa$, упомянутых выше. Мы обозначим его через $\mathcal{A}_\varkappa$.

Объединение всех множеств $A_\varkappa$, содержащихся в $\mathcal{A}_\varkappa$, должно содержать все возможные партии. Но так как мы явным образом допустили избыточность $\Omega$ (см. конец п. 9.1.1), их объединение не обязано при этом быть равным $\Omega$.

Резюмируем сказанное:

(9:A) $\mathcal{A}_\varkappa$ является разбиением в $\Omega$.

Мы могли бы сказать также, что разбиение $\mathcal{A}_\varkappa$ описывает информационную схему лица, которое знает все, что произошло до хода $\mathcal{M}_\varkappa$ [2], т. е. схему некоего *посредника*, наблюдающего за развитием партии [3].

**9.1.3.** Во-вторых, должно быть известно, какой характер будет иметь ход $\mathcal{M}_\varkappa$. Это выражается введенным в п. 6.2.1 индексом $k_\varkappa$. Именно $k_\varkappa = 1, \ldots, n$, если ход является личным и принадлежит игроку $k_\varkappa$; $k_\varkappa = 0$, если ход является случайным. $k_\varkappa$ может зависеть от развития партии до хода $\mathcal{M}_\varkappa$, т. е. от информации, заключенной в $\mathcal{A}_\varkappa$ [4]. Это означает, что $k_\varkappa$

[1] Иначе говоря, выборы, связанные с предшествующими ходами $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{\varkappa-1}$, т. е. численные значения $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$.

[2] То есть исходы всех выборов, связанных с ходами $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{\varkappa-1}$, или, в нашей прежней терминологии, значения $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$.

[3] Введение такого лица необходимо, так как, вообще говоря, ни один игрок не располагает всей заключенной в $\mathcal{A}_\varkappa$ информацией.

[4] В обозначениях п. 7.2.1 и в духе предыдущих сносок можно сказать, что $k_\varkappa = k_\varkappa(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1})$.

на каждом множестве $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$ должно быть постоянным, но что оно может меняться от одного $A_\varkappa$ к другому.

Соответственно мы можем образовать для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$ множество $B_\varkappa(k)$, которое содержит все множества $A_\varkappa$ для $k_\varkappa = k$, причем различные $B_\varkappa(k)$ дизъюнктны. Таким образом, $B_\varkappa(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, образуют семейство непересекающихся подмножеств множества $\Omega$. Обозначим это семейство через $\mathcal{B}_\varkappa$.

(9:B) $\mathcal{B}_\varkappa$ снова является *разбиением в* $\Omega$. Так как каждое $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$ является подмножеством некоторого $B_\varkappa(k)$ из $\mathcal{B}_\varkappa$, разбиение $\mathcal{A}_\varkappa$ является *подразбиением* $\mathcal{B}_\varkappa$.

У нас не было повода привести какое-либо перечисление множеств $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$; с разбиением $\mathcal{B}_\varkappa$ дело обстоит иначе. $\mathcal{B}_\varkappa$ состоит ровно из $n+1$ множеств $B_\varkappa(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, которые, таким образом, входят сюда в некотором фиксированном перечислении посредством индекса $k = 0, 1, \ldots, n$ [1]). И это перечисление существенно, так как оно заменяет функцию $k_\varkappa$ (см. сноску 4 на стр. 94).

**9.1.4.** В-третьих, следует подробно описать условия, в которых должен иметь место выбор, связанный с ходом $\mathcal{M}_\varkappa$.

Предположим сначала, что $\mathcal{M}_\varkappa$ является случайным ходом, т. е. что мы находимся в пределах множества $B_\varkappa(0)$. Тогда существенными величинами будут число альтернатив $\alpha_\varkappa$ и вероятности $p_\varkappa(1), \ldots, p_\varkappa(\alpha_\varkappa)$ этих альтернатив (см. конец п. 6.2.1). Как отмечалось в п. 7.1.1 (там это было вторым предметом рассмотрения), все эти величины могут зависеть от всей информации, заключенной в $\mathcal{A}_\varkappa$ (см. сноску 4 на стр. 94), поскольку $\mathcal{M}_\varkappa$ является теперь случайным ходом. Это значит, что $\alpha_\varkappa$ и $p_\varkappa(1), \ldots$ $\ldots, p_\varkappa(\alpha_\varkappa)$ должны быть постоянными на каждом множестве $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$ [2]), но могут меняться от одного $A_\varkappa$ к другому.

На каждом из этих множеств $A_\varkappa$ происходит выбор одной из альтернатив, т. е. выбор числа $\sigma_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$ (см. п. 6.2.2). Это можно описать, указав $\alpha_\varkappa$ дизъюнктных подмножеств множества $A_\varkappa$, которые отвечают выражаемому $A_\varkappa$ ограничению, плюс имевший место выбор $\sigma_\varkappa$. Мы обозначим эти множества через $C_\varkappa$, а их систему, состоящую из всех подмножеств $C_\varkappa$ множеств $A_\varkappa$, которые являются подмножествами $B_\varkappa(0)$, через $\mathcal{C}_\varkappa(0)$. Таким образом, $\mathcal{C}_\varkappa(0)$ представляет собой разбиение в $B_\varkappa(0)$, а поскольку каждое $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(0)$ есть подмножество некоторого $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$, то $\mathcal{C}_\varkappa(0)$ будет подразбиением $\mathcal{A}_\varkappa$.

Величины $\alpha_\varkappa$ определяются разбиением $\mathcal{C}_\varkappa(0)$ [3]), поэтому мы можем больше о них не упоминать. Описание $p_\varkappa(1), \ldots, p_\varkappa(\alpha_\varkappa)$ напрашивается само собой: с каждым $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(0)$ должно быть связано число $p_\varkappa(C_\varkappa)$ (его вероятность), причем должны выполняться ограничения, эквивалентные указанным в сноске 2 на стр. 76 [4]).

---

[1]) Таким образом, $\mathcal{B}_\varkappa$ в действительности является не множеством и не разбиением, а имеет более сложную природу: оно состоит из множеств $B_\varkappa(k)$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$, в указанном перечислении. Однако оно обладает свойствами (8:A:a) и (8:A:b) из п. 8.3.1, характеризующими разбиение. Но и здесь следует сделать одно исключение: среди множеств $B_\varkappa(k)$ могут быть пустые.

[2]) Мы находимся в пределах $B_\varkappa(0)$; следовательно, все это относится только к тем $A_\varkappa$, которые являются подмножествами данного $B_\varkappa(0)$.

[3]) $\alpha_\varkappa$ является числом тех $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(0)$, которые являются подмножествами данного $A_\varkappa$.

[4]) То есть все $p_\varkappa(C_\varkappa) \geqq 0$ и для каждого $A_\varkappa$ будет $\sum p_\varkappa(C_\varkappa) = 1$, где сумма распространена на все $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(0)$, являющиеся подмножествами $A_\varkappa$.

**9.1.5.** Предположим теперь, что $\mathcal{M}_\varkappa$ является личным ходом, скажем, игрока $k = 1, \ldots, n$, т. е. что мы находимся в пределах множества $B_\varkappa(k)$. В этом случае мы должны определить состояние информации игрока $k$ при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$. В п. 6.3.1 оно описывалось посредством множества $\Lambda_\varkappa$, в п. 7.2.1 — при помощи семейства функций $\Phi_\varkappa$, причем последнее описание было более общим и окончательным. Согласно этому описанию игрок $k$ при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ знает значения всех функций $h(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1})$ из $\Phi_\varkappa$ и ничего больше. Этот объем информации определяет некоторое разделение $B_\varkappa(k)$ на несколько непересекающихся подмножеств, соответствующих различным возможным содержаниям информации игрока $k$ при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$. Обозначим эти подмножества через $D_\varkappa$, а их систему — через $\mathcal{D}_\varkappa(k)$. Таким образом, $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ является разбиением в $B_\varkappa(k)$.

Разумеется, информация игрока $k$ при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ является частью общей информации, имеющейся в этот момент (в смысле п. 9.1.2), которая воплощена в $\mathcal{A}_\varkappa$. Следовательно, ни в одном множестве $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$, являющемся подмножеством $B_\varkappa(k)$, не может проявиться никакой двусмысленности, т. е. это $A_\varkappa$ не может иметь общих элементов более чем с одним $D_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$. Это означает, что рассматриваемое $A_\varkappa$ должно быть подмножеством некоторого $D_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$. Иными словами, на множестве $B_\varkappa(k)$ семейство $\mathcal{A}_\varkappa$ представляет собой подразбиение $\mathcal{D}_\varkappa(k)$.

В действительности развитие партии сужается при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ до множества $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$. Но игрок $k$, которому принадлежит ход $\mathcal{M}_\varkappa$, этого не знает; насколько ему известно, партия находится попросту в пределах множества $D_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$. Теперь он должен произвести выбор одной из альтернатив $\mathcal{A}_\varkappa(1), \ldots, \mathcal{A}_\varkappa(\alpha_\varkappa)$, т. е. выбор $\sigma_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$. Как отмечалось в пп. 7.1.2 и 7.2.1 (особенно в конце п. 7.2.1), $\alpha_\varkappa$ вполне может быть переменным, но оно может зависеть только от информации, заключенной в $\mathcal{D}_\varkappa(k)$. Это значит, что оно должно быть постоянным на том множестве $D_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$, которым мы ограничились. Таким образом, выбор $\sigma_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$ можно описать путем указания $\alpha_\varkappa$ дизъюнктных подмножеств множества $D_\varkappa$, которые отвечают выражаемому $D_\varkappa$ ограничению, плюс имевший место выбор $\sigma_\varkappa$. Обозначим эти множества через $C_\varkappa$, а их систему, состоящую из всех подмножеств $C_\varkappa$ множеств $D_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$, через $\mathcal{C}_\varkappa(k)$. Таким образом, $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ есть разбиение в $B_\varkappa(k)$, а поскольку любое $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ является подмножеством некоторого $D_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$, то $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ будет подразбиением $\mathcal{D}_\varkappa(k)$.

Величины $\alpha_\varkappa$ определяются разбиением $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ [1]; следовательно, мы можем больше о них не упоминать. $\alpha_\varkappa$ не должно быть нулем, т. е. для данного $D_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ должно существовать некоторое $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(k)$, являющееся подмножеством $D_\varkappa$ [2].

## 9.2. Рассмотрение разбиений и их свойств

**9.2.1.** В предыдущих пунктах мы полностью описали положение дел в момент, предшествующий ходу $\mathcal{M}_\varkappa$. Теперь мы перейдем к рассмотрению того, что будет происходить, когда мы продвигаемся по ходам $\varkappa = 1, \ldots, \nu$. Нам будет удобно добавить к этим ходам еще один ход

[1] $\alpha_\varkappa$ есть число тех $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(k)$, которые являются подмножествами данного $A_\varkappa$.

[2] Мы требовали это только для $k = 1, \ldots, n$, хотя это может быть равным образом справедливо для $k = 0$, если вместо нашего $\mathcal{D}_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ взято некоторое $A_\varkappa$, являющееся подмножеством $B_\varkappa(0)$. Но формулировать это для данного случая нет необходимости, так как этот факт является следствием предыдущей сноски; действительно, если бы нужного множества $C_\varkappa$ не существовало, то приведенная в этой сноске сумма $\sum p_\varkappa(C_\varkappa)$ была бы равна нулю, а не единице.

с номером $\varkappa = \nu + 1$; он соответствует завершению партии, т. е. следует за последним ходом $\mathcal{M}_\nu$.

Как уже говорилось в предыдущих пунктах, для $\varkappa = 1, \ldots, \nu$ мы имеем разбиения

$$\mathcal{A}_\varkappa,\ \mathcal{B}_\varkappa = (B_\varkappa(0),\ B_\varkappa(1),\ \ldots,\ B_\varkappa(n)),$$
$$\mathcal{C}_\varkappa(0),\ \mathcal{C}_\varkappa(1),\ \ldots,\ \mathcal{C}_\varkappa(n),\ \mathcal{D}_\varkappa(1),\ \ldots,\ \mathcal{D}_\varkappa(n).$$

Все они, за единственным исключением $\mathcal{A}_\varkappa$, относятся к ходу $\mathcal{M}_\varkappa$; следовательно, их не нужно определять для $\varkappa = \nu + 1$, да и это невозможно. Но разбиение $\mathcal{A}_{\nu+1}$ имеет вполне ясный смысл, как показывает его рассмотрение в п. 9.1.2; оно представляет полную информацию, которая вообще может существовать применительно к партии, т. е. описывает индивидуальное развитие этой партии [1]).

Здесь напрашиваются два замечания. В смысле приведенных выше соображений разбиение $\mathcal{A}_1$ соответствует моменту, в который не имеется вообще никакой информации. Следовательно, $\mathcal{A}_1$ должно состоять из единственного множества $\Omega$. С другой стороны, $\mathcal{A}_{\nu+1}$ соответствует возможности фактической идентификации имевшей место партии. Следовательно, $\mathcal{A}_{\nu+1}$ представляет собой систему одноэлементных множеств.

Теперь мы займемся описанием перехода от $\varkappa$ к $\varkappa + 1$, когда $\varkappa = 1, \ldots, \nu$.

**9.2.2.** Об изменении $\mathcal{B}_\varkappa$, $\mathcal{C}_\varkappa(k)$, $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ при замене $\varkappa$ на $\varkappa + 1$ нельзя сказать ровно ничего. Наши предыдущие рассуждения показали, что при такой замене с этими объектами (т. е. с тем, что они представляют) может произойти все что угодно.

Однако можно описать, каким образом $\mathcal{A}_{\varkappa+1}$ получается из $\mathcal{A}_\varkappa$.

Информация, заключенная в $\mathcal{A}_{\varkappa+1}$, получается из информации, заключенной в $\mathcal{A}_\varkappa$, добавлением к последней сведений об исходе выбора, связанного с ходом $\mathcal{M}_\varkappa$ [2]). Это должно быть ясно из рассуждений п. 9.1.2. Таким образом, информация в $\mathcal{A}_{\varkappa+1}$, выходящая за рамки информации в $\mathcal{A}_\varkappa$, является как раз информацией, заключенной в $\mathcal{C}_\varkappa(0)$, $\mathcal{C}_\varkappa(1)$, ..., $\mathcal{C}_\varkappa(n)$.

Это означает, что разбиения $\mathcal{A}_{\varkappa+1}$ получаются путем *суперпозиции* разбиения $\mathcal{A}_\varkappa$ со всеми разбиениями $\mathcal{C}_\varkappa(0)$, $\mathcal{C}_\varkappa(1)$, ..., $\mathcal{C}_\varkappa(k)$, т. е. путем образования пересечений любого $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$ с каждым $C_\varkappa$ из всех $\mathcal{C}_\varkappa(0)$, $\mathcal{C}_\varkappa(1)$, ..., $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ и последующего отбрасывания пустых множеств.

Благодаря связи $\mathcal{A}_\varkappa$ и $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ с множествами $B_\varkappa(k)$, которая рассматривалась в предыдущих пунктах, мы можем сказать об этом процессе суперпозиции даже несколько больше.

В $B_\varkappa(0)$ разбиение $\mathcal{C}_\varkappa(0)$ является подразбиением $\mathcal{A}_\varkappa$ (см. обсуждение в п. 9.1.4). Следовательно, $\mathcal{A}_{\varkappa+1}$ попросту совпадает там с $\mathcal{C}_\varkappa(0)$. В $B_\varkappa(k)$, $k = 1, \ldots, n$, как $\mathcal{C}_\varkappa(k)$, так и $\mathcal{A}_\varkappa$ являются подразбиениями $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ (см. обсуждение в п. 9.1.5). Это значит, что $\mathcal{A}_{\varkappa+1}$ получается там путем взятия сначала любого $D_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$, затем для любого такого $D_\varkappa$ — всех $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$ и всех $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(k)$, являющихся подмножествами этого $D_\varkappa$, и путем образования всех пересечений $A_\varkappa \cap C_\varkappa$.

Любое такое множество $A_\varkappa \cap C_\varkappa$ описывает те партии, которые возникают, когда игрок $k$, располагая информацией из $D_\varkappa$, но находясь

---

[1]) Или, в смысле сноски 4 на стр. 95, последовательность $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$. Последовательность же $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$, как говорилось в п. 6.2.2, характеризует саму партию.

[2]) В нашей прежней терминологии — значения $\sigma_\varkappa$.

фактически в положении из $A_\varkappa$ (некоторого подмножества $D_\varkappa$), делает при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ выбор $C_\varkappa$ так, чтобы ограничить положение дел множеством $C_\varkappa$.

Так как этот выбор, в соответствии со сказанным выше, возможен, такие партии существуют. Иначе говоря, множество $A_\varkappa \cap C_\varkappa$ должно быть непустым. Переформулируем это утверждение:

(9:C) Если $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$ и $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ являются подмножествами одного и того же $D_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$, то пересечение $A_\varkappa \cap C_\varkappa$ должно быть непустым.

**9.2.3.** Существуют игры, в которых можно поддаться искушению отбросить это требование. Это те игры, в которых игрок может сделать вполне законный выбор, который, однако, впоследствии оказывается запрещенным. Таковы, например, «закрытые шахматы», упоминавшиеся в сноске 1 на стр. 84: в них игрок может сделать на первый взгляд возможный выбор («ход») на своей доске и (возможно) лишь после этого узнает от «посредника», что этот выбор является «невозможным».

Этот пример, однако, является незаконным. Рассматриваемый ход лучше всего разложить в последовательность нескольких альтернативных ходов. По-видимому, лучше всего привести предполагаемые правила «закрытых шахмат» полностью.

Игра состоит из последовательности ходов. На каждом ходе «посредник» объявляет обоим игрокам о том, был ли предыдущий ход «возможным». Если он таковым не был, то следующий ход будет личным ходом того же игрока, что и предыдущий; если же он был возможным, то следующий ход будет личным ходом другого игрока. На каждом ходе игрок информирован обо всех своих предшествующих выборах, о всей последовательности «возможностей» или «невозможностей» всех предшествующих выборов обоих игроков, а также обо всех предшествовавших позициях, когда один из игроков объявлял шах или брал какую-либо фигуру. Но он знает точный состав только собственных потерь. При определении развития игры «посредник» не принимает во внимание «невозможные» ходы. В остальном игра разыгрывается по тем же правилам, что и шахматы, причем применяется правило остановки, описанное в замечании 1 на стр. 85, дополненное еще одним требованием: ни один из игроков не может делать («испытывать») один и тот же выбор дважды в непрерывающейся последовательности своих личных ходов. (На практике, разумеется, для обеспечения этих условий, налагаемых на информацию, каждый игрок нуждается в отдельной шахматной доске, невидимой для его оппонента, но находящейся в поле зрения «посредника».)

Во всяком случае, мы будем придерживаться сформулированного выше требования. Мы увидим, что оно весьма удобно для наших последующих рассмотрений (см. п. 11.2.1).

**9.2.4.** Теперь нам остается сделать только одно: ввести в нашей новой терминологии величины $\mathcal{F}_k$, $k = 1, \ldots, n$, из п. 6.2.2. $\mathcal{F}_k$ представляет собой исход партии для игрока $k$. $\mathcal{F}_k$ должно быть функцией от фактически имевшей место партии [1]). Если для обозначения этой партии использовать символ $\pi$, то мы можем сказать: $\mathcal{F}_k$ является функцией переменной $\pi$ с областью изменения $\Omega$, т. е.

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k(\pi), \quad \pi \in \Omega, \quad k = 1, \ldots, n.$$

[1]) В старой терминологии мы имели соответственно $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)$ (см. п. 6.2.2).

# § 10. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

## * 10.1. Аксиомы и их интерпретация

**10.1.1.** Наше описание общего понятия игры новыми средствами, с использованием множеств и разбиений, теперь закончено. Все построения и определения уже были в достаточной мере объяснены, и поэтому мы можем перейти к строгому аксиоматическому определению игры. Разумеется, оно будет представлять собой лишь сжатую переформулировку идей, которые мы более широко обсуждали в предыдущих параграфах.

Сначала мы сформулируем точное определение без каких-либо комментариев [1]).

Игра $n$ лиц $\Gamma$, т. е. полная система ее правил, определена, если указаны следующие данные:

(10:A:a) Число $\nu$.

(10:A:b) Конечное множество $\Omega$.

(10:A:c) Функция $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k(\pi)$, $\pi \in \Omega$, $k = 1, \ldots, n$.

(10:A:d) Разбиение $\mathcal{A}_\varkappa$ в $\Omega$, $\varkappa = 1, \ldots, \nu, \nu + 1$.

(10:A:e) Разбиение $\mathcal{B}_\varkappa$ в $\Omega$, $\varkappa = 1, \ldots, \nu$. $\mathcal{B}_\varkappa$ состоит из $n + 1$ множеств $B_\varkappa(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, занумерованных таким образом.

(10:A:f) Разбиение $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ в $B_\varkappa(k)$, $\varkappa = 1, \ldots, \nu$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

(10:A:g) Разбиение $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ в $B_\varkappa(k)$, $\varkappa = 1, \ldots, \nu$, $k = 1, \ldots, n$.

(10:A:h) Число $p_\varkappa(C_\varkappa)$, заданное для любого $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(0)$, $\varkappa = 1, \ldots, \nu$.

Перечисленные объекты должны удовлетворять следующим требованиям:

(10:1:a) $\mathcal{A}_\varkappa$ является подразбиением $\mathcal{B}_\varkappa$.

(10:1:b) $\mathcal{C}_\varkappa(0)$ является подразбиением $\mathcal{A}_\varkappa$.

(10:1:c) $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ является подразбиением $\mathcal{D}_\varkappa(k)$, $k = 1, \ldots, n$):

(10:1:d) На $B_\varkappa(k)$ разбиение $\mathcal{A}_\varkappa$ является подразбиением $\mathcal{D}_\varkappa(k)$, $k = 1, \ldots, n$.

(10:1:e) Для всех $\varkappa = 1, \ldots, \nu$ и для любого $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$, являющегося подмножеством $B_\varkappa(0)$, справедливо следующее условие. Для всех $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(0)$, которые являются подмножествами этого $A_\varkappa$, числа $p_\varkappa(C_\varkappa)$ неотрицательны и $\sum p_\varkappa(C_\varkappa) = 1$, где сумма распространена на эти подмножества.

(10:1:f) $C_1$ состоит из одного множества $\Omega$.

(10:1:g) $\mathcal{A}_{\nu+1}$ состоит из одноэлементных множеств.

(10:1:h) $\mathcal{A}_{\varkappa+1}$ получается из $\mathcal{A}_\varkappa$ путем его суперпозиции со всеми $\mathcal{C}_\varkappa(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\varkappa = 1, \ldots, \nu$. (Детали изложены в п. 9.2.2).

---

[1]) За пояснениями отсылаем читателя к концу п. 10.1.1 и к обсуждению в п.10.1.2.

(10:1:i) Если $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$ и $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(k)$, $k = 1, \ldots, n$ являются подмножествами одного и того же $D_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$, то пересечение $A_\varkappa \cap C_\varkappa$ должно быть непустым, $\varkappa = 1, \ldots, \nu$.

(10:1:j) Для $\varkappa = 1, \ldots, \nu$ и $k = 1, \ldots, n$ и для любого $D_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ должно существовать некоторое $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(k)$, являющееся подмножеством $D_\varkappa$.

К этому определению следует подходить прежде всего в духе современного аксиоматического метода. Мы избегали даже давать названия математическим понятиям, введенным в (10:A:a) — (10:A:h), с тем, чтобы не устанавливать каких бы то ни было соответствий с возможными толкованиями, которые эти названия могут подсказывать. В своей абсолютной чистоте эти понятия могут теперь стать предметом точного математического исследования [1]).

Этот подход наилучшим образом приспособлен для развития строго определенных понятий. Приложение к объектам, заданным чисто интуитивным образом, будет дано впоследствии, после завершения точного анализа. В связи с этим напомним также то, о чем уже было сказано в п. 4.1.3 (гл. I),— о роли моделей в физике: аксиоматические модели интуитивных систем аналогичны математическим моделям физических систем (заданных столь же интуитивно).

Если это осознано, то нелишним будет напомнить, что это аксиоматическое определение было выкристаллизовано из детальных эмпирических обсуждений, проведенных в предшествующих параграфах. Если мы снабдим входящие в это определение понятия соответствующими названиями, указывающими, по возможности, на их интуитивное происхождение, то это облегчит нам использование нашего определения и сделает его структуру более прозрачной. Кроме того, будет полезно пояснить в том же духе смысл наших постулатов (10:1:a) — (10:1:j), т. е. разъяснить те интуитивные соображения, из которых они возникли.

Все это будет, разумеется, попросту сжатым резюме интуитивных рассуждений предыдущих пунктов, которые привели к этой аксиоматизации.

**10.1.2.** Дадим сначала технические названия понятиям, введенным в (10:A:a) — (10:A:h) из п. 10.1.1.

(10:A:a*) $\nu$ есть *длина* игры Г.

(10:A:b*) $\Omega$ есть *множество всех партий* в Г.

(10:A:c*) $\mathcal{F}_k(\pi)$ есть *исход* партии $\pi$ для игрока $k$.

(10:A:d*) $\mathcal{A}_\varkappa$ есть *информационная схема посредника*: $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$ представляет собой *фактическую информацию посредника* при ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ (т. е. непосредственно перед этим ходом), а для $\varkappa = \nu + 1$ — в конце игры.

(10:A:e*) $\mathcal{B}_\varkappa$ есть *схема распределения*: $B_\varkappa(k)$ из $\mathcal{B}_\varkappa$ представляет собой *фактическое распределение* хода $\mathcal{M}_\varkappa$.

---

[1]) Это аналогично современному подходу к аксиоматизации таких дисциплин, как логика, геометрия и т. п. Так, при аксиоматизации геометрии обычно считается, что понятия точки, прямой и плоскости не следует априори отождествлять с какими-либо интуитивными представлениями — они являются лишь обозначениями объектов, относительно которых предполагается только выполнение свойств, выражаемых аксиомами. См., например, D. Hilbert, Die Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899 (русский перевод: Д. Гильберт, Основания геометрии).

(10:A:f*) $\mathscr{C}_\varkappa(k)$ есть *схема выбора*: $C_\varkappa$ из $\mathscr{C}_\varkappa(k)$ представляет собой *фактический выбор* игрока $k$ при ходе $\mathscr{M}_\varkappa$ (при $k = 0$ — случайный выбор).

(10:A:g*) $\mathscr{D}_\varkappa(k)$ есть *информационная схема игрока* $k$: $D_\varkappa$ из $\mathscr{D}_\varkappa(k)$ представляет собой *фактическую информацию игрока* $k$ при ходе $\mathscr{M}_\varkappa$.

(10:A:h*) $p_\varkappa(C_\varkappa)$ есть вероятность фактического выбора $C_\varkappa$ при ходе $\mathscr{M}_\varkappa$, если он является случайным.

Теперь с помощью введенных наименований мы поясним «смысл» требований (10:1:a) — (10:1:j) в духе заключительных замечаний из п. 10.1.1.

(10:1:a*) Информационная схема посредника при ходе $\mathscr{M}_\varkappa$ содержит распределение этого хода.

(10:1:b*) Схема выбора при случайном ходе $\mathscr{M}_\varkappa$ содержит информационную схему посредника при этом ходе.

(10:1:c*) Схема выбора при личном ходе $\mathscr{M}_\varkappa$ игрока $k$ содержит информационную схему игрока $k$ при этом ходе.

(10:1:d*) Информационная схема посредника при ходе $\mathscr{M}_\varkappa$ содержит — в той мере, в какой этот ход является личным ходом игрока $k$,— информационную схему игрока при этом ходе.

(10:1:e*) Вероятности выбора различных альтернатив при случайном ходе $\mathscr{M}_\varkappa$ ведут себя как вероятности, соответствующие дизъюнктным исчерпывающим альтернативам.

(10:1:f*) Информационная схема посредника при первом ходе пуста.

(10:1:g*) Информационная схема посредника в конце игры определяет партию полностью.

(10:1:h*) Информационная схема посредника при ходе $\mathscr{M}_{\varkappa+1}$ (в конце игры для $\varkappa = \nu$) получается из его информационной схемы при ходе $\mathscr{M}_\varkappa$ путем ее суперпозиции со схемой выбора при ходе $\mathscr{M}_\varkappa$.

(10:1:i*) Пусть дан ход $\mathscr{M}_\varkappa$, являющийся личным ходом игрока $k$, а также задана любая фактическая информация игрока $k$ при этом ходе. Тогда любая фактическая информация посредника при этом ходе и любой фактический выбор игрока $k$ при этом ходе, которые принадлежат этой фактической информации игрока (т. е. являются ее размельчениями), также будут совместимыми друг с другом. Иначе говоря, они имеют место в фактических партиях.

(10:1:j*) Пусть дан ход $\mathscr{M}_\varkappa$, являющийся личным ходом игрока $k$, а также задана любая фактическая информация игрока $k$ при этом ходе. Тогда число фактических альтернативных выборов, имеющихся в распоряжении игрока $k$, отлично от нуля.

Этим наша формализация общей схемы игры заканчивается

### 10.2. Логическое обсуждение аксиом

**10.2.** Мы еще не рассматривали вопросов, которые в формальной логике обычно связываются с любой аксиоматической системой, именно непротиворечивость, категоричность (полнота) и независимость аксиом [1]).

[1]) См. Д. Гильберт, Основания геометрии (цитир. ранее).

Наша система обладает первым и последним из названных свойств, но не обладает вторым. Эти факты легко проверяются, причем нетрудно видеть, что ситуация в точности такова, какой ей следовало бы быть. Резюмируем относящиеся к этому соображения.

Непротиворечивость. В реальном существовании игр не может быть никаких сомнений; мы же попросту дали их точное формальное описание. В дальнейшем мы подробно рассмотрим формализацию нескольких игр; см., например, примеры из §§ 18, 19. Со строго математической, логической точки зрения для установления непротиворечивости можно использовать даже самые простые игры. Но, разумеется, наши реальные интересы лежат в области более сложных игр, которые представляют действительный интерес.

Замечание. Самая простая игра состоит в следующем: $\nu = 0$, а $\Omega$ состоит только из одного элемента, скажем $\pi_0$. Следовательно, никаких $\mathscr{B}_\varkappa(k)$, $\mathscr{C}_\varkappa(k)$ и $\mathscr{D}_\varkappa(k)$ здесь вообще нет, а единственным $\mathscr{A}_\varkappa$ является $\mathscr{A}_1$, состоящее из одного $\Omega$. Положим $\mathscr{F}_k(\pi_0) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Описание этой игры очевидно: никто ничего не делает, и ничего не происходит. Это показывает также, что в данном случае непротиворечивость не является особенно интересным вопросом.

Категоричность (полнота) здесь не имеет места, поскольку существует много различных игр, удовлетворяющих этим аксиомам. Ссылки на содержательные примеры указаны выше.

Читатель может заметить, что в этом случае мы и не добивались полноты, так как наши аксиомы должны определять целый класс объектов (игр), а не единственный объект [1]).

Независимость нашей системы аксиом может быть легко установлена, но мы здесь не будем этим заниматься.

### 10.3. Общие замечания относительно аксиом

**10.3.** В связи с приведенной аксиоматизацией стоит сделать еще два замечания.

Во-первых, наш подход следует классическим путям получения точной формулировки для интуитивно, эмпирически заданных идей. В повседневной практике существует практически удовлетворительное понятие игры, являющееся тем не менее слишком неопределенным для точного рассмотрения. Читатель, следивший за нашими рассуждениями, должен был заметить, как постепенно эта неопределенность устранялась, «зона сумерек» отступала и шаг за шагом складывалась точная формулировка.

Во-вторых, мы надеемся, что это может послужить примером реализации следующего широко дискутировавшегося предложения: возможно математическое описание и изучение человеческих действий, в которых основной акцент лежит в психологической области. В нашем случае психологический элемент был привнесен необходимостью анализировать решения, информацию, на базе которой они принимаются, и взаимосвязь таких комплексов информации (на различных ходах) друг с другом. Эта взаимосвязь происходит из связи различных комплексов информации во времени, причинности, а также в силу умозрительных предположений, делаемых игроками друг относительно друга.

---

[1]) В этом заключается важная характеристическая черта общего логического подхода к аксиоматизации. Так, аксиомы евклидовой геометрии определяют единственный объект, а аксиомы теории групп в математике или рациональной механики в физике—не определяют, так как существует много различных групп и много различных механических систем.

Разумеется, существует еще много — и притом весьма важных — психологических аспектов, которых мы здесь не касались. Тем не менее факт остается фактом: группа явлений, носящих в основном психологический характер, аксиоматизирована.

## 10.4. Графическое представление

**10.4.1.** Графическое представление многочисленных разбиений, которые нам пришлось использовать для описания игры, является нелегким делом. Мы не будем пытаться рассматривать этот вопрос систематически: даже сравнительно простые игры приводят к столь сложным и отпугивающим диаграммам, что обычные преимущества графического метода уже не могут проявиться.

Однако графическое представление имеет некоторые, хотя и ограниченные, возможности, и мы скажем о них несколько слов.

В первую очередь, из (10:1:h) п. 10.1.1 (или, равным образом, если судить по смыслу, из (10:1:h*) п. 10.1.2) ясно, что $\mathcal{A}_{\varkappa+1}$ является подразбиением $\mathcal{A}_{\varkappa}$. Иначе говоря, каждое из разбиений в последовательности $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_{\nu+1}$ является подразбиением своего непосредственного предшественника. Следовательно, все это можно изобразить при помощи приема, изображенного на рис. 9 из п. 8.3.2, т. е. посредством дерева. (Рис. 9 не является характерным с одной точки зрения: так как длина игры Г предполагается фиксированной, все ветви этого дерева должны быть продолжены на полную высоту. См. приводимый в п. 10.4.2 рис. 10.) Мы не будем пытаться добавить к этой картинке $B_\varkappa$, $\mathcal{C}_\varkappa(k)$, $\mathcal{D}_\varkappa(k)$.

Существует, однако, один класс игр, в которых последовательность $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_{\nu+1}$ уже описывает практически всю историю. Это важный класс (он уже обсуждался в п. 6.4.1, а более подробно о нем будет сказано в § 15), в котором предварение и предшествование эквивалентны. Его характеристики могут быть просто выражены в рамках выполняемой нами формализации.

**10.4.2.** Как показывают обсуждения в пп. 6.4.1, 6.4.2 и интерпретация в п. 6.4.3, предварение и предшествование эквивалентны в том и только в том случае, когда игрок, совершающий личный ход, знает в этот момент всю предыдущую историю партии. Пусть этот игрок есть $k$, а ход — $\mathcal{M}_\varkappa$. Утверждение о том, что $\mathcal{M}_\varkappa$ представляет собой личный ход игрока $k$, означает, что мы находимся в пределах множества $B_\varkappa(k)$. Следовательно, утверждение заключается в том, что на $B_\varkappa(k)$ информационная схема игрока $k$ совпадает с информационной схемой посредника, т. е. что $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ равно $\mathcal{A}_\varkappa$ на $B_\varkappa(k)$. Но $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ является разбиением в $B_\varkappa(k)$; следовательно, приведенное выше утверждение означает, что $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ является попросту той частью $\mathcal{A}_\varkappa$, которая лежит в $B_\varkappa(k)$.

Переформулируем сказанное

(10:B) Предварение и предшествование совпадают, т. е. каждый игрок, совершающий свой личный ход, полностью информирован в этот момент обо всей предшествующей истории партии, в том и только в том случае, когда $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ является той частью $\mathcal{A}_\varkappa$, которая лежит в $B_\varkappa(k)$.

Если это имеет место, то мы можем рассуждать следующим образом. В силу (10:1:c) из п. 10.1.1 и сказанного выше, $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ должно теперь быть подразбиением $\mathcal{A}_\varkappa$. Это справедливо для личных ходов, т. е. для

$k = 1, \ldots, n$, а для $k = 0$ это сразу следует из (10:1:b) п. 10.1.1. Теперь (10:1:h) из п. 10.1.1 позволяет вывести отсюда (за деталями мы отсылаем к п. 9.2.2), что $\mathcal{A}_{\varkappa+1}$ совпадает с $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ на $B_\varkappa(k)$ для $k = 0, 1, \ldots, n$. (Мы могли бы равным образом использовать соответствующие формулировки со звездочками из п. 10.1.2, разъясняющие смысл этих понятий. Словесное выражение этих рассуждений мы предоставляем

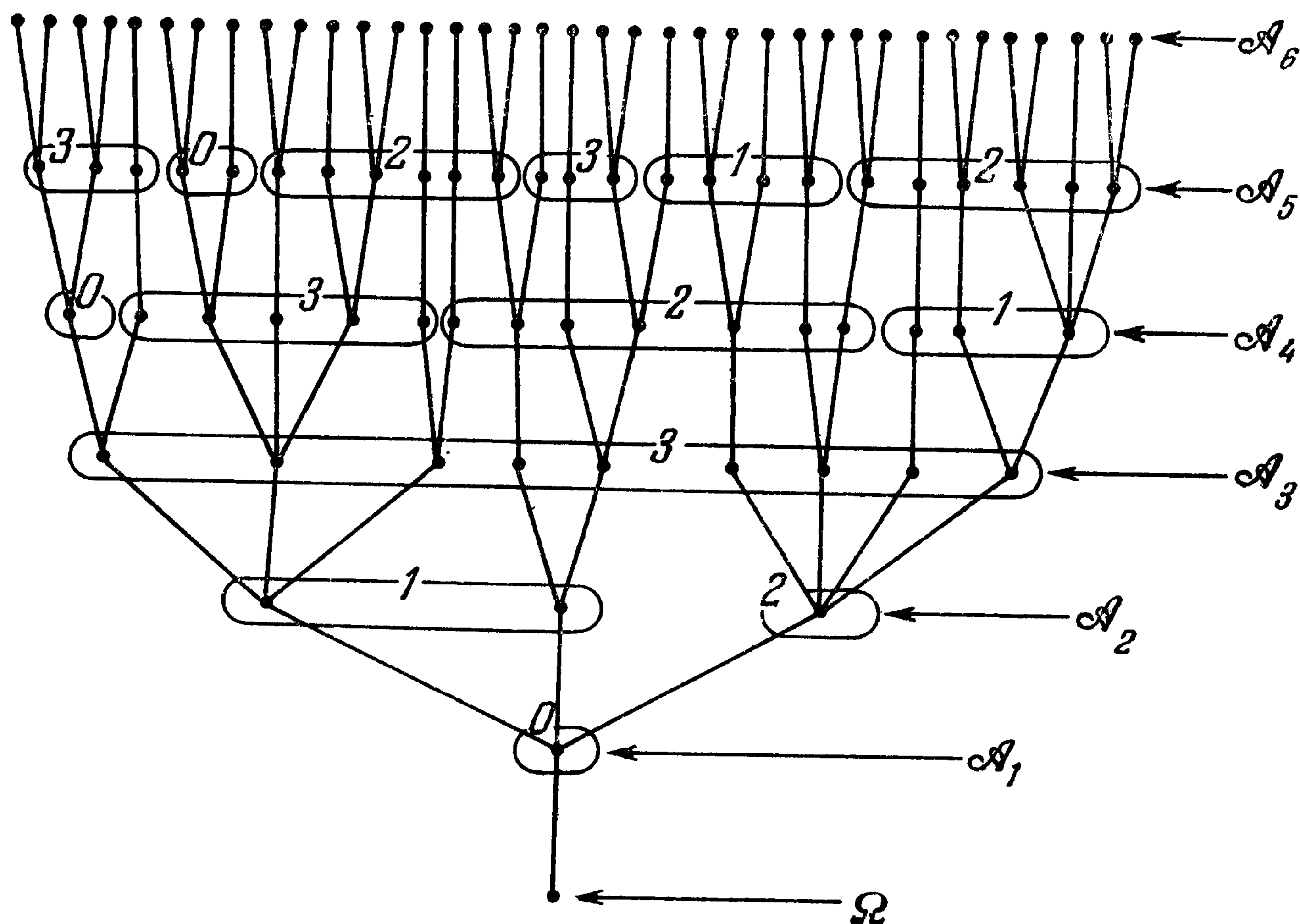



Рис. 10.

читателю.) Но $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ представляет собой разбиение в $B_\varkappa(k)$; следовательно, приведенное выше утверждение означает, что $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ является попросту той частью $\mathcal{C}_{\varkappa+1}$, которая лежит в $B_\varkappa(k)$.

Переформулируем сказанное:

(10:C) Если выполнено условие (10:B), то $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ является той частью $\mathcal{A}_{\varkappa+1}$, которая лежит в $B_\varkappa(k)$.

Таким образом, если предварение и предшествование совпадают, то в нашей теперешней формализации последовательность $\mathcal{A}_1, \ldots$ $\ldots, \mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_{\nu+1}$ и множества $B_\varkappa(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, для каждого $\varkappa = 1, \ldots, \nu$ описывают игру полностью. Иначе говоря, картинку, изображенную на рис. 9 из п. 8.3.2, следует дополнить лишь объединением тех элементов каждого $\mathcal{A}_\varkappa$, которые принадлежат одному и тому же множеству $B_\varkappa(k)$. (См., однако, замечания, сделанные в п. 10.4.1.) Мы можем сделать это, обведя их линией, в разрыве которой будет стоять число $k$ из $B_\varkappa(k)$. Пустые $B_\varkappa(k)$ можно опустить. Пример этого для $\nu = 5$ и $n = 3$ изображен на рис. 10.

Во многих играх этого класса даже и такой дополнительный прием не является необходимым, так как для каждого $\varkappa$ непустым оказывается только одно $B_\varkappa(k)$. Это значит, что характер каждого хода $\mathcal{M}_\varkappa$ не зависит от предыдущего развития партии [1]). В этом случае достаточно указать при каждом $\mathcal{A}_\varkappa$ характер хода $\mathcal{M}_\varkappa$, т. е. единственное $k = 0, 1, \ldots, n$, для которого $B_\varkappa(k) \neq \varnothing$.

[1]) Это справедливо для шахмат. Правила трик-трака допускают как ту, так и другую интерпретацию.

# § 11. СТРАТЕГИИ И ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ УПРОЩЕНИЕ ОПИСАНИЯ ИГРЫ

## 11.1. Понятие стратегии и его формализация

**11.1.1.** Вернемся к развитию фактической партии $\pi$ игры $\Gamma$. Ходы $\mathcal{M}_\varkappa$ следуют друг за другом в порядке $\varkappa = 1, \ldots, \nu$. На каждом ходе $\mathcal{M}_\varkappa$ производится выбор, либо случайный — если партия находится в $B_\varkappa(0)$,— либо выбор игрока $k = 1, \ldots, n$ — если партия находится в $B_\varkappa(k)$. Выбор состоит в фиксации некоторого $C_\varkappa$ из $\mathscr{C}_\varkappa(k)$ (как указывалось выше, $k = 0$ или $k = 1, \ldots, n$), которое и является очередным ограничением партии. Если выбор производится игроком $k$, то следует принять меры предосторожности с тем, чтобы информационная схема этого игрока была бы в этот момент именно $\mathscr{D}_\varkappa(k)$. (Как показывают примеры бриджа (см. конец п. 6.4.2) и «закрытых шахмат» (см. п. 9.2.3), это может доставлять известные практические затруднения.)

Представим себе теперь, что каждый игрок $k = 1, \ldots, n$ вместо того, чтобы принимать каждое решение по мере того, как в этом возникает необходимость, заранее принимает решение на все возможные случаи. Иначе говоря, игрок $k$, начиная партию, уже имеет исчерпывающий план, указывающий, какие выборы он будет совершать в любой возможной ситуации и для любой возможной фактической информации, которой он в этот момент сможет располагать в соответствии с информационной схемой, предусматриваемой для него правилами игры в этом случае. Мы назовем такой план *стратегией*.

Отметим следующее обстоятельство. Если мы требуем, чтобы каждый игрок начинал игру с исчерпывающим планом такого рода, т. е. с некоторой стратегией, то мы никоим образом не ограничиваем его свободы действий. В частности, мы тем самым не заставляем его принимать решения на основе меньшей информации, чем та, которая была бы ему доступна в любом практическом случае в фактической партии. Дело здесь в следующем. Мы предполагаем, что стратегия определяет каждое конкретное решение только как функцию именно того объема фактической информации, которая была бы доступна для этой цели в фактической партии. Единственным дополнительным бременем, которое возлагает на игроков наше предположение, является интеллектуальная нагрузка: игрокам следует запастись правилами поведения на все возможные случаи, хотя в действительности им предстоит пройти только через одну партию. Но в рамках математического исследования такое предположение выглядит вполне безобидно (см. также п. 4.1.2).

**11.1.2.** Случайную компоненту игры можно рассмотреть точно таким же образом.

В самом деле, представляется достаточно очевидным, что вовсе не обязательно производить выборы, которые предоставляются случаю (т. е. выборы при случайных ходах), только тогда, когда до этих ходов доходит дело. Все эти выборы мог бы заранее произвести некоторый посредник, сообщая затем их результаты игрокам в те моменты и в той мере, в какой правила игры предусматривают подобную информацию.

Правда, посредник не может заранее знать, какие ходы окажутся случайными и с какими вероятностями; это будет, вообще говоря, зависеть от фактического развития партии. Но, как и в рассмотренных выше стратегиях, он мог бы предусмотреть все возможные случаи. Он мог бы заранее решить, каким должен быть исход выбора при любом возможном

случайном ходе, для любого возможного предшествующего развития партии, т. е. для любой возможной фактической информационной схемы посредника при рассматриваемом ходе. В этих условиях вероятности, предписываемые правилами игры для каждой из указанных возможностей, были бы полностью определены, так что посредник мог бы связать с каждым из нужных выборов, которые должны регулироваться случаем, соответствующие им вероятности.

После этого посредник мог бы, как об этом говорилось выше, оповещать игроков об исходах в надлежащие моменты и в надлежащей мере.

Такое предварительное решение относительно выборов при всех мыслимых случайных ходах мы назовем *выбором посредника*.

В последнем пункте мы видели, что замена выборов при всех личных ходах игрока $k$ на стратегию игрока $k$ вполне законна; иначе говоря, она не меняет общего характера игры Г. Очевидно, проводимая нами теперь замена выборов при всех случайных ходах на выбор посредника является законной в том же самом смысле.

**11.1.3.** Нам остается формализовать понятия стратегии и выбора посредника. Качественное обсуждение, проведенное в последних двух пунктах, делает эту задачу совершенно недвусмысленной.

Стратегия игрока $k$ производит следующее. Рассмотрим некоторый ход $\mathcal{M}_\varkappa$. Предположим, что он оказался личным ходом игрока $k$, т. е. что партия находится в пределах $B_\varkappa(k)$. Рассмотрим возможную фактическую информацию игрока $k$ в этот момент, т. е. некоторое $D_\varkappa$ из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$. Тогда стратегия, о которой идет речь, должна определять его выбор в сложившейся обстановке, т. е. некоторое $C_\varkappa$ из $C_\varkappa(k)$, являющееся подмножеством указанного $D_\varkappa$.

Выскажем это формально:

(11:A) *Стратегия* игрока $k$ есть функция $\Sigma_k(\varkappa; D_\varkappa)$, которая определена для любого $\varkappa = 1, \ldots, \nu$ и для любого $D_\varkappa$ из $D_\varkappa(k)$ и значение которой $\Sigma_k(\varkappa; D_\varkappa) = C_\varkappa$ всегда обладает следующими свойствами: $C_\varkappa$ принадлежит $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ и является подмножеством $D_\varkappa$.

То, что стратегии, т. е. функции $\Sigma_k(\varkappa; D_\varkappa)$, удовлетворяющие написанному требованию, вообще существуют, в точности совпадает с нашим постулатом (10:1:j) из п. 10.1.1.

Выбор посредника производится так. Рассмотрим некоторый ход $\mathcal{M}_\varkappa$. Предположим, что он оказался случайным ходом, т. е. что партия находится в $B_\varkappa(0)$. Рассмотрим возможную фактическую информацию посредника в этот момент, т. е. некоторое $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$, являющееся подмножеством $B_\varkappa(0)$. Тогда рассматриваемый выбор посредника должен определить случайный выбор в этих обстоятельствах, т. е. некоторое $C_\varkappa$ из $\mathcal{C}_\varkappa(0)$, являющееся подмножеством указанного $A_\varkappa$.

Формулируем:

(11:B) *Выбор посредника* есть функция $\Sigma_0(\varkappa; A_\varkappa)$, которая определена для любого $\varkappa = 1, \ldots, \nu$ и для любого $A_\varkappa$ из $\mathcal{A}_\varkappa$, являющегося подмножеством $B_\varkappa(0)$, и значение которой $\Sigma_0(\varkappa; A_\varkappa) = C_\varkappa$ всегда обладает следующими свойствами: $C_\varkappa$ принадлежит $\mathcal{C}_\varkappa(0)$ и является подмножеством $A_\varkappa$.

По поводу существования выбора посредника, т. е. функции $\Sigma_0(\varkappa; A_\varkappa)$, удовлетворяющей указанному требованию, см. замечание, сделанное выше после (11:A), и сноску 2 на стр. 96.

Так как исход выбора посредника зависит от случая, должны быть указаны соответствующие вероятности. Теперь выбор посредника является системой независимых случайных событий. Как указывалось в п. 11.1.2, такое случайное событие имеется для любого $\varkappa = 1, \ldots, \nu$ и для любого $A_\varkappa$ из $\mathscr{A}_\varkappa$, являющегося подмножеством $B_\varkappa(0)$, т. е. для любой пары $\varkappa$, $A_\varkappa$ из области определения $\Sigma_0(\varkappa; A_\varkappa)$. Что касается этого события, вероятность конкретного исхода $\Sigma_0(\varkappa; A_\varkappa) = C_\varkappa$ равна $p_\varkappa(C_\varkappa)$. Следовательно, вероятность всего выбора посредника, представляемого функцией $\Sigma_0(\varkappa; A_\varkappa)$, равна произведению отдельных вероятностей $p_\varkappa(C_\varkappa)$ [1].

Выскажем это формально:

(11:C) Вероятность *выбора посредника*, представляемого функцией $\Sigma_0(\varkappa; A_\varkappa)$, равна произведению вероятностей $p_\varkappa(C_\varkappa)$, где $\Sigma_0(\varkappa; A_\varkappa) = C_\varkappa$, а $\varkappa$ и $A_\varkappa$ пробегают всю область определения $\Sigma_0(\varkappa; A_\varkappa)$ (см. (11:B)).

Если рассмотреть условия (10:1:e) из п. 10.1.1 для всех таких пар $\varkappa$, $A_\varkappa$ и перемножить их, то получится следующее. Все указанные в (11:C) вероятности неотрицательны, и их сумма, взятая по всем выборам посредника, равна единице. Так оно и должно быть, ибо совокупность всех выборов посредника представляет собой систему дизъюнктных исчерпывающих альтернатив.

## 11.2. Окончательное упрощение описания игры

**11.2.1.** Если каждым игроком $k = 1, \ldots, n$ принята определенная стратегия и если указан определенный выбор посредника, то эти объекты единственным образом определяют все развитие партии и соответственно ее исход для каждого игрока. Это должно быть ясно из словесного описания всех этих понятий, однако можно дать и простое формальное доказательство.

Обозначим рассматриваемые стратегии через $\Sigma_k(\varkappa; D_\varkappa)$, $k = 1, \ldots, n$, а выбор посредника — через $\Sigma_0(\varkappa; A_\varkappa)$. Мы будем определять фактическую информацию посредника во все моменты $\varkappa = 1, \ldots, \nu, \nu + 1$. Чтобы не смешивать ее с переменной $A_\varkappa$, мы будем обозначать ее через $\bar{A}_\varkappa$. Разумеется, $\bar{A}_1$ равно самому $\Omega$ (см. (10:1:f) из п. 10.1.1).

Рассмотрим теперь некоторое $\varkappa = 1, \ldots, \nu$ и предположим, что соответствующее $\bar{A}_\varkappa$ уже известно. Тогда $\bar{A}_\varkappa$ является подмножеством в точности одного $B_\varkappa(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ (см. (10:1:a) из п. 10.1.1). Если $k = 0$, то $\mathscr{M}_\varkappa$ является случайным ходом, так что исходом выбора будет $\Sigma_0(\varkappa; \bar{A}_\varkappa)$. Соответственно $\bar{A}_{\varkappa+1} = \Sigma_0(\varkappa; \bar{A}_\varkappa)$ (см. (10:1:h) из п. 10.1.1 и детали в п. 9.2.2). Если $k = 1, \ldots, n$, то $\mathscr{M}_\varkappa$ является личным ходом игрока $k$. $\bar{A}_\varkappa$ является подмножеством ровно одного $\bar{D}_\varkappa$ из $\mathscr{D}_\varkappa(k)$ (см. (10:1:d) из п. 10.1.1). Тем самым исход выбора есть $\Sigma_k(\varkappa; \bar{D}_\varkappa)$. Соответственно $\bar{A}_{\varkappa+1} = \bar{A}_\varkappa \cap \Sigma_k(\varkappa; \bar{D}_\varkappa)$ (см. (10:1:h) из п. 10.1.1 и детали в п. 9.2.2).

Таким образом, мы последовательно определяем по индукции $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2, \bar{A}_3, \ldots, \bar{A}_\nu, \bar{A}_{\nu+1}$. Но $\bar{A}_{\nu+1}$ представляет собой одноэлементное

[1] Рассматриваемые случайные события должны считаться независимыми.

множество (см. (10:1:g) из п. 10.1.1); обозначим его единственный элемент через $\overline{\pi}$.

Это $\overline{\pi}$ представляет собой фактически имевшую место партию [1]. Следовательно, для игрока $k = 1, \ldots, n$ исходом этой партии будет $\mathcal{F}_k(\overline{\pi})$.

**11.2.2.** Тот факт, что стратегии всех игроков и выбор посредника определяют в совокупности фактическую партию — и тем самым ее исход для каждого игрока,— открывает возможность нового и значительно более простого описания игры Г.

Рассмотрим данного игрока $k\,(= 1, \ldots, n)$ и множество всех его возможных стратегий $\Sigma_k(\varkappa;\ D_\varkappa)$; для краткости будем обозначать его через $\Sigma_k$. Число стратегий, будучи чудовищным, очевидно, все же является конечным. Обозначим его через $\beta_k$, а сами стратегии — через $\Sigma_k^1, \ldots$ $\ldots, \Sigma_k^{\beta_k}$.

Образуем аналогично все возможные выборы посредника $\Sigma_0(\varkappa;\ A_\varkappa)$ или, для краткости, $\Sigma_0$. Их число снова будет конечным. Обозначим его через $\beta_0$, а сами выборы — через $\Sigma_0^1, \ldots, \Sigma_0^{\beta_0}$. Обозначим вероятности этих выборов соответственно через $p^1, \ldots, p^{\beta_0}$ (см. (11:С) из п. 11.1.3). Все эти вероятности неотрицательны, и их сумма равна единице (см. конец п. 11.1.3).

Фиксированный выбор всех стратегий и выборов посредника, скажем $\Sigma_k^{\tau_k}$, соответственно для $k = 1, \ldots, n$ и для $k = 0$, где

$$\tau_k = 1, \ldots, \beta_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

определяет партию $\overline{\pi}$ (см. конец п. 11.2.1) и ее исход $\mathcal{F}_k(\overline{\pi})$ для каждого игрока $k = 1, \ldots, n$. Положим

$$\text{(11:1)} \qquad \mathcal{F}_k(\overline{\pi}) = \mathcal{G}_k(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Вся партия состоит теперь из выбора каждым игроком $k$ своей стратегии $\Sigma_k^{\tau_k}$, т. е. числа $\tau_k = 1, \ldots, \beta_k$, и из случайного выбора посредника $\tau_0 = 1, \ldots, \beta_0$ соответственно с вероятностями $p^1, \ldots, p^{\beta_0}$.

Игрок $k$ должен выбирать свою стратегию, т. е. свое $\tau_k$, без какой-либо информации относительно выборов других игроков или относительно случайных событий (выбора посредника). Это должно быть так, поскольку вся информация, которой он может в какой-либо момент располагать, заключена уже в его стратегии $\Sigma_k = \Sigma_k^{\tau_k}$, т. е. в функции $\Sigma_k = \Sigma_k(\varkappa;\ D_\varkappa)$. (См. рассуждения в п. 11.1.1.) Даже если он имеет определенное мнение по поводу того, какими, вероятно, будут стратегии других игроков, то и оно должно уже содержаться в функции $\Sigma_k(\varkappa;\ D_\varkappa)$.

**11.2.3.** Все это, однако, означает, что мы вернули игру Г к ее простейшему описанию в рамках наиболее простых исходных положений, развитых в пп. 6.2.1—6.3.1. Мы имеем $n + 1$ ходов — один случайный ход и один личный ход для каждого из игроков $k = 1, \ldots, n$; каждый ход имеет фиксированное число альтернатив: $\beta_0$ для случайного хода и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ для личных ходов; каждый игрок должен сделать свой

---

[1]) Это индуктивное определение $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, \ldots, \overline{A}_\nu, \overline{A}_{\nu+1}$ является лишь математическим воспроизведением фактического течения партии. Читатель может проверить параллели проделанных здесь шагов.

выбор, не располагая абсолютно никакой информацией об исходе всех других выборов [1]).

Теперь мы можем избавиться даже от случайного хода. Если выборы игроков уже произведены, причем каждый игрок $k$ выбрал свое $\tau_k$, то влияние случайного хода сводится к следующему. Исход партии для игрока $k$ может быть любым из чисел

$$\mathcal{G}_k(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n), \quad \tau_0 = 1, \ldots, \beta_0$$

соответственно с вероятностями $p^1, \ldots, p^{\beta_0}$. Следовательно, математическое ожидание исхода равно

(11:2) $$\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \sum_{\tau_0=1}^{\beta_0} p^{\tau_0}\mathcal{G}_k(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n).$$

Суждения игрока должны направляться единственно этим математическим ожиданием, так как различные ходы и, в частности, случайный ход никак не связаны друг с другом [2]). Таким образом, единственными ходами, имеющими существенное значение, оказываются $n$ личных ходов игроков $k = 1, \ldots, n$.

Поэтому окончательная формулировка будет такой:

(11:D) Игра $n$ лиц Г, т. е. полная система ее правил, задается указанием следующих данных:

(11:D:a) Чисел $\beta_k$ для каждого $k = 1, \ldots, n$.

(11:D:b) Функций $\mathcal{K}_k = \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ для каждого $k = 1, \ldots, n$, причем $\tau_j = 1, \ldots, \beta_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Развитие партии игры Г заключается в следующем:

Каждый игрок $k$ выбирает число $\tau_k = 1, \ldots, \beta_k$. Каждый игрок должен произвести свой выбор, не зная абсолютно ничего о выборах других. После совершения всех выборов они сообщаются посреднику, который определяет, что исход партии для игрока $k$ есть $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

### 11.3. Роль стратегий в упрощенной форме игры

**11.3.** Отметим, что в построенной схеме не остается места для каких бы то ни было других «стратегий». Каждый игрок имеет один и только один ход; он должен его сделать, будучи в абсолютном неведении относительно чего-либо другого [3]). Эта полная кристаллизация проблемы в такой

---

[1]) Благодаря полной несвязанности $n+1$ ходов порядок, в котором они указываются, не играет никакой роли.

[2]) Мы имеем право на использование неизменного понятия математического ожидания, поскольку, как подчеркивалось в конце п. 5.2.2, мы вполне удовлетворены упрощенным понятием полезности. Это, в частности, исключает все те более сложные понятия «ожидания», которые в действительности являются попытками улучшить это наивное понятие полезности. Упомянем, например, «моральное ожидание» Д. Бернулли в «Петербургском парадоксе».

[3]) Вернемся к определению стратегии, данному в п. 11.1.1. В этой игре игрок $k$ имеет один и только один личный ход независимо от течения партии — ход $\mathcal{M}_k$. Он должен произвести свой выбор при ходе $\mathcal{M}_k$ с нулевой информацией. Таким образом, его стратегия является попросту определенным выбором для хода $\mathcal{M}_k$ — не больше и не меньше; иначе говоря, это есть в точности $\tau_k = 1, \ldots, \beta_k$.

Описание этой игры в терминах разбиений и сравнение изложенного выше с формальным описанием стратегии в (11:A) из п. 11.1.3 мы предоставляем читателю.

строгой и окончательной форме была достигнута в результате наших манипуляций, начиная с п. 11.1.1, где был осуществлен переход от первоначальных ходов к стратегиям. Поскольку мы теперь рассматриваем сами эти стратегии как ходы, в стратегиях более высокого порядка уже нет нужды.

### 11.4. Смысл ограничения, касающегося нулевой суммы

**11.4.** Мы завершим эти рассмотрения, определив в нашей окончательной схеме место игр с нулевой суммой (см. п. 5.2.1).

То, что игра Г является игрой с нулевой суммой, означает в обозначениях п. 10.1.1, что

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k(\pi) = 0 \tag{11:3}$$

для всех $\pi$ из $\Omega$. Если перейти от $\mathcal{F}_k(\pi)$ к $\mathcal{G}_k(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ в смысле п. 11.2.2, то это выражение перейдет в

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{G}_k(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n) = 0 \tag{11:4}$$

для всех $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$. Если окончательно ввести $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ в смысле п. 11.2.3, то мы получим

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) = 0 \tag{11:5}$$

для всех $\tau_1, \ldots, \tau_n$.

Наоборот, ясно, что условие (11:5) делает игру Г, которую мы определили в п. 11.2.3, игрой с нулевой суммой.

*Глава III*

# ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ. ТЕОРИЯ

## § 12. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ОБЗОР

### 12.1. Общие соображения

**12.1.1.** В предыдущей главе мы пришли к исчерпывающей формальной характеристике общей игры $n$ лиц (см. п. 10.1). Разработав точное понятие стратегии, мы, как это было показано, получили возможность заменить довольно сложную общую схему игры эквивалентной ей гораздо более простой частной схемой (см. п. 11.2). В дальнейшем мы будем пользоваться иногда одной формой, а иногда — другой, как нам будет удобно. Поэтому желательно дать этим формам конкретные названия. Мы будем их называть соответственно *позиционной* и *нормальной* формами игры.

Так как эти две формы эквивалентны, в нашей власти пользоваться в каждом конкретном случае той из них, которая технически более удобна. Мы действительно будем широко пользоваться такой возможностью и поэтому должны еще раз подчеркнуть, что это ничуть не затрагивает строгой обоснованности всех наших рассуждений.

Фактически нормальная форма более удобна для вывода общих теорем, в то время как позиционная форма более предпочтительна при анализе конкретных случаев; иными словами, нормальную форму выгодно использовать для установления свойств, общих всем играм, в то время как позиционная форма выявляет характерные различия игр и важные структурные свойства, которые определяют эти различия (см. для первой формы § 14, § 17, а для второй, например, § 15).

**12.1.2.** Поскольку формальное описание всех игр завершено, мы должны перейти к построению содержательной теории. Естественно ожидать, что систематическим методом для этой цели будет переход от простых игр к более сложным. Поэтому желательно упорядочить все игры по степени их сложности.

Мы уже классифицировали игры по числу их участников (при этом игры с $n$ участниками назывались играми $n$ лиц), а также по тому, являлись ли они играми с нулевой суммой или нет. Поэтому мы должны различать *игры $n$ лиц* с нулевой суммой, с одной стороны, и *общие игры $n$ лиц* — с другой. Далее будет показано, что общая игра $n$ лиц тесно связана с игрой $n+1$ лица с нулевой суммой: фактически теория первых будет получена как частный случай теории последних (см. п. 56.2.2.).

### 12.2. Игра с одним игроком

**12.2.1.** Мы начнем с нескольких замечаний, касающихся игры с одним игроком. В нормальной форме эта игра состоит в выборе числа $\tau = 1, \ldots, \beta$, после чего первый (и единственный) игрок получает $\mathscr{K}(\tau)$ [1]). Очевидно, что случай игры с нулевой суммой с одним игроком бессодержателен [2]) и по поводу него сказать нечего. Общий случай

[1]) См. (11:D:a), (11:D:b) в конце п. 11.2.3. Мы опускаем здесь индекс 1.

[2]) В этом случае $\mathscr{K}(\tau) = 0$; см. п. 11.4.

соответствует общей функции $\mathscr{K}(\tau)$, и «лучший», или «рациональный», способ действия, т. е. поведения в игре, очевидно, состоит в следующем: первый игрок должен выбрать $\tau = 1, \ldots, \beta$ так, чтобы максимизировать $\mathscr{K}(\tau)$.

Это крайнее упрощение игры с одним игроком, конечно, обусловливается тем, что наша переменная $\tau$ представляет не выбор (в ходе), а стратегию игрока, т. е. выражает полную его «теорию» относительно поведения во всех мыслимых ситуациях, которые могут встретиться в развитии игры. Необходимо помнить, что даже игра с одним игроком может иметь очень сложную структуру: она может содержать случайные ходы, так же как и ходы (единственного) игрока, каждый из которых может иметь большое число альтернатив, а объем информации, имеющейся в распоряжении игрока при каждом конкретном ходе, может изменяться любым предписанным способом.

**12.2.2.** Многочисленные хорошие примеры большого числа сложностей и тонкостей, которые могут возникнуть на этом пути, даются различными играми типа пасьянса или солитера. Однако существует важная возможность, которая, насколько нам известно, не отражается обычными играми с одним игроком. Это касается случая неполной информации, т. е. неэквивалентности предшествования и предварения ходов отдельного игрока (см. п. 6.4). Для того чтобы эквивалентность отсутствовала, необходимо, чтобы у игрока были два собственных хода $\mathscr{M}_\varkappa$ и $\mathscr{M}_\lambda$, ни в одном из которых он не был бы информирован о результатах выбора в другом. Такого состояния отсутствия информации достичь нелегко, но мы обсуждали в п. 6.4.2, как это можно осуществить путем «расщепления» игрока на два или более лица с идентичными интересами и несовершенными средствами общения между ними. Мы видели, в соответствующем месте, что бридж дает нам пример такого явления в игре двух лиц. Нетрудно построить аналогичную игру и для одного лица, но, к сожалению, известные виды «солитеров» таковыми [1]) не являются.

Тем не менее эта возможность имеет практическое значение для некоторых экономических ситуаций.

**12.2.3.** Проведенные рассуждения показывают также ограниченность чисто максимизационного подхода, т. е. подхода в духе «Робинзона Крузо». Для того чтобы получить задачу максимизации, необходимо было включить всю схему распределения в число правил игры, которые являются абсолютными, неприкосновенными и не подлежащими критике. Для того чтобы перенести распределение в сферу столкновений и конкуренции, т. е. стратегии игры, необходимо рассмотреть игры $n$ лиц с $n \geqq 2$ и в связи с этим пожертвовать простым максимизационным аспектом проблемы.

## 12.3. Случай и вероятность

**12.3.** Прежде чем продвигаться далее, мы хотим упомянуть, что обширная литература по «математическим играм», которые были развиты в основном в XVIII и XIX столетиях, имела дело преимущественно с тем аспектом теории, который является для нас уже пройденным этапом. Этим аспектом являлась оценка влияния случая. Конечно, это стало возможным в результате разработки и надлежащего применения теории

[1]) Существующие двойные солитеры являются конкурентными играми между двумя участниками, т. е. играми двух лиц.

вероятностей и в особенности понятия математического ожидания. Мы осуществили необходимые для этой цели построения в п. 11.2.3 [1, 2]).

Поэтому мы не будем больше интересоваться теми играми, в которых математическая задача состоит только в оценке роли случая, т. е. в вычислении вероятностей и математических ожиданий. Такие игры время от времени приводят к интересным упражнениям в теории вероятностей [3]), но мы надеемся, что читатель согласится с тем, что они не принадлежат к теории игр в собственном смысле слова.

### 12.4. Ближайшая цель

**12.4.** Теперь мы приступим к анализу более сложных игр. Общая игра с одним игроком нами уже рассмотрена, и простейшей среди оставшихся является игра двух лиц с нулевой суммой. Поэтому перейдем к ее рассмотрению.

В дальнейшем нам представится выбор: иметь ли дело с общей игрой двух лиц или же с игрой трех лиц с нулевой суммой. Окажется, что наша методика изложения сделает необходимым рассмотрение в первую очередь именно игры трех лиц с нулевой суммой. После этого мы распространим теорию на игры $n$ лиц с нулевой суммой (для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$), и только после этого нам будет удобно перейти к исследованию общих игр $n$ лиц.

## § 13. ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ

### 13.1. Основные определения

**13.1.1.** Нашей ближайшей целью является, как это было упомянуто в п. 12.4, исчерпывающее рассмотрение игр двух лиц с нулевой суммой. Для того чтобы проделать это математически строго, необходимо использовать символику исчисления функций (или по крайней мере некоторой его части) более широко, чем мы это делали до сих пор. Нам понадобятся понятия *функции*, *переменной*, *максимума* и *минимума*, а также использование двух последних как функциональных операций. Все это потребует определенных объяснений и примеров, которые будут здесь приведены.

После того, как это будет сделано, мы докажем некоторые теоремы относительно максимумов, минимумов, а также некоторой их комбинации — *седлового значения*. Эти теоремы будут играть важную роль в теории игр двух лиц с нулевой суммой.

---

[1]) Мы, конечно, ни в коей мере не намерены уменьшать огромную важность этих открытий. Только благодаря их силе мы теперь в состоянии излагать эту сторону вопроса так сжато, как мы это делаем. Нас интересуют те аспекты проблемы, которые не поддаются исследованию при помощи одной лишь теории вероятностей; следовательно, наше внимание должны привлекать именно эти аспекты, а не те, которые уже удовлетворительно исследованы.

[2]) Относительно важности связи между использованием математического ожидания и понятием численной полезности, см. п. 3.7 и предшествующие ему рассуждения.

[3]) Некоторые игры, подобные рулетке, имеют еще более специфический характер. Ясно, что в рулетке математическое ожидание игроков отрицательно. Таким образом, мотивы участия в такого рода играх нельзя понять, если идентифицировать денежные доходы с полезностями.

**13.1.2.** *Функцией* $\varphi$ является зависимость, которая указывает, как некоторые объекты $x$, $y$, ..., называемые *аргументами* $\varphi$, определяют объект $u$, называемый *значением* $\varphi$. Таким образом, $u$ определяется через $\varphi$ и через $x$, $y$, ...; эту зависимость мы будем обозначать символическим равенством

$$u = \varphi(x, y, \ldots).$$

В принципе необходимо различать саму функцию $\varphi$, которая является абстрактным объектом, выражающим только общую зависимость $u = \varphi(x, y, \ldots)$ от $x$, $y$, ..., и ее значение $\varphi(x, y, \ldots)$ для любых конкретных $x$, $y$, ... Однако при практическом использовании часто удобно писать $\varphi(x, y, \ldots)$, но с неопределенными $x$, $y$, ..., вместо простого $\varphi$ (см. приводимые ниже примеры (c) — (e); примеры (a), (b) записаны даже хуже; см. сноску 1 ниже).

Для того чтобы описать функцию $\varphi$, конечно, необходимо наряду с прочими вещами точно определить число переменных $x$, $y$, ... Так, существуют *функции от одной переменной* $\varphi(x)$, *функции от двух переменных* $\varphi(x, y)$ и т. д.

Несколько примеров:

(a) Арифметические операции $x+1$ и $x^2$ являются функциями от одной переменной [1]).

(b) Арифметические операции сложение и умножение $x+y$ и $xy$ являются функциями от двух переменных [1]).

(c) При любом фиксированном $k$ $\mathcal{F}_k(\pi)$ из п. 9.2.4 есть функция от одной переменной (от $\pi$). Но она может рассматриваться и как функция от двух переменных (от $k$ и $\pi$).

(d) При любом фиксированном $k$ $\sum_k(\varkappa, D_\varkappa)$ из (11:A) в п. 11.1.3 есть функция от двух переменных (от $\varkappa$ и $D_\varkappa$) [2]).

(e) При любом фиксированном $k$ $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ из п. 11.2.3 является функцией от $n$ переменных (от $\tau_1, \ldots, \tau_n$) [1]).

**13.1.3.** Для описания функции $\varphi$ в равной мере необходимо точно определить, для каких конкретных наборов переменных $x$, $y$, ... вообще определено значение $\varphi(x, y, \ldots)$. Эти наборы, т. е. эти комбинации $x$, $y$, ..., образуют *область определения* $\varphi$.

Примеры (a) — (e) указывают на некоторые из большого числа возможностей для областей определения функций: они могут состоять из арифметических или аналитических объектов, так же как и из любых других. Действительно:

(a) Мы можем считать, что область определения состоит здесь из всех целых чисел или из всех вещественных чисел.

(b) Все пары каждого из двух типов чисел, упоминаемых в примере (a), образуют область определения в этом случае.

(c) Областью определения является множество $\Omega$ всех объектов $\pi$, которые описывают партии игры $\Gamma$ (см. п. 9.1.1 и п. 9.2.4).

(d) Область определения состоит из пар, образованных целым положительным числом $\varkappa$ и множеством $D_\varkappa$.

(e) Область определения состоит из некоторых систем целых положительных чисел.

Функция $\varphi$ называется *арифметической функцией*, если ее переменными являются целые положительные числа; она называется *числовой*

---

[1]) Хотя они записаны и не в канонической форме $\varphi(x)$, $\varphi(x, y)$.

[2]) Мы можем также принимать $k$ в (d) и (e), равно как и $k$ в (c), за переменную.

*функцией*, если ее переменными являются вещественные числа; она называется *функцией множеств*, если ее переменными являются множества (как, например, $D_\varkappa$ в (d)).

В данный момент нас в основном интересуют арифметические и числовые функции.

Мы заканчиваем этот пункт замечанием, которое является естественным следствием нашей точки зрения на понятие функции. Оно состоит в том, что число переменных, область определения и зависимость значения функции от значений переменных составляют функцию как таковую, т. е. если две функции $\varphi$, $\psi$ имеют одни и те же переменные $x, y, \ldots$ и одну и ту же область определения и если $\varphi(x, y, \ldots) = \psi(x, y, \ldots)$ на всей этой области, то функции $\varphi$ и $\psi$ тождественны во всех отношениях [1]).

## 13.2. Операции max и min

**13.2.1.** Рассмотрим функцию $\varphi$, значениями которой являются вещественные числа

$$\varphi(x, y, \ldots).$$

Предположим сначала что $\varphi$ является функцией одной переменной. Если можно выбрать значение $x_0$ переменной $x$ так, что $\varphi(x_0) \geqq \varphi(x')$ для всех других значений $x'$, то мы говорим, что $\varphi$ имеет *максимум* $\varphi(x_0)$ и *достигает* его при $x = x_0$.

Заметим, что этот максимум $\varphi(x_0)$ определяется однозначно, т. е. максимум может достигаться при $x = x_0$ для нескольких различных значений $x_0$, но все они должны давать одно и то же значение $\varphi(x_0)$ [2]).

Мы будем обозначать это значение через $\max \varphi(x)$ и называть *максимальным значением* $\varphi(x)$.

Если мы заменим знак $\geqq$ на знак $\leqq$, то получим понятие *минимума* $\varphi$ как значения $\varphi(x_0)$, где $x_0$ — значение переменной, при котором $\varphi$ *достигает* минимума. И в этом случае может быть несколько таких $x_0$, но все они должны давать одно и то же значение $\varphi(x_0)$. Это значение обозначим через $\min \varphi(x)$ и назовем *минимальным значением* $\varphi$.

Отметим, что априори нельзя гарантировать существования ни $\max \varphi(x)$, ни $\min \varphi(x)$ [3]).

Однако если область определения $\varphi$, т. е. область, в которой изменяется переменная $x$, состоит только из конечного числа элементов, то существование как $\max \varphi(x)$, так и $\min \varphi(x)$ очевидно. Фактически этот случай будет иметь место для большинства функций, которые нам придется рассматривать [4]). Для остальных же функций это обстоятельство будет следствием их непрерывности и геометрической замкнутости

---

[1]) Понятие функции тесно связано с понятием множества, и все сказанное выше должно рассматриваться параллельно со сказанным в п. 8.2.

[2]) Доказательство. Рассмотрим два таких $x_0$, скажем $x_0'$ и $x_0''$. Тогда $\varphi(x_0') \geqq \varphi(x_0'')$ и $\varphi(x_0'') \geqq \varphi(x_0')$. Следовательно, $\varphi(x_0') = \varphi(x_0'')$.

[3]) Например, если $\varphi(x) \equiv x$ с областью определения, состоящей из всех вещественных чисел, то ни $\max \varphi(x)$, ни $\min \varphi(x)$ не существуют.

[4]) Типичные примеры: функции $\mathcal{K}_k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ из п. 11.2.3 (или из (e) в п. 13.1.2), $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ из п. 14.1.1.

их областей определения [1]). Во всяком случае, мы ограничиваем наши рассмотрения такими функциями, для которых max и min существуют.

**13.2.2.** Пусть теперь $\varphi$ будет функцией многих переменных $x$, $y$, $z$, ... Выделяя одну из них, например $x$, и фиксируя значения других переменных $y$, $z$, ..., мы можем рассматривать $\varphi(x, y, z, \ldots)$ как функцию одной переменной $x$. Следовательно, мы можем, как и в п. 13.2.1, образовать $\max \varphi(x, y, z, \ldots)$, $\min \varphi(x, y, z, \ldots)$ относительно $x$. Но так как мы можем проделать то же самое и для любой другой переменной $y$, $z$, ..., необходимо указать, что операции max, min относятся именно к переменной $x$. Мы сделаем это, написав $\max\limits_x \varphi(x, y, z, \ldots)$ и $\min\limits_x \varphi(x, y, z, \ldots)$ вместо неполных выражений $\max \varphi$, $\min \varphi$. Итак, мы можем теперь применить к функции $\varphi(x, y, z, \ldots)$ любой из операторов $\max\limits_x$, $\min\limits_x$, $\max\limits_y$, $\min\limits_y$, $\max\limits_z$, $\min\limits_z$. Все эти операторы различны, и наша запись становится недвусмысленной.

Даже для случая функции одной переменной эта запись является удобной, и мы будем ею пользоваться. Мы будем писать $\max\limits_x \varphi(x)$ и $\min\limits_x \varphi(x)$ вместо соответственно $\max \varphi(x)$ и $\min \varphi(x)$.

Иногда удобно или даже необходимо явно указывать область $S$ для максимума или минимума. Например, это будет в случае, когда функция $\varphi(x)$ определена также для некоторых значений $x$ вне $S$, а желательно указать ее минимум или максимум только в пределах $S$. В таком случае мы пишем

$$\max_{x \in S} \varphi(x), \quad \min_{x \in S} \varphi(x)$$

вместо $\max\limits_x \varphi(x)$, $\min\limits_x \varphi(x)$.

В некоторых других случаях может оказаться проще перечислить все значения $\varphi(x)$, скажем $a$, $b$, ..., чем выражать $\varphi(x)$ как функцию. Мы будем тогда писать $\max(a, b, \ldots)$ (или $\min(a, b, \ldots)$) вместо $\max\limits_x \varphi(x)$ (или соответственно $\min\limits_x \varphi(x)$) [2]).

**13.2.3.** Заметим, что, в то время как $\varphi(x, y, z, \ldots)$ является функцией от переменных $x$, $y$, $z$, ..., $\max\limits_x \varphi(x, y, z, \ldots)$, $\min\limits_x \varphi(x, y, z, \ldots)$ все еще являются функциями, но уже только от переменных $y$, $z$, ... Чисто графически $x$ по-прежнему присутствует в $\max\limits_x \varphi(x, y, z, \ldots)$. $\min\limits_x \varphi(x, y, z, \ldots)$ но эта буква уже больше не является переменной.

---

[1]) Типичными примерами являются функции $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, $\max\limits_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, $\min\limits_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ из п. 17.4, а также функции $\min\limits_{\tau_2} \sum\limits_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}$, $\max\limits_{\tau_1} \sum\limits_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\, \eta_{\tau_2}$ из п. 17.5.2. Для всех этих функций переменными являются $\vec{\xi}$ или $\vec{\eta}$ (или они обе), относительно которых берется соответствующий максимум и минимум.

Другой пример рассмотрен в п. 46.2.1 (см. особенно замечание на стр. 397), где рассмотрены математическая сторона этого вопроса, а также литература. Здесь нет необходимости на этом останавливаться, так как упомянутые выше примеры достаточно элементарны.

[2]) Конечно, $\max(a, b, \ldots)$ (равно как и $\min(a, b, \ldots)$) есть просто наибольшее (наименьшее) число среди чисел $a$, $b$, ...

Мы говорим, что операции $\max\limits_x$, $\min\limits_x$ *связывают* выступающую в качестве их индекса переменную $x$ [1]).

Так как $\max\limits_x \varphi(x, y, z, \ldots)$ и $\min\limits_x \varphi(x, y, z, \ldots)$ по-прежнему являются функциями переменных $y, z, \ldots$ [2]), мы можем пойти дальше и составить выражения

$$\max_y \max_x \varphi(x, y, z, \ldots), \quad \max_y \min_x \varphi(x, y, z, \ldots),$$
$$\min_y \max_x \varphi(x, y, z, \ldots), \quad \min_y \min_x \varphi(x, y, z, \ldots).$$

В равной мере мы можем рассматривать

$$\max_x \max_y \varphi(x, y, z, \ldots), \quad \max_x \min_y \varphi(x, y, z, \ldots)$$

и т. д. [3]), или использовать для максимизации или минимизации два других аргумента (если такие имеются), или использовать больше аргументов, чем два (если такие есть).

Наконец, после применения такого количества операций max или min, сколько имеется аргументов у $\varphi(x, y, z, \ldots)$, в любом порядке и комбинации, но в точности по одной для каждого аргумента $x, y, z, \ldots$, мы получим функцию, вовсе не зависящую от каких-либо аргументов, т. е. *постоянную*.

## 13.3. Вопросы коммутативности

**13.3.1.** Рассуждения, приведенные в п. 13.2.3, дают основания смотреть на $\max\limits_x$, $\min\limits_x$, $\max\limits_y$, $\min\limits_y$, $\max\limits_z$, $\min\limits_z$, ... как на *функциональные операторы*, каждый из которых переводит одну функцию в другую [4]). Мы уже видели, что можно применять несколько таких операторов последовательно. В этом случае на первый взгляд представляется существенным, в каком порядке они применяются.

Но действительно ли это столь важно? Сформулируем вопрос точно. Говорят, что два оператора *коммутируют*, если, в случае их последовательного применения (к одному и тому же объекту), порядок, в котором они применяются, не имеет значения. Теперь поставим вопрос: коммутируют друг с другом или нет $\max\limits_x$, $\min\limits_x$, $\max\limits_y$, $\min\limits_y$, $\max\limits_z$, $\min\limits_z$, ...?

Дадим ответ на этот вопрос. Для этой цели нам понадобится использовать только два аргумента, скажем $x$ и $y$, а в таком случае нет необходимости и в том, чтобы $\varphi$ была функцией от еще каких-либо переменных, кроме $x$ и $y$ [5]).

---

[1]) Хорошо известной операцией в анализе, которая «связывает» переменную $x$, является определенный интеграл: $\varphi(x)$ — функция от $x$, а $\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx$ есть константа.

[2]) Мы рассматривали $y, z, \ldots$ как постоянные параметры в п. 13.2.2. Но когда переменная связана, мы будем считать $y, z, \ldots$ переменными.

[3]) Заметим, что если применены две или более операции, то первой применяется самая правая операция, и она связывает соответствующую переменную; затем применяется следующая по порядку справа операция и т. д.

[4]) С числом аргументов, меньшим на единицу, так как каждая из этих операций связывает одну переменную.

[5]) Для целей дальнейшего анализа значения остальных аргументов можно фиксировать и рассматривать как постоянные.

Итак, рассмотрим функцию от двух переменных $\varphi(x, y)$. Ясно, что вопросы коммутативности заключаются в следующем: какие из трех написанных ниже равенств справедливы?

(13:1) $$\max_x \max_y \varphi(x, y) = \max_y \max_x \varphi(x, y),$$

(13:2) $$\min_x \min_y \varphi(x, y) = \min_y \min_x \varphi(x, y),$$

(13:3) $$\max_x \min_y \varphi(x, y) = \min_y \max_x \varphi(x, y)$$ [1].

Мы увидим, что равенства (13:1) и (13:2) справедливы, в то время как (13:3) — нет, т. е. любые два max или любые два min коммутируют, тогда как max и min, вообще говоря, не коммутируют. Мы найдем также критерий, который указывает, в каких частных случаях max и min коммутируют.

К вопросу о коммутативности max и min мы вернемся при рассмотрении игр двух лиц с нулевой суммой (см. п. 14.4.2. и п. 17.6).

**13.3.2.** Рассмотрим сначала равенство (13.1). Интуитивно должно быть ясно, что $\max_x \max_y \varphi(x, y)$ есть максимум $\varphi(x, y)$, если рассматривать $x$ и $y$ вместе, как единую переменную. Это значит, что для некоторых надлежащим образом выбранных $x_0$ и $y_0$

$$\varphi(x_0, y_0) = \max_x \max_y \varphi(x, y)$$

и для всех $x'$ и $y'$ должно быть $\varphi(x_0, y_0) \geqq \varphi(x', y')$.

Если, однако, желательно математическое доказательство, то мы приведем и его. Выберем $x_0$ так, чтобы функция $\max_y \varphi(x, y)$ достигала максимума по $x$ при $x = x_0$, а затем выберем $y_0$ так, чтобы функция $\varphi(x_0, y)$ достигала максимума по $y$ при $y = y_0$. В таком случае

$$\varphi(x_0, y_0) = \max_y \varphi(x_0, y) = \max_x \max_y \varphi(x, y)$$

и для всех $x'$ и $y'$

$$\varphi(x_0, y_0) = \max_y \varphi(x_0, y) \geqq \max_y \varphi(x', y) \geqq \varphi(x', y').$$

Это завершает доказательство.

Теперь, меняя ролями $x$ и $y$, мы убеждаемся, что $\max_y \max_x \varphi(x, y)$ равно максимуму $\varphi(x, y)$, если мы рассматриваем $x$, $y$ как одну переменную.

Итак, обе части равенства (13:1) обладают одними и теми же характеристическими свойствами и поэтому они равны друг другу. Это доказывает (13:1).

Дословно та же аргументация применяется к min вместо max, только в этом случае необходимо всюду вместо $\geqq$ написать $\leqq$. Это доказывает равенство (13:2).

Такой способ рассмотрения двух переменных $x$, $y$ как одной иногда оказывается очень удобным. Когда мы будем его применять (как, напри-

---

[1]) Комбинация $\min_x \max_y$ не требует отдельного рассмотрения, так как соответствующее равенство для нее получается из равенства для $\max_x \min_y$ переменной ролями $x$ и $y$.

мер, в п. 18.2.1 с $\tau_1$, $\tau_2$ и $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ соответственно вместо рассматриваемых нами сейчас $x$, $y$ и $\varphi(x, y)$), мы будем писать $\max_{x,y} \varphi(x, y)$ и $\min_{x,y} \varphi(x, y)$.

**13.3.3.** Здесь может оказаться полезной графическая иллюстрация. Предположим, что областью определения $\varphi$ для $x$, $y$ является конечное множество. Обозначим для простоты возможные значения $x$ (в этой области) через $1, \ldots, t$, а значения $y$ через $1, \ldots, s$. Тогда значения $\varphi(x, y)$, соответствующие всем $x$, $y$ в этой области, т. е. всем комбинациям $x = 1, \ldots t$, $y = 1, \ldots, s$, можно расположить в виде прямоугольной таблицы. Возьмем прямоугольник, у которого $t$ строк и $s$ столбцов. Будем использовать числа $x = 1, \ldots, t$ для нумерации строк, а числа $y = 1, \ldots, s$ для нумерации столбцов. На месте пересечения строки $x$ и столбца $y$ (или, говоря короче, в клетке $x$, $y$) напишем значение $\varphi(x, y)$ (табл. 1). Такая таблица чисел, известная в математике под названием *прямоугольной матрицы*, полностью описывает функцию $\varphi(x, y)$. Стоящие в таблице значения $\varphi(x, y)$ называются *элементами матрицы*.

Таблица 1

| | 1 | 2 | ... | $y$ | ... | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\varphi(1, 1)$ | $\varphi(1, 2)$ | ... | $\varphi(1, y)$ | ... | $\varphi(1, s)$ |
| 2 | $\varphi(2, 1)$ | $\varphi(2, 2)$ | ... | $\varphi(2, y)$ | ... | $\varphi(2, s)$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ |
| $x$ | $\varphi(x, 1)$ | $\varphi(x, 2)$ | ... | $\varphi(x, y)$ | ... | $\varphi(x, s)$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ |
| $t$ | $\varphi(t, 1)$ | $\varphi(t, 2)$ | ... | $\varphi(t, y)$ | ... | $\varphi(t, s)$ |

Заметим теперь, что $\max_{y} \varphi(x, y)$ есть максимум $\varphi(x, y)$ в строке $x$

$$\max_{x} \max_{y} \varphi(x, y)$$

является поэтому максимумом среди максимумов по строкам. С другой стороны,

$$\max_{x} \varphi(x, y)$$

есть максимум $\varphi(x, y)$ в столбце $y$. Следовательно, $\max_{y} \max_{x} \varphi(x, y)$ является максимумом среди максимумов по столбцам. Наши утверждения в п. 13.3.2 относительно (13:1) можно теперь сформулировать так: максимум среди максимумов по строкам — тот же, что и максимум среди

максимумов по столбцам; оба они являются абсолютным максимумом $\varphi(x, y)$ в матрице. Во всяком случае, в такой форме эти утверждения должны быть интуитивно ясны. Утверждения относительно (13:2) получаются тем же способом, если вместо max взять min.

## 13.4. Смешанный случай. Седловые точки

**13.4.1.** Рассмотрим теперь (13:3). Используя терминологию п. 13.3.3, мы можем сказать, что левая часть (13:3) есть максимум среди минимумов по строкам, а правая часть — минимум среди максимумов по столбцам. Эти два числа не являются ни абсолютными максимумами, ни абсолютными минимумами, и наперед не видно, почему они должны быть равны. Они и в самом деле не равны. Две функции, для которых они различны, приведены в табл. 2 и табл. 3. Функция, для которой они равны, приведена в табл. 4. (Все эти таблицы должны быть истолкованы в смысле объяснений к табл. 1 в п. 13.3.3).

Таблица 2. $t=s=2$

| | 1 | 2 | Минимум по строкам |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | —1 | —1 |
| 2 | —1 | 1 | —1 |
| Максимум по столбцам | 1 | 1 | |

Максимум среди минимумов по строкам = —1.
Минимум среди максимумов по столбцам = 1.

Таблица 3. $t=s=3$

| | 1 | 2 | 3 | Минимум по строкам |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | —1 | 1 | —1 |
| 2 | 1 | 0 | —1 | —1 |
| 3 | —1 | 1 | 0 | —1 |
| Максимум по столбцам | 1 | 1 | 1 | |

Максимум среди минимумов по строкам = —1.
Минимум среди максимумов по столбцам = 1.

Таблица 4. $t=s=2$

| | 1 | 2 | Минимум по строкам |
|---|---|---|---|
| 1 | —2 | 1 | —2 |
| 2 | —1 | 2 | —1 |
| Максимум по столбцам | —1 | 2 | |

Максимум среди минимумов по строкам = —1.
Минимум среди максимумов по столбцам = —1.

Эти таблицы, так же как и общий вопрос о коммутативности max и min, будут играть существенную роль в теории игр двух лиц с нулевой суммой. Действительно, мы увидим, что они представляют примеры игр, которые являются типичными для некоторых важных возможностей в этой теории (см. п. 18.1.2). Но в данный момент мы хотим обсудить их сами по себе, без каких-либо ссылок на их приложения.

**13.4.2.** Так как равенство (13:3) не является ни всегда истинным, ни всегда ложным, желательно рассмотреть связь между двумя его частями

(13:4) $$\max_x \min_y \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad \min_y \max_x \varphi(x, y)$$

более полно. Таблицы 2—4, которые в известной степени иллюстрируют поведение (13:3), наводят на некоторые соображения о возможном соотношении между этими выражениями.

В частности:

(13:A) Во всех трех таблицах левая часть (13:3) (т. е. первое выражение в (13:4)) $\leqq$ правой части (13:3) (т. е. второго выражения в (13:4)).

(13:B) В табл. 4, для которой (13:3) выполняется, существует элемент матрицы, который является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. (Таким элементом оказывается здесь —1 в левом нижнем углу матрицы.) В других таблицах — табл. 2, табл. 3 — где (13:3) не выполняется, такого элемента нет.

Целесообразно ввести общее понятие, которое описывает свойства элемента, упомянутого в (13:B). Введем следующее определение.

Пусть $\varphi(x, y)$ — некоторая функция двух аргументов. В этом случае пара $x_0$, $y_0$ называется *седловой точкой* функции $\varphi$, если $\varphi(x, y_0)$ принимает максимальное значение при $x = x_0$, а $\varphi(x_0, y)$ принимает минимальное значение при $y = y_0$.

Причины для использования термина *седловая точка* таковы. Представим себе матрицу элементов $x$, $y$ ($x = 1, \ldots, t$, $y = 1, \ldots, s$) как карту горной местности; высотой горы над элементом $x$, $y$ будем считать значение $\varphi(x, y)$. Тогда определение седловой точки $x_0$, $y_0$ действительно, по существу, описывает *седло*, или *перевал* в этой точке (т. е. над элементом $x_0$, $y_0$); строка $x_0$ является горным хребтом, а столбец $y_0$ — дорогой (от долины к долине), которая пересекает этот хребет.

Формула (13:C*) в п. 13.5.2 тоже находится в соответствии с этой интерпретацией [1]).

**13.4.3.** Табл. 2 и табл. 3 показывают, что функция $\varphi$ может не иметь седловой точки вообще. С другой стороны, возможно, что функция обладает и несколькими седловыми точками. Но на всех седловых точках $x_0$, $y_0$, если они вообще существуют, функция должна достигать одного и того же значения $\varphi(x_0, y_0)$ [2]). Мы обозначим это значение, если оно вообще существует, через $\mathrm{Sa}_{x/y}\, \varphi(x, y)$ — *седловое значение* $\varphi(x, y)$ [3]).

Теперь мы сформулируем теоремы, которые обобщают замечания (13:A), (13:B). Мы обозначаем их через (13:A*), (13:B*) (подчеркнем, что они справедливы для всех функций $\varphi(x, y)$).

---

[1]) Все это тесно связано с некоторыми более общими математическими теориями, содержащими экстремальные проблемы, вариационное исчисление и т. д., хотя, строго говоря, не является частным случаем этих теорий. См. M. M o r s e, The Critical point of functions and the calculus of variations in the large, *Bull. Am. Math. Society*, Jan.— Feb. 1929, pp. 38 cont., а также What is analysis in the large? *Am. Math. Monthly* XLIX (1942), 358 cont.

[2]) Это следует из (13:C*) в п. 13.5.2. Существует простое непосредственное доказательство этого утверждения. Рассмотрим две седловые точки $x_0$, $y_0$: скажем $x_0'$, $y_0'$ и $x_0''$, $y_0''$.

Тогда

$$\varphi(x_0', y_0') = \max_x \varphi(x, y_0') \geqq \varphi(x_0'', y_0') \geqq \min_y \varphi(x_0'', y) = \varphi(x_0'', y_0''),$$

т. е. $\varphi(x_0', y_0') \geqq \varphi(x_0'', y_0'')$. Аналогично $\varphi(x_0'', y_0'') \geqq \varphi(x_0', y_0')$. Следовательно, $\varphi(x_0', y_0') = \varphi(x_0'', y_0'')$.

[3]) Ясно, что операция $\mathrm{Sa}_{x/y}\varphi(x, y)$ связывает обе переменные $x$, $y$. См. п. 13.2.3.

(13:А*) Всегда

$$\max_x \min_y \varphi(x, y) \leqq \min_y \max_x \varphi(x, y).$$

(13:В*) Мы имеем

$$\max_x \min_y \varphi(x, y) = \min_y \max_x \varphi(x, y)$$

тогда и только тогда, когда существует седловая точка $x_0$, $y_0$ функции $\varphi$.

## 13.5. Доказательства основных фактов

**13.5.1.** Во-первых, определим для каждой функции $\varphi(x, y)$ два множества: $A^\varphi$ и $B^\varphi$. $\min\limits_y \varphi(x, y)$ является функцией от $x$. Пусть $A^\varphi$ будет множеством всех тех $x_0$, при которых эта функция достигает своего максимального значения. Аналогично $\max\limits_x \varphi(x, y)$ является функцией от $y$. Пусть $B^\varphi$ будет множеством всех тех $y_0$, при которых эта функция достигает своего минимального значения.

Теперь мы докажем (13:А*) и (13:В*).

Доказательство (13:А*). Выберем $x_0$ из $A^\varphi$ и $y_0$ из $B^\varphi$. Тогда

$$\max_x \min_y \varphi(x, y) = \min_y \varphi(x_0, y) \leqq \varphi(x_0, y_0) \leqq \max_x \varphi(x, y_0) = \min_y \max_x \varphi(x, y),$$

т. е. $\max\limits_x \min\limits_y \varphi(x, y) \leqq \min\limits_y \max\limits_x \varphi(x, y)$, что и требовалось.

Доказательство необходимости существования седловой точки в (13:В*). Предположим, что

$$\max_x \min_y \varphi(x, y) = \min_y \max_x \varphi(x, y).$$

Выберем $x_0$ в $A^\varphi$ и $y_0$ в $B^\varphi$; тогда мы имеем

$$\max_x \varphi(x, y_0) = \min_y \max_x \varphi(x, y) = \max_x \min_y \varphi(x, y) = \min_y \varphi(x_0, y).$$

Следовательно, для любого $x'$

$$\varphi(x', y_0) \leqq \max_x \varphi(x, y_0) = \min_y \varphi(x_0, y) \leqq \varphi(x_0, y_0),$$

т. е. $\varphi(x_0, y_0) \geqq \varphi(x', y_0)$, так что $\varphi(x, y_0)$ принимает свое максимальное значение при $x = x_0$. Точно так же для любого $y'$

$$\varphi(x_0, y') \geqq \min_y \varphi(x_0, y) = \max_x \varphi(x, y_0) \geqq \varphi(x_0, y_0),$$

т. е. $\varphi(x_0, y_0) \leqq \varphi(x_0, y')$; поэтому $\varphi(x_0, y)$ достигает минимума при $y = y_0$. Следовательно, пара $x_0$, $y_0$ составляет седловую точку.

Доказательство достаточности существования седловой точки в (13:В*). Пусть $x_0$, $y_0$ — седловая точка. Тогда

$$\max_x \min_y \varphi(x, y) \geqq \min_y \varphi(x_0, y) = \varphi(x_0, y_0),$$

$$\min_y \max_x \varphi(x, y) \leqq \max_x \varphi(x, y_0) = \varphi(x_0, y_0).$$

Следовательно,

$$\max_x \min_y \varphi(x, y) \geqq \varphi(x_0, y_0) \geqq \min_y \max_x \varphi(x, y).$$

С учетом (13:A*) это дает

$$\max_x \min_y \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) = \min_y \max_x \varphi(x, y)$$

и, следовательно, нужное равенство.

**13.5.2.** Рассуждения п. 13.5.1 приводят к некоторым дальнейшим результатам, которые имеет смысл отметить. Мы предположим теперь существование седловой точки, т. е. справедливость равенства (13:B*).

Для каждой седловой точки $x_0$, $y_0$

(13:C*) $$\varphi(x_0, y_0) = \max_x \min_y \varphi(x, y) = \min_y \max_x \varphi(x, y).$$

Доказательство. Это совпадает с последним равенством в доказательстве достаточности (13:B*) в п. 13.5.1.

(13:D*) $x_0$, $y_0$ образуют седловую точку тогда и только тогда, когда $x_0$ принадлежит $A^\varphi$, а $y_0$ принадлежит $B^\varphi$ [1]).

Доказательство достаточности. Пусть $x_0$ принадлежит $A^\varphi$, а $y_0$ принадлежит $B^\varphi$. Тогда доказательство необходимости (13:B*) в п. 13.5.1 показывает, что пара $x_0$, $y_0$ является седловой точкой.

Доказательство необходимости. Пусть $x_0$, $y_0$ — седловая точка. Воспользуемся (13:C*). Для каждого $x'$ должно быть

$$\min_y \varphi(x', y) \leqq \max_x \min_y \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) = \min_y \varphi(x_0, y),$$

т. е. $\min_y \varphi(x_0, y) \geqq \min_y \varphi(x', y)$; поэтому $\min_y \varphi(x, y)$ достигает своего максимального значения при $x = x_0$. Следовательно, $x_0$ принадлежит $A^\varphi$. Аналогично для каждого $y'$

$$\max_x \varphi(x, y') \geqq \min_y \max_x \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) = \max_x \varphi(x, y_0),$$

т. е. $\max_x \varphi(x, y_0) \leqq \max_x \varphi(x, y')$; поэтому $\max_x \varphi(x, y)$ достигает своего минимального значения при $y = y_0$. Следовательно, $y_0$ принадлежит $B^\varphi$. Это завершает доказательство.

Теоремы (13:C*), (13:D*) указывают, между прочим, на недостатки аналогии, описанной в конце п. 13.4.2, т. е. они показывают, что наше понятие седловой точки уже, чем обиходное представление о седле, или перевале. Действительно, (13:C*) указывает, что все седла, в предположении их существования, имеют одну и ту же высоту. А (13:D*) утверждает, что, если мы изобразим множества $A^\varphi$, $B^\varphi$ как два интервала чисел [2]), то все седла образуют область, которая имеет форму прямоугольного плато [3]).

[1]) Только при наших предположениях, сформулированных в начале этого пункта. В противном случае седловых точек нет вообще.

[2]) Если $x$, $y$ — целые положительные числа, то это, конечно, можно осуществить при помощи двух соответствующих преобразований их областей.

[3]) Общие математические понятия, упомянутые в сноске 1 на стр. 121, свободны от этих недостатков. Они точно соответствуют обиходному представлению о перевале.

**13.5.3.** Мы закончим этот раздел доказательством существования седловой точки для одного частного вида $x$, $y$ и $\varphi(x, y)$. Далее станет видно, что общность этого частного случая не является незначительной. Пусть дана функция $\psi(x, u)$ двух аргументов $x$, $u$. Рассмотрим все функции $f(x)$ аргумента $x$, которые принимают значения в области изменения $u$. Сохраним теперь аргумент $x$, а вместо аргумента $u$ используем саму функцию $f$ [1]. Выражение $\psi(x, f(x))$ определяется для любых $x$ и $f$; следовательно, мы можем трактовать $\psi(x, f(x))$ как функцию аргументов $x$, $f$ и взять ее вместо $\varphi(x, y)$.

Мы хотим доказать, что для этих $x$, $f$ и $\psi(x, f(x))$ (вместо $x$ и $y$ и $\varphi(x, y)$) существует седловая точка, т. е. что

(13:E) $$\max_x \min_f \psi(x, f(x)) = \min_f \max_x \psi(x, f(x)).$$

Доказательство. Выберем для каждого $x$ значение $u_0$ так, чтобы было $\psi(x, u_0) = \min\limits_u \psi(x, u)$. Это $u_0$ зависит от $x$; следовательно, мы можем определить функцию $f_0$ равенством $u_0 = f_0(x)$. Тем самым $\psi(x, f_0(x)) = \min\limits_u \psi(x, u)$. Следовательно,

$$\max_x \psi(x, f_0(x)) = \max_x \min_u \psi(x, u).$$

Тем более

(13:F) $$\min_f \max_x \psi(x, f(x)) \leqq \max_x \min_u \psi(x, u).$$

Далее, $\min\limits_f \psi(x, f(x))$ есть то же самое, что и $\min\limits_u \psi(x, u)$, так как $f$ входит в это выражение только через свое значение при данном $x$, т. е. $f(x)$, для которого мы можем написать $u$. Таким образом, $\min\limits_f \psi(x, f(x)) = \min\limits_u \psi(x, u)$ и потому

(13:G) $$\max_x \min_f \psi(x, f(x)) = \max_x \min_u \psi(x, u).$$

Соотношения (13:F) и (13:G) вместе устанавливают справедливость знака $\geqq$ в (13:E). Знак $\leqq$ в (13:E) имеет место благодаря (13:A*). Следовательно, в (13:E) мы имеем знак равенства, т. е. доказательство завершено.

## § 14. ВПОЛНЕ ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИГРЫ

### 14.1. Формулировка проблемы

**14.1.1.** Теперь мы приступаем к рассмотрению игры двух лиц с нулевой суммой. Начнем с использования нормальной формы.

В соответствии с этим игра состоит из двух ходов: игрок 1 выбирает число $\tau_1 = 1, \ldots, \beta_1$, а игрок 2 выбирает $\tau_2 = 1, \ldots, \beta_2$ (каждый выбор производится при полном незнании выбора другого игрока), после чего игроки 1 и 2 получают соответственно выигрыши $\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2)$ и $\mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2)$ [2].

---

[1]) Читателю предлагается отдать себе отчет в том, что, хотя $f$ является функцией, она вполне может быть аргументом другой функции.

[2]) См. (11:D) в п. 11.2.3.

Так как мы рассматриваем игру с нулевой суммой, согласно п. 11.4 мы имеем

$$\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2) + \mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2) \equiv 0.$$

Мы предпочитаем выразить это следующим образом:

$$\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2) \equiv \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2), \quad \mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2) \equiv -\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2).$$

Попытаемся теперь понять, как очевидные желания игроков 1 и 2 определяют их действия, т. е. выборы $\tau_1$ и $\tau_2$.

Разумеется, необходимо снова напомнить, что $\tau_1$ и $\tau_2$ означают, в конечном счете, не выборы (ходы) игроков, а их стратегии, т. е. их полные «теории», или «планы» относительно игры.

Мы пока оставим это в стороне. Впоследствии мы вернемся к такому пониманию $\tau_1$ и $\tau_2$ и проанализируем течение партии.

**14.1.2.** Желания обоих игроков достаточно просты. Первый стремится сделать $\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2) \equiv \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ максимальным, а второй стремится сделать максимальным $\mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2) \equiv -\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$, т. е. первый желает максимизировать, а второй желает минимизировать $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$.

Итак, интересы двух игроков сосредоточены на одном и том же объекте: на единственной функции $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$. Но их цели, как этого и следует ожидать в игре двух лиц с нулевой суммой, прямо противоположны: первый хочет максимизировать, второй хочет минимизировать. Специфической трудностью во всем этом является то, что ни один из игроков не контролирует полностью объекта своих стремлений, значение $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$, т. е. обе переменные $\tau_1$ и $\tau_2$. Первый хочет максимизировать, но он контролирует только $\tau_1$, второй хочет минимизировать, но он контролирует только $\tau_2$. Что же на самом деле произойдет?

Трудность заключается в том, что никакой конкретный выбор, скажем $\tau_1$, не может сам по себе сделать $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ бо́льшим или меньшим. Вообще влияние $\tau_1$ на $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ является неопределенным; оно становится определенным только в соединении с выбором другой переменной, в данном случае $\tau_2$. (Ср. соответствующую трудность в экономике, рассмотренную в п. 2.2.3.)

Заметим, что с точки зрения игрока 1, который выбирает переменную, скажем, $\tau_1$, другая переменная, конечно, не может рассматриваться как случайное событие. Другая переменная, в данном случае $\tau_2$, зависит от воли другого игрока, который должен рассматриваться в свете той же «рациональности», как и сам первый. (См. также конец п. 2.2.3 и п. 2.2.4.)

**14.1.3.** На этой стадии удобно использовать графическое представление, введенное в п. 13.3.3. Представим $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ в виде прямоугольной матрицы: образуем прямоугольник из $\beta_1$ строк и $\beta_2$ столбцов, используя числа $\tau_1 = 1, \ldots, \beta_1$ для нумерации первых и числа $\tau_2 = 1, \ldots, \beta_2$ для нумерации вторых, и в клетку с номерами $\tau_1$ и $\tau_2$ впишем элемент матрицы $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$. (См. табл. 1 в п. 13.3.3. Участвующие там $\varphi$, $x$, $y$, $t$, $s$ соответствуют нашим $\mathcal{K}$, $\tau_1$, $\tau_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ (табл. 5).)

Следует отдать себе отчет в том, что на функцию $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ не накладывается никаких ограничений, т. е. мы свободны выбрать ее по своему желанию [1]). Действительно, любая данная функция $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ определяет

[1]) Область определения, конечно, предписывается: она состоит из всех пар $\tau_1$, $\tau_2$, где $\tau_1 = 1, \ldots, \beta_1$, $\tau_2 = 1, \ldots, \beta_2$. Это конечное множество, так что все max и min существуют, см. конец п. 13.2.1.

Таблица 5

| | 1 | 2 | ... | $\tau_2$ | ... | $\beta_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\mathcal{K}(1, 1)$ | $\mathcal{K}(1, 2)$ | ... | $\mathcal{K}(1, \tau_2)$ | ... | $\mathcal{K}(1, \beta_2)$ |
| 2 | $\mathcal{K}(2, 1)$ | $\mathcal{K}(2, 2)$ | ... | $\mathcal{K}(2, \tau_2)$ | ... | $\mathcal{K}(2, \beta_2)$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ |
| $\tau_1$ | $\mathcal{K}(\tau_1, 1)$ | $\mathcal{K}(\tau_1, 2)$ | ... | $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ | ... | $\mathcal{K}(\tau_1, \beta_2)$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ |
| $\beta_1$ | $\mathcal{K}(\beta_1, 1)$ | $\mathcal{K}(\beta_1, 2)$ | ... | $\mathcal{K}(\beta_1, \tau_2)$ | ... | $\mathcal{K}(\beta_1, \beta_2)$ |

игру двух лиц с нулевой суммой в смысле (11:D) п. 11.2.3 путем простого определения

$$\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2) \equiv \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2), \quad \mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2) \equiv -\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$$

(см. п. 14.1.1). Желания игроков 1 и 2, как это описано в конце предыдущего пункта, можно представить себе следующим образом. Оба игрока заинтересованы только в значениях элемента матрицы $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$. Игрок 1 старается максимизировать его, но он контролирует только строку, т. е. число $\tau_1$. Игрок 2 старается минимизировать его, но он контролирует только столбец, т. е. число $\tau_2$.

Мы должны теперь попытаться найти удовлетворительную интерпретацию для выхода из этого своеобразного перетягивания каната [1]).

## 14.2. Минорантная и мажорантная игры

14.2. Вместо того чтобы пытаться непосредственно приступать к разрешению самой игры Г, к чему мы еще не подготовлены, рассмотрим две другие игры, которые тесно связаны с игрой Г и которые поддаются непосредственному обсуждению.

Ясно, что трудность при анализе игры Г заключается в том, что игрок 1, выбирая $\tau_1$, не знает, с каким выбором $\tau_2$ игрока 2 он столкнется, и наоборот. Поэтому сравним игру Г с другими играми, для которых эта трудность не возникает.

Определим первую игру $\Gamma_1$, которая совпадает с игрой Г во всех деталях, за исключением того, что в $\Gamma_1$ игрок 1 делает свой выбор $\tau_1$

---

[1]) Конечно, дело в том, что это не просто перетягивание. Два игрока имеют противоположные цели, но средства, при помощи которых они продвигаются к ним, не противоположны друг другу. Напротив, эти «средства», т. е. выборы $\tau_1$ и $\tau_2$, очевидно, независимы. Это противоречие характеризует проблему в целом.

до того, как игрок 2 сделает свой выбор $\tau_2$, а затем игрок 2 делает свой выбор, зная, какое значение придал игрок 1 переменной $\tau_1$ (т. е. ход первого игрока предшествует ходу второго) [1]. Очевидно, в этой игре $\Gamma_1$ игрок 1 находится в невыгодном положении по сравнению с его положением в исходной игре $\Gamma$. Поэтому мы будем называть $\Gamma_1$ *минорантной игрой*, соответствующей игре $\Gamma$.

Аналогично определим вторую игру $\Gamma_2$, которая также совпадает с $\Gamma$ во всех деталях, за исключением того, что теперь игрок 2 делает свой выбор $\tau_2$ до того, как игрок 1 сделал свой выбор $\tau_1$, и лишь затем игрок 1 совершает выбор, зная, какое значение придал игрок 2 переменной $\tau_2$ (т. е. ход второго игрока предшествует ходу первого) [2]. Очевидно, в этой игре $\Gamma_2$ игрок 1 находится в выгодном положении по сравнению с его положением в игре $\Gamma$. Будем поэтому называть $\Gamma_2$ *мажорантной игрой*, соответствующей игре $\Gamma$.

Введением этих двух игр $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ достигается следующее. Должно быть очевидно из общих соображений, а мы установим это также и путем строгих рассуждений, что для каждой из игр $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ ясен «наилучший способ игры», т. е. ясна теория рационального поведения. С другой стороны, очевидно, что игра $\Gamma$ лежит «между» играми $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$. Например, с точки зрения игрока 1, игра $\Gamma_1$ всегда менее, а игра $\Gamma_2$ всегда более выгодна, чем игра $\Gamma$ [3]. Таким образом, можно ожидать, что $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ описывают нижнюю и верхнюю границы для важнейших характеристик игры $\Gamma$. Конечно, мы будем рассматривать все это совершенно строгим образом. Априори эти «границы» могут существенно отличаться друг от друга и оставлять значительную неопределенность для соответствующих характеристик игры $\Gamma$. Действительно, на первый взгляд может показаться, что так обстоит дело для многих игр. Но, действуя этим методом и введя некоторые дополнительные операции, мы добьемся того, что получим в конце концов точную теорию для игры $\Gamma$, которая полностью ответит на все вопросы.

## 14.3. Рассмотрение вспомогательных игр

**14.3.1.** Рассмотрим сначала минорантную игру $\Gamma_1$. После того как игрок 1 выберет $\tau_1$, игрок 2 выбирает $\tau_2$, зная значение $\tau_1$. Так как второй игрок желает минимизировать $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$, он, несомненно, выберет $\tau_2$ так, чтобы сделать значение $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ минимальным при данном $\tau_1$. Другими словами, когда игрок 1 выбирает определенное значение $\tau_1$, он уже может предвидеть, каково будет значение $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$. Это будет $\min\limits_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ [4]. Это функция только от $\tau_1$. Поскольку игрок 1 хочет максимизировать $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ и так как его выбор $\tau_1$ ведет к значению $\min\limits_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$, которое зависит только от $\tau_1$ и совсем не зависит от $\tau_2$, он выберет $\tau_1$ так, чтобы максимизировать $\min\limits_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$. Таким образом,

---

[1] Таким образом, игра $\Gamma_1$, хотя она и чрезвычайно проста, уже не является игрой в нормальной форме.

[2] Таким образом, игра $\Gamma_2$, хотя она и чрезвычайно проста, уже не является игрой в нормальной форме.

[3] Конечно, чтобы быть точными, мы должны говорить «не более» вместо «менее» и «не менее» вместо «более».

[4] Отметим, что $\tau_2$ не обязано определяться единственным образом: для данного $\tau_1$ функция $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$, как функция $\tau_2$, может достигать своего минимума при нескольких значениях $\tau_2$. Однако значение $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ будет одним и тем же для всех этих $\tau_2$, а именно единственно определяемым минимальным значением $\min\limits_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$. (См. п. 13.2.1).

окончательное значение этой величины будет

$$\max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)^{1)}.$$

Резюмируем:

(14:A:a) Оптимальным способом игры (стратегией) для первого игрока в минорантной игре $\Gamma_1$ является выбор $\tau_1$, принадлежащего множеству $A$, где $A$ — множество тех $\tau_1$, для которых $\min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ достигает своего максимального значения $\max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$.

(14:A:b) Оптимальным способом игры (стратегией) для второго игрока является следующий. Если первый игрок выбрал определенное значение $\tau_1$ [2]), то $\tau_2$ должно быть выбрано из множества $B_{\tau_1}$, где $B_{\tau_1}$ — множество тех $\tau_2$, для которых $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ достигает своего минимального значения $\min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ [3]).

На основании этого мы можем утверждать следующее:

(14:A:c) Если оба игрока играют минорантную игру $\Gamma_1$ оптимальным образом, т. е. если $\tau_1$ принадлежит $A$ и $\tau_2$ принадлежит $B_{\tau_1}$, то значение $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ будет равно

$$v_1 = \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2).$$

Истинность высказанного выше утверждения в математическом отношении устанавливается непосредственно, если вспомнить определения множеств $A$ и $B_{\tau_1}$ и соответственно подставить их в утверждение. Мы оставляем это упражнение, которое является лишь классической операцией «подстановки определенного в определяемое», читателю. Кроме того, наше утверждение должно быть ясно и из общих соображений.

Все рассмотренное делает очевидным, что каждая партия игры $\Gamma_1$ имеет определенное значение для каждого игрока. Этим значением для игрока 1 является упоминавшееся выше $v_1$ и, следовательно, $-v_1$ для игрока 2.

Еще более детальное представление о смысле $v_1$ можно получить следующим путем:

(14:A:d). Игрок 1 может, играя надлежащим образом, обеспечить себе выигрыш $\geqq v_1$ независимо от того, что делает игрок 2. Игрок 2, играя надлежащим образом, может обеспечить себе выигрыш $\geqq -v_1$ независимо от того, что делает игрок 1.

---

1) Из тех же самых соображений, что и в предыдущей сноске, значение $\tau_1$ может определяться неоднозначно, но величина $\min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ будет одной и той же для всех рассматриваемых $\tau_1$, а именно однозначно определяемым максимальным значением

$$\max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2).$$

2) Второй информирован о значении $\tau_1$, когда приступает к выбору $\tau_2$,— это правило игры $\Gamma_1$. В этом случае из определения стратегии следует (см. п. 4.1.2 и конец п. 11.1.1), что для второго игрока должны быть предусмотрены выборы $\tau_2$ для каждого значения $\tau_1$, независимо от того, хорошо ли играет первый или нет, т. е. независимо от того, принадлежит ли выбранное значение $A$.

3) Вообще, $\tau_1$ рассматривается как известный параметр, от которого зависит все, и в том числе множество $B_{\tau_1}$, из которого должно быть выбрано $\tau_2$.

(Доказательство. Первое устанавливается выбором произвольного $\tau_1$ из $A$. Второе устанавливается произвольным выбором $\tau_2$ из $B_{\tau_1}$ [1]). Мы снова оставляем детали читателю; они совсем тривиальны.)

Сказанное выше можно эквивалентно сформулировать так:

(14:A:e) Игрок 2, играя надлежащим образом, может добиться того, что выигрыш игрока 1 будет $\leqq v_1$, т. е. воспрепятствовать ему выиграть $> v_1$ независимо от действий игрока 1. Игрок 1, играя надлежащим образом, может добиться того, что выигрыш игрока 2 будет $\leqq -v_1$, т. е. воспрепятствовать ему выиграть $> -v_1$ независимо от действий игрока 2.

**14.3.2.** Мы провели обсуждение игры $\Gamma_1$ весьма детально, хотя «решение» здесь довольно очевидно. То есть вполне возможно, что кто-нибудь, внимательно посмотрев на ситуацию, легко придет к тем же самым выводам «нематематически», используя только общие соображения. Тем не менее, мы вынуждены были обсудить этот случай так подробно, потому что он является прототипом для ряда других, где ситуация будет гораздо менее доступна «нематематическому» взгляду. Кроме того, все существенные элементы сложности, так же как и основания для преодоления их, на самом деле присутствуют уже в этом простейшем случае. Рассматривая соответствующие положения этих элементов сложности, ясные в данном случае, можно будет отчетливо представить себе их в последующих, более сложных случаях. И только таким образом можно будет точно судить о том, чего можно достичь каждым конкретным способом.

**14.3.3.** Рассмотрим теперь мажорантную игру $\Gamma_2$.

Игра $\Gamma_2$ отличается от игры $\Gamma_1$ только тем, что в ней игроки 1 и 2 поменялись ролями. Теперь игрок 2 должен выбирать $\tau_2$ первым, а затем игрок 1 выбирает $\tau_1$, зная значение $\tau_2$.

Но, говоря, что $\Gamma_2$ получается из $\Gamma_1$ переменой ролей игроков 1 и 2, следует помнить, что в этом процессе игроки сохраняют свои функции $\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2)$ и $\mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2)$, т. е. соответственно $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ и $-\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$. Это значит, что игрок 1 желает максимизировать, а игрок 2 — минимизировать $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$.

Отдав себе в этом отчет, оставим практически дословное повторение рассуждения п. 14.3.1 читателю. Мы ограничимся повторением существенных определений в той форме, в которой они применимы к $\Gamma_2$.

(14:B:a) Оптимальным способом игры (стратегией) для игрока 2 в мажорантной игре $\Gamma_2$ является выбор $\tau_2$, принадлежащего множеству $B$, где $B$ — множество тех $\tau_2$, для которых $\max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ достигает своего минимального значения $\min_{\tau_2} \max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$.

(14:B:b) Оптимальным способом игры (стратегией) для игрока 1 является следующий: если игрок 2 выбрал определенное значение $\tau_2$ [2]), то $\tau_1$ должно быть выбрано из множества $A_{\tau_2}$, где $A_{\tau_2}$ — множество тех $\tau_1$, для которых $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ достигает своего максимального значения $\max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ [3]).

---

[1]) Напомним, что $\tau_1$ должно выбираться без знания значения $\tau_2$, в то время как $\tau_2$ выбирается после того, как известно $\tau_1$.

[2]) Первый информирован о значении $\tau_2$, когда он приступает к выбору $\tau_1$. Это правило игры $\Gamma_2$ (см. сноску 2 на стр. 128).

[3]) Вообще, $\tau_2$ рассматривается как известный параметр, от которого зависит все, и в том числе множество $A_{\tau_2}$, из которого должно быть выбрано $\tau_1$.

На основе сказанного мы можем утверждать следующее:

(14:B:c) Если оба игрока 1 и 2 играют мажорантную игру $\Gamma_2$ оптимально, т. е. если $\tau_2$ принадлежит $B$, а $\tau_1$ принадлежит $A_{\tau_2}$, то значение $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ будет равно

$$v_2 = \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2).$$

Из всего рассмотренного должно быть ясно, что каждая партия игры $\Gamma_2$ имеет определенное значение для каждого игрока. Этим значением является введенное выше $v_2$ для игрока 1 и поэтому $-v_2$ для игрока 2.

Чтобы подчеркнуть симметричность всей аргументации, мы повторим, сделав соответствующие изменения, те выводы, которыми заканчивается п. 14.3.1. Они полезны для того, чтобы дать более детальное представление о смысле $v_2$.

(14:B:d) Игрок 1 может, играя надлежащим образом, обеспечить себе выигрыш $\geqq v_2$ независимо от того, что делает игрок 2. Игрок 2 может, играя надлежащим образом, обеспечить себе выигрыш $\geqq -v_2$ независимо от того, что делает игрок 1.

(Доказательство. Второе устанавливается выбором произвольного $\tau_2$ из $B$. Первое устанавливается произвольным выбором $\tau_1$ из $A_{\tau_2}$ [1]). Ср. с доказательством, приведенным раньше.)

Сказанное выше снова можно эквивалентно сформулировать так:

(14:B:e) Игрок 2 может, играя соответствующим образом, добиться того, чтобы выигрыш игрока 1 был $\leqq v_2$, т. е. воспрепятствовать ему выиграть $> v_2$ независимо от действий игрока 1. Игрок 1 может, действуя соответствующим образом, добиться того, чтобы выигрыш игрока 2 был $\leqq -v_2$, т. е. воспрепятствовать ему выиграть $> -v_2$ независимо от действий игрока 2.

**14.3.4.** Обсуждения игр $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, проведенные соответственно в п. 14.3.1 и в п. 14.3.3, находятся в отношении *симметрии*, или *двойственности* друг к другу. Они получаются друг из друга, как отмечалось раньше (в начале п. 14.3.3), переменой ролей игроков 1 и 2.

Ни игра $\Gamma_1$, ни $\Gamma_2$ сами по себе не являются симметричными относительно такого изменения. Действительно, это лишь повторное утверждение того факта, что перемена ролей игроков 1 и 2 переводит игры $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ друг в друга и, таким образом, изменяет обе эти игры. Это находится в соответствии с тем, что различные утверждения, которые мы устанавливали в п. 14.3.1 и п. 14.3.3 относительно оптимальных стратегий соответственно в играх в $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, т. е. (14:A:a), (14:A:b), (14:B:a), (14:B:b), не были симметричны относительно игроков 1 и 2. И снова мы видим, что перемена ролей игроков 1 и 2 меняет местами основные определения для игр $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ и тем самым изменяет обе эти игры [2]).

---

[1]) Напомним, что $\tau_2$ должно быть выбрано без знания $\tau_1$, в то время как $\tau_1$ выбирается после того, как известно значение $\tau_2$.

[2]) Отметим, что исходная игра $\Gamma$ будет симметричной относительно игроков 1 и 2, если мы допустим, что за каждым игроком сохраняется его функция $\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2)$, $\mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2)$ при изменении их ролей, т. е. индивидуальные действия игроков 1 и 2 имеют тот же самый характер, что и в $\Gamma$.

Для более узкого понятия симметрии, когда функции $\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2)$, $\mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2)$ считаются фиксированными, см. п. 14.6.

Поэтому весьма знаменательно, что характеризация *значения* партии ($v_1$ для $\Gamma_1$, $v_2$ для $\Gamma_2$), введенная в конце п. 14.3.1 и п. 14.3.3, т. е. (14:A:c), (14:A:d), (14:A:e), (14:B:c), (14:B:d), (14:B:e) (за исключением формул в конце (14:A:c) и (14:B:c)), полностью симметрична относительно игроков 1 и 2. В соответствии с тем, что говорилось выше, это совпадает с утверждением о том, что эти характеризации установлены одним и тем же способом для $\Gamma_1$ и для $\Gamma_2$ [1]). Все это, конечно, является в равной мере очевидным при непосредственной проверке соответствующих мест.

Итак, нам удалось определить значения партии одинаковым способом для игр $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ и симметрично для игроков 1 и 2: в (14:A:c), (14:A:d), (14:A:e), (14:B:c), (14:B:d) и (14:B:e) в п. 14.3.1 и в п. 14.3.3. Это было сделано, несмотря на существенное различие индивидуальных ролей каждого игрока в обеих играх. Все это внушает надежду, что определение значения партии может быть использовано в той же форме и с таким же успехом и для других игр, в частности для игры $\Gamma$, которая занимает промежуточное положение между $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$. Эта надежда касается, конечно, только самого понятия значения, но не тех рассуждений, которые приводят к нему. Они специфичны в $\Gamma_1$ и в $\Gamma_2$, фактически различны для $\Gamma_1$ и для $\Gamma_2$ и вообще непригодны для самой игры $\Gamma$. Иными словами, в дальнейшем мы ожидаем большего от (14:A:d), (14:A:e), (14:B:d) и (14:B:e), чем от (14:A:a), (14:A:b) и (14:B:a), (14:B:b).

Ясно, что это — только эвристические соображения. До сих пор мы даже не пытались доказать, что численное *значение* партии для $\Gamma$ может быть определено этим путем. Теперь мы приступим к детальному рассмотрению, которое восполнит этот пробел. Мы увидим, что сначала некоторые определенные и серьезные трудности ограничат на первый взгляд применимость этой методики, но в дальнейшем будет возможно устранить их введением нового аппарата. (См. соответственно п. 14.7.1 и пп. 17.1—17.3.)

## 14.4. Выводы

**14.4.1.** Мы видели, что вполне правдоподобной интерпретацией значения партии являются величины

$$v_1 = \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2),$$

$$v_2 = \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$$

соответственно для игр $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ относительно игрока 1 [2]).

Так как игра $\Gamma_1$ менее благоприятна для игрока 1, чем игра $\Gamma_2$ (в $\Gamma_1$ он должен сделать ход до хода своего противника, которому будет известен его ход, в то время как в игре $\Gamma_2$ наблюдается обратная ситуация), разумным является вывод о том, что значение для $\Gamma_1$ меньше или равно (т. е. наверняка не больше), чем значение для $\Gamma_2$. Каждый может судить о строгости этого «доказательства». Этот вопрос решить трудно, но, во всяком случае, тщательный анализ словесных аргументов показывает, что они по существу воспроизводят математическое доказательство того же

[1]) Этот вопрос заслуживает внимательного рассмотрения. Естественно, что эти две характеризации должны получаться друг из друга путем изменения ролей игроков 1 и 2. Но в этом случае утверждения совпадают непосредственно, когда никакого изменения игроков не делается. Это следует из их индивидуальной симметрии.

[2]) Следовательно, для игрока 2 значениями являются $-v_1$ и $-v_2$.

самого утверждения, которое мы уже получили. Действительно, то, что мы утверждаем:

$$v_1 \leqq v_2,$$

совпадает с (13:A*) в п. 13.4.3 (где $\varphi$, $x$ и $y$ соответствуют нашим $\mathcal{K}$, $\tau_1$ и $\tau_2$).

Вместо того, чтобы рассматривать $v_1$ и $v_2$ в качестве значений для двух игр $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, отличных от $\Gamma$, мы можем связать их с самой игрой $\Gamma$ при соответствующих предположениях относительно «интеллекта» игроков 1 и 2.

Действительно, правила игры $\Gamma$ предписывают, чтобы каждый игрок делал свой выбор (свой собственный ход) при полном неведении о выборе своего противника. Тем не менее возможно, что один из игроков, скажем 2, «раскрывает» своего противника, т. е. что он как-то получил информацию о его стратегии [1]).

Мы не будем касаться вопроса об источнике этой информации; им может быть (но не обязательно будет) опыт, накопленный в предыдущих партиях. Во всяком случае, мы предполагаем, что игрок 2 такой информацией обладает. Возможно, конечно, что в этой ситуации игрок 1 изменит свою стратегию, но мы опять предположим, что по каким-то причинам он не делает этого [2]). При этих предположениях мы можем говорить, что игрок 2 «раскрыл» своего противника.

В этом случае условия в $\Gamma$ становятся точно такими же, как и в $\Gamma_1$, и, следовательно, все рассуждения п. 14.3.1 применимы дословно. Аналогично можно представить себе противоположную возможность, что игрок 1 «раскрыл» своего противника. Тогда условия в $\Gamma$ становятся точно такими же, как в игре $\Gamma_2$, и, следовательно, все рассуждения п. 14.3.3 применимы дословно.

В свете изложенного выше мы можем сказать следующее. Значение партии игры $\Gamma$ является определенной величиной, если делается одно из следующих двух крайних предположений: или что игрок 2 «раскрывает» своего противника, или что игрок 1 «раскрывает» своего противника. В первом случае значение партии есть $v_1$ для 1 и $-v_1$ для 2, во втором случае значение партии есть $v_2$ для 1 и $-v_2$ для 2.

14.4.2. Эти рассуждения показывают, что если значение партии самой игры $\Gamma$ (без каких-либо дальнейших ограничений или модификаций) вообще может быть определено, то оно должно лежать между значениями $v_1$ и $v_2$. (Мы имеем в виду значение для игрока 1.) То есть если мы обозначим через $v$ значение партии для игры $\Gamma$ (для игрока 1), то должно быть

$$v_1 \leqq v \leqq v_2.$$

Длина этого интервала, в котором может находиться $v$, есть

$$\Delta = v_2 - v_1 \geqq 0.$$

В то же время $\Delta$ выражает преимущество, которого добивается (в игре $\Gamma$) игрок, «раскрыв» своего противника вместо того, чтобы быть «раскрытым» самому [3]).

---

[1]) В игре $\Gamma$, которая является игрой в нормальной форме, стратегия есть просто фактический выбор при единственном индивидуальном ходе игрока. Вспомнив, как эта нормальная форма получается из первоначальной позиционной формы игры, мы убедимся, что этот выбор в точности соответствует стратегии в первоначальной игре.

[2]) По поводу интерпретации всех этих предположений см. п. 17.3.1.

[3]) Отметим, что это выражение для преимущества в игре $\Gamma$ применимо к обоим игрокам. Преимущество для игрока 1 равно $v_2 - v_1$, для игрока 2 оно равно $(-v_1) - (-v_2)$, и оба выражения равны друг другу, т. е. равны $\Delta$.

Далее, игра может быть такой, что неважно, какой игрок «раскрыл» своего оппонента, т. е. что получаемое преимущество при этом равно нулю. В соответствии со сказанным выше, это может быть в том и только в том случае, когда

$$\Delta = 0$$

или, что то же самое, когда

$$v_1 = v_2.$$

Или, если мы заменим $v_1$ и $v_2$ выражениями, которые их определяют,

$$\max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2).$$

Если игра Г обладает этими свойствами, то будем называть ее *вполне определенной*.

Последняя форма этого условия требует сравнения с (13:3) в п. 13.3.1 и с рассуждениями в пп. 13.4.1—13.5.2 (снова $\varphi$, $x$ и $y$ там соответствуют нашим $\mathcal{K}$, $\tau_1$ и $\tau_2$). Действительно, утверждение (13:В*) в п. 13.4.3 говорит, что игра Г вполне определена тогда и только тогда, когда существует седловая точка функции $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$.

## 14.5. Анализ полной определенности

**14.5.1.** Предположим, что игра Г вполне определена, т. е. что существует седловая точка функции $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$.

В этом случае анализ в п. 14.4.2 вселяет надежду, что станет возможным интерпретировать величину

$$v = v_1 = v_2$$

как значение партии для Г (для игрока 1). Вспоминая определения $v_1$ и $v_2$ и определение седловой точки в п. 13.4.3 и используя (13:С*) в п. 13.5.2, мы видим, что последнее равенство может быть записано как

$$v = \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{Sa}_{\tau_1/\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2).$$

Повторяя шаг за шагом то, что делалось в конце п. 14.3.1 и в конце п. 14.3.3, нетрудно установить, что v можно интерпретировать как значение партии для Г (для игрока 1).

В частности, (14:А:с), (14:А:d), (14:А:е), (14:В:с), (14:В:d), (14:В:е) из п. 14.3.1 и п. 14.3.3, где они применялись к $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ соответственно, теперь могут быть получены для Г. Начнем с того, что воспроизведем утверждение, эквивалентное (14:А:d) и (14:В:d) [1]):

(14:С:d) Игрок 1 может, играя надлежащим образом, обеспечить себе выигрыш $\geqq v$ независимо от того, что делает игрок 2.

Игрок 2 может, играя надлежащим образом, обеспечить себе выигрыш $\geqq -v$ независимо от того, что делает игрок 1.

Для того чтобы доказать это, мы снова образуем множество $A$ из (14:А:а) в п. 14.3.1 и множество $B$ из (14:В:а) в п. 14.3.3. Они являются фактически множествами $A^\varphi$, $B^\varphi$ из п. 13.5.1 ($\varphi$ соответствует нашей $\mathcal{K}$). Мы повторяем:

---

[1]) Здесь (а) — (f) появляются в необычном порядке, так как нумерация основывается на пп. 14.3.1 и 14.3.3, а рассуждения в этих пунктах шли по несколько иному пути.

(14:D:a) $A$ есть множество тех $\tau_1$, для которых $\min\limits_{\tau_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$ достигает своего максимального значения, т. е. для которых

$$\min_{\tau_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) = \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{v}.$$

(14:D:b) $B$ есть множество тех $\tau_2$, для которых $\max\limits_{\tau_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$ достигает своего минимального значения, т. е. для которых

$$\max_{\tau_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) = \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{v}.$$

Теперь легко доказывается утверждение (14:C:d).

Пусть игрок 1 выбирает $\tau_1$ из $A$. Тогда, независимо от действий игрока 2 (т. е. для каждого $\tau_2$), мы имеем $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) \geqq \min\limits_{\tau_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{v}$, т. е. выигрыш игрока 1 $\geqq \mathrm{v}$.

Пусть игрок 2 выбирает $\tau_2$ из $B$. Тогда, независимо от действий игрока 1 (т. е. для каждого $\tau_1$), мы имеем $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) \leqq \max\limits_{\tau_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{v}$, т. е. выигрыш игрока 1 $\leqq \mathrm{v}$ и, таким образом, выигрыш игрока 2 $\geqq -\mathrm{v}$.

Это завершает доказательство.

Теперь перейдем к утверждению, эквивалентному (14:A:e) и (14:B:e). Действительно, (14:C:d) эквивалентно можно сформулировать так:

(14:C:e) Игрок 2, играя соответствующим образом, может добиться того, что выигрыш игрока 1 будет $\leqq \mathrm{v}$, т. е. может воспрепятствовать ему выиграть $> \mathrm{v}$ независимо от его действий.

Игрок 1, играя соответствующим образом, может добиться того, что выигрыш игрока 2 будет $\leqq -\mathrm{v}$, т. е. воспрепятствовать ему выиграть $> -\mathrm{v}$ независимо от его действий.

(14:C:d) и (14:C:e) вполне устанавливают нашу интерпретацию v, как значения партии для Г для игрока 1 и —v для игрока 2.

**14.5.2.** Рассмотрим теперь эквиваленты утверждений (14:A:a), (14:A:b), (14:B:a), (14:B:b).

Благодаря (14:C:d) в п. 14.5.1 разумно определять оптимальный способ игры игрока 1 в игре Г как способ, гарантирующий ему выигрыш, больший или равный значению партии для 1, независимо от действия 2, т. е. выбор $\tau_1$, для которого $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) \geqq \mathrm{v}$ при всех $\tau_2$. Эквивалентно это можно записать как $\min\limits_{\tau_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)) \geqq \mathrm{v}$.

Далее, всегда верно

$$\min_{\tau_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) \leqq \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{v}.$$

Следовательно, высказанное выше условие для $\tau_1$ превращается в $\min\limits_{\tau_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{v}$, т. е. (благодаря (14:D:a) в п. 14.5.1) $\tau_1$ принадлежит $A$.

С другой стороны, ввиду (14:C:d) в п. 14.5.1 разумно определять оптимальный способ игры для игрока 2 в игре Г как способ, гарантирующий ему выигрыш, больший или равный значению партии для 2, независимо от действий 1, т. е. выбор $\tau_2$, для которого $-\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) \geqq -\mathrm{v}$ при всех $\tau_1$. Это значит, что $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) \leqq \mathrm{v}$ для всех $\tau_1$. В эквивалентной форме это можно записать как $\max\limits_{\tau_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) \leqq \mathrm{v}$.

Далее, всегда верно

$$\max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \geqq \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{v}.$$

Следовательно, высказанное выше условие для $\tau_2$ превращается в в $\max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{v}$, т. е. (благодаря (14:D:b) в п. 14.5.1) $\tau_2$ принадлежит $B$.

Таким образом, мы имеем:

(14:C:a) Оптимальным способом игры (стратегией) для игрока 1 в игре Г является выбор любого $\tau_1$, принадлежащего $A$, где $A$ — множество из (14:D:a) в п. 14.5.1.

(14:C:b) Оптимальным способом игры (стратегией) для игрока 2 в игре Г является выбор любого $\tau_2$, принадлежащего $B$, где $B$ — множество из (14:D:b) в п. 14.5.1 [1]).

Наконец, наше определение оптимального способа игры, как указывалось в начале этого пункта, немедленно дает утверждение, эквивалентное (14:A:c) или (14:B:c).

(14:C:c) Если оба игрока играют в игре Г оптимально, т. е. если $\tau_1$ принадлежит $A$, а $\tau_2$ принадлежит $B$, то значение $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ будет равно значению партии (для игрока 1), т. е. v.

Заметим, что (13:D*) в п. 13:5.2 и замечания, изложенные перед утверждениями (14:D:a) и (14:D:b) в п. 14.5.1 относительно множеств $A$, $B$, вместе взятые, дают нам следующее:

(14:C:f) Оба игрока 1 и 2 играют в игре Г оптимально, т. е. $\tau_1$ принадлежит $A$, а $\tau_2$ принадлежит $B$ тогда и только тогда, когда $\tau_1$, $\tau_2$ является седловой точкой $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$.

### 14.6. Перемена ролей игроков. Симметрия

**14.6.** Утверждения (14:C:a)—(14:C:f) в пп. 14.5.1 и 14.5.2 разрешают все трудности в той мере, в какой речь идет о вполне определенных играх двух лиц. В связи с этим заметим, что в пп. 14.3.1 и 14.3.3 для игр $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ мы вывели (14:A:d), (14:A:e), (14:B:d), (14:B:e) из (14:A:a), (14:A:b), (14:B:a), (14:B:b), в то время как в пп. 14.5.1 и 14.5.2 для самой игры Г мы получили (14:C:a), (14:C:b) из (14:C:d), (14:C:e). Это является преимуществом, так как аргументы в пп. 14.3.1 и 14.3.3 в пользу (14:A:a), (14:A:b) (14:B:a), (14:B:b) носили гораздо более эвристический характер, чем аргументы в пп. 14.5.1 и 14.5.2 в пользу (14:C:d), (14:C:e).

Использование функции $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \equiv \mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2)$ подразумевало определенную асимметрию расположения игроков; игроку 1 тем самым придавалась особая роль. Однако интуитивно должно быть ясно, что равнозначные результаты могут быть получены, если мы отведем эту особую роль игроку 2. Так как перемена ролей игроков 1 и 2 будет иметь определенное значение в дальнейшем, мы приведем сжатое математическое обсуждение этого вопроса.

Перемена ролей игроков 1 и 2 в игре Г, которая теперь не предполагается вполне определенной, приводит к замене функций $\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2)$ и

---

[1]) Так как эта игра есть Г, каждый игрок должен сделать свой выбор ($\tau_1$ или $\tau_2$), не зная о выборе другого игрока ($\tau_2$ или $\tau_1$). Сопоставьте это с (14:A:b) в п. 14.3.1 для $\Gamma_1$ и с (14:B:b) в п. 14.3.3 для $\Gamma_2$.

$\mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2)$ на функции $\mathcal{K}_2(\tau_2, \tau_1)$ и $\mathcal{K}_1(\tau_2, \tau_1)$ [1, 2]). Поэтому такая перемена означает изменение функции $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ на $-\mathcal{K}(\tau_2, \tau_1)$.

Далее, изменение знака влечет за собой переход операций max и min друг в друга. Следовательно, величины

$$\max_{\tau_1}\min_{\tau_2}\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = v_1,$$

$$\min_{\tau_2}\max_{\tau_1}\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = v_2,$$

определенные в п. 14.4.1, превращаются теперь в следующие:

$$\max_{\tau_1}\min_{\tau_2}[-\mathcal{K}(\tau_2, \tau_1)] = -\min_{\tau_1}\max_{\tau_2}\mathcal{K}(\tau_2, \tau_1) = \\ = -\min_{\tau_2}\max_{\tau_1}\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\ ^{2)} = -v_2,$$

$$\min_{\tau_2}\max_{\tau_1}[-\mathcal{K}(\tau_2, \tau_1)] = -\max_{\tau_2}\min_{\tau_1}\mathcal{K}(\tau_2, \tau_1) = \\ = -\max_{\tau_1}\min_{\tau_2}\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\ ^{3)} = -v_1.$$

Таким образом, $v_1$, $v_2$ превращаются в $-v_2$, $-v_1$ [4]). Следовательно, величина

$$\Delta = v_2 - v_1 = (-v_1) - (-v_2)$$

остается неизменной [5]). Если Г вполне определена, то это также остается верным, так как в этом случае $\Delta = 0$ и равенство $v = v_1 = v_2$ превращается в $-v = -v_1 = -v_2$.

Теперь легко проверить, что все утверждения (14:C:a) — (14:C:f) в пп. 14.5.1 и 14.5.2 остаются теми же самыми, когда произведена перемена ролей игроков 1 и 2.

## 14.7. Игры, не являющиеся вполне определенными

**14.7.1.** Все предыдущее относится только к вполне определенным играм и ни к каким другим. Игра Г, которая не является вполне определенной, характеризуется тем, что $\Delta > 0$, т. е. в такой игре получает преимущество тот, кто «раскроет» своего противника. Отсюда вытекает существенное различие между результатами, т. е. значениями в $\Gamma_1$ и в $\Gamma_2$,

---

[1]) Это уже не та операция перемены ролей игроков, которая использовалась в п. 14.3.4. Там нас интересовало только распределение и состояние информации в каждом ходе, а игроки 1 и 2 рассматривались со своими функциями $\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2)$ и $\mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2)$ (см. сноску на стр. 130). В этом смысле игра Г была симметричной, т. е. неизменной при этом преобразовании.

В данном случае мы полностью меняем роли игроков 1 и 2 и даже их функции $\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2)$ и $\mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2)$.

[2]) Мы должны были поменять местами переменные $\tau_1$ и $\tau_2$, так как $\tau_1$ соответствует выбору игрока 1, а $\tau_2$ — выбору игрока 2. Следовательно, теперь $\tau_2$ имеет область изменения 1, ..., $\beta_1$. Итак, опять для $\mathcal{K}_k(\tau_2, \tau_1)$ справедливо, как это раньше было для $\mathcal{K}_k(\tau_1, \tau_2)$, что переменная перед запятой имеет область изменения 1, ..., $\beta_1$, а переменная после запятой — область изменения 1, ..., $\beta_2$.

[3]) Это просто изменение записи: переменные $\tau_1$, $\tau_2$ заменены на $\tau_2$, $\tau_1$.

[4]) Это, как и следовало ожидать, находится в соответствии со сноской 2 на стр. 131.

[5]) Это, как и следовало ожидать, находится в соответствии со сноской 3 на стр. 132.

а потому и между оптимальными способами игры в этих играх. Поэтому рассуждения в пп. 14.3.1 и 14.3.3 перестают быть руководящими при рассмотрении игры Г. Рассуждения в пп. 14.5.1 и 14.5.2 также неприменимы, так как они используют существование седловой точки $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ и справедливость равенства

$$\max_{\tau_1}\min_{\tau_2}\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)=\min_{\tau_2}\max_{\tau_1}\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2),$$

т. е. полную определенность игры Г. Конечно, некоторое доверие внушает неравенство из начала п. 14.4.2. Согласно ему значение v партии в Г (для игрока 1) (если такое понятие вообще может быть образовано в том общем случае, для которого мы пока еще его не имеем [1])) находится в пределах

$$v_1 \leqq v \leqq v_2,$$

т. е. при этом для v все еще сохраняется интервал неопределенности длины $\Delta = v_2 - v_1 > 0$, и, кроме того, вся ситуация в концептуальном смысле остается весьма неудовлетворительной.

Можно склоняться к тому, чтобы вообще оставить дальнейшие попытки: так как «раскрытие» своего оппонента в такой игре Г дает преимущество, представляется внушающей доверие мысль о том, что нет возможности обнаружить решение до тех пор, пока не будет сделано некоторое определенное предположение о том, «кто кого раскрывает» и в какой степени [2]).

В § 17 мы увидим, что это не так и что, несмотря на $\Delta > 0$, решение может быть найдено тем же самым путем, что и раньше. Но мы, не приступая к рассмотрению этой трудности, займемся сначала перечислением некоторых игр Г с $\Delta > 0$ и других игр, для которых $\Delta = 0$. Первые, которые не являются вполне определенными, будут рассмотрены кратко; их детальное исследование будет проведено в п. 17.1. Вторые, которые являются вполне определенными, будут проанализированы значительно подробнее.

**14.7.2.** Так как существуют функции $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ без седловых точек (см. пп. 13.4.1 и 13.4.2, где $\varphi(x, y)$ есть наша $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$), существуют и не вполне определенные игры Г. Имеет смысл еще раз рассмотреть прежние примеры, т. е. функции, описываемые матрицами табл. 2 и табл. 3 на стр. 120, в свете имеющихся в виду приложений. Иными словами, опишем в явном виде те игры, к которым они относятся. (В каждом случае мы заменяем $\varphi(x, y)$ на $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$; здесь $\tau_2$ обозначает номер столбца, а $\tau_1$ — номер строки в каждой матрице. См. также табл. 5 на стр. 126.)

Табл. 2 — это игра в орлянку. Пусть для $\tau_1$ и для $\tau_2$ 1 означает «герб», а 2 означает «решетку». Тогда элемент матрицы равен 1, если $\tau_1$ и $\tau_2$ совпадают, т. е. равны друг другу, и — 1 в противном случае. Таким образом, игрок 1 угадывает действия игрока 2. Он выигрывает (единицу) при совпадении и проигрывает (единицу) в противном случае.

Табл. 3 — это игра «камень, мешок и ножницы». Пусть для $\tau_1$ и для $\tau_2$ 1 означает «камень», 2 означает «мешок», а 3 — «ножницы». Распределение

---

[1]) Однако см. п. 17.8.1.

[2]) На более ясном языке: $\Delta > 0$ означает, что в этой игре невозможно одновременно каждому из игроков быть умнее своего оппонента. Следовательно, представляется желательным знать, насколько умен каждый игрок.

1 и —1 в матрице выражает, что «мешок» побеждает «камень», «ножницы» побеждают «мешок», а «камень» побеждает «ножницы» [1]). Таким образом, игрок 1 выигрывает (единицу), если он побеждает игрока 2, и проигрывает (единицу), если оказывается побежденным. В противном случае (если оба игрока делают одинаковый выбор) игра заканчивается вничью.

**14.7.3.** Эти два примера в достаточно ясной форме показывают трудности, которые встретились нам в не вполне определенных играх. Благодаря чрезвычайной простоте примеров эти трудности отчетливо выделены здесь. Дело в том, что в играх «орлянка» и «камень, мешок и ножницы» любой способ игры (т. е. любое $\tau_1$ или любое $\tau_2$) так же хорош, как и любой другой. Нет существенной выгоды или невыгоды непосредственно в «гербе» или в «решетке». Нет их непосредственно и в «камне», «мешке» или «ножницах». Единственным, что имеет значение, является правильное угадывание действий противника. Но как приступить к описанию этого без дальнейших предположений об «интеллектах» игроков? [2])

Конечно, существуют и более сложные игры, которые не являются вполне определенными и которые важны с различных более тонких специальных точек зрения (см. §§ 18 и 19). Но поскольку речь идет об основной трудности, простые игры «орлянка» и «камень, мешок и ножницы» являются достаточно характерными.

### 14.8. Программа детального анализа полной определенности

**14.8.** Хотя вполне определенные игры Г, для которых наше решение строго обосновано, являются, таким образом, только частным случаем, нельзя недооценивать размеров области, которую они охватывают. Тот факт, что мы используем нормальную форму для игры Г, может привести нас к такому недооцениванию. При использовании нормальной формы многие вещи кажутся элементарнее, чем они есть на самом деле. Надо помнить, что $\tau_1$ и $\tau_2$ представляют собой стратегии в позиционной форме игры, которая может иметь, как указывалось в п. 14.1.1, очень сложную структуру.

Следовательно, для того чтобы понять роль полной определенности, необходимо исследовать ее в связи с позиционной формой игры. Это поднимает вопросы, касающиеся детальной природы ходов (является ход случайным или выполняется игроком), состояния информации игроков и т. д. Тем самым, как упоминалось в п. 12.1.1, мы подходим к структурному анализу, основанному на позиционной форме.

Нас особенно будут интересовать те игры, в которых каждый игрок, делая свой ход, полностью информирован об исходах выборов во всех предшествующих ходах. Эти игры уже упоминались в п. 6.4.1, и там утверждалось, что их общее рассмотрение носит специфический характер. Теперь мы установим точный смысл этого, доказав, что все такие игры являются вполне определенными. Это окажется справедливым не только в том случае, когда все ходы являются ходами игроков, но и при наличии случайных ходов.

---

[1]) «Камень уносится в мешке, ножницы режут мешок, камень точит ножницы».

[2]) Как уже упоминалось прежде, мы покажем в п. 17.1, что это может быть сделано.

# § 15. ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

## 15.1. Постановка задачи. Индукция

**15.1.1.** Продолжим изучение игр двух лиц с нулевой суммой с целью нахождения среди них возможно более широкого класса вполне определенных игр, т. е. таких игр, для которых величины

$$\mathrm{v}_1 = \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2),$$

$$\mathrm{v}_2 = \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$$

из п. 14.4.1, оказавшиеся столь важными для оценки игры, удовлетворяют соотношению

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}.$$

Мы покажем, что, когда игра Г является игрой с полной информацией, т. е. когда предварение эквивалентно предшествованию (см. п. 6.4.1 и окончание п. 14.8), она вполне определена. Мы обсудим также концептуальную значимость этого результата (п. 15.8). Фактически мы получим это утверждение как частный случай более общего правила, касающегося $\mathrm{v}_1$ и $\mathrm{v}_2$ (см. п. 15.5.3).

Мы начнем наши рассмотрения даже с более общего случая — общей игры $n$ лиц Г. Эта бо́льшая общность окажется полезной в дальнейшем.

**15.1.2.** Пусть Г — общая игра $n$ лиц, заданная в позиционной форме. Мы рассмотрим некоторые аспекты этой игры, используя сначала до-теоретико-множественную терминологию из §§ 6 и 7 (в п. 15.1), а затем переведем все на язык теории разбиений и множеств из §§ 9 и 10 (в п. 15.2 и далее). Возможно, читатель получит полное представление о вопросе уже с помощью одного только первого рассмотрения; дальнейшее со своим достаточно формальным аппаратом имеет целью показать только, что фактически мы действуем на основании аксиом п. 10.1.1.

Определим последовательность ходов в Г: $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots, \mathscr{M}_\nu$. Зафиксируем наше внимание на первом ходе и на ситуации, которая складывается в момент этого хода. Поскольку этому ходу ничто не предшествует, то его ничто и не предваряет; иначе говоря, характеристики этого хода ни от чего не зависят; они являются константами. Это относится прежде всего к тому, является ли ход $\mathscr{M}_1$ случайным или личным; в последнем случае — какому из игроков принадлежит ход $\mathscr{M}_1$, т. е. к значениям $k_1 = 0, 1, \ldots, n$ в смысле п. 6.2.1. Это относится также к числу альтернатив $\alpha_1$ в ходе $\mathscr{M}_1$, а для случайного хода (когда $k_1 = 0$) — и к значениям вероятностей $p_1(1), \ldots, p_1(\alpha_1)$. Результатом выбора в ходе $\mathscr{M}_1$ — случайном или личном — является число $\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$.

Для математического анализа игры Г сам собой напрашивается метод, в достаточной мере отвечающий духу «полной индукции», широко используемой во всех областях математики. Успешное применение этого метода позволяет заменить анализ игры Г анализом игр, содержащих на один ход меньше, чем Г [1]). Этот метод состоит в выборе некоторого $\bar{\sigma}_1 = 1, \ldots, \alpha_1$

[1]) То есть вместо $\nu$ мы получаем $\nu - 1$. Повторное применение «индуктивного перехода» (если вообще такое применение возможно) сведет игру Г к игре с 0 ходами, т. е. к игре с фиксированным, определенным исходом. А это и означает, очевидно, полное решение Г (см. (15:C:a) в 15.6.1).

и в обозначении через $\Gamma_{\bar\sigma_1}$ игры, которая совпадает с $\Gamma$ во всех деталях, за исключением того, что в $\Gamma_{\bar\sigma_1}$ отсутствует ход $\mathcal{M}_1$ и вместо выбора $\sigma_1$ правилами новой игры предписывается значение $\sigma_1 = \bar\sigma_1$.

Замечание. Пусть, например, $\Gamma$ — игра в шахматы, а $\bar\sigma_1$ — некоторый начальный ход — выбор при $\mathcal{M}_1$ «белых», т. е. игрока 1. Тогда $\Gamma_{\bar\sigma_1}$ снова оказывается игрой в шахматы, но начинающейся ходом, который является вторым в обычных шахматах — ходом «черных» (т. е. игрока 2), и позицией, образовавшейся в результате «открывающего хода». Этот предписанный «открывающий ход» может быть, а может и не быть общепринятым (типа e2 — e4).

То же происходит и в некоторых разновидностях бриджа, когда «посредник» сдает игрокам определенные — известные и заранее выбранные — карты. (Так делается, например, в «двойном бридже».)

В первом примере предписанный ход $\mathcal{M}_1$ в первоначальной игре является личным (ход «белых», игрока 1); во втором примере он в первоначальной игре является случайным («сдача»).

Применяемые иногда в некоторых играх «форы» могут сводиться к одной или нескольким таким операциям.

Игра $\Gamma_{\bar\sigma_1}$ содержит одним ходом меньше, чем $\Gamma$. Ее ходами будут $\mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_\nu$ [1]). Наш «индуктивный» метод будет успешным, если мы сможем вывести существенные свойства игры $\Gamma$ из свойств игр $\Gamma_{\bar\sigma_1}$, $\bar\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$.

**15.1.3.** Тем не менее следует отметить, что возможность составления игр $\Gamma_{\bar\sigma_1}$ зависит от ограничений, наложенных на игру $\Gamma$. Действительно, каждый игрок, делающий личный ход в игре $\Gamma_{\bar\sigma_1}$, должен быть полностью информирован о правилах этой игры. Теперь эта информация состоит уже из информации о правилах первоначальной игры $\Gamma$ с добавлением предписанного выбора на $\mathcal{M}_1$, т. е. $\bar\sigma_1$. Следовательно, игра $\Gamma_{\bar\sigma_1}$ может быть получена из игры $\Gamma$ без изменения правил, касающихся состояния информации в $\Gamma$, только в том случае, когда выбор при $\mathcal{M}_1$ по правилам первоначальной игры $\Gamma$ известен каждому игроку при совершении им личных ходов $\mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_\nu$, т. е. ход $\mathcal{M}_1$ должен предварять все личные ходы $\mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_\nu$. Таким образом:

(15:A) Игру $\Gamma_{\bar\sigma_1}$ можно построить, не изменяя существенно для этой цели структуру игры $\Gamma$, если $\Gamma$ обладает следующим свойством:

(15:A:a) $\mathcal{M}_1$ предваряет все личные ходы $\mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_\nu$ [2]).

## 15.2. Точное условие (основание индукции)

**15.2.1.** Переведем теперь сказанное в пп. 15.1.2, 15.1.3 на язык разбиений и множеств из §§ 9 и 10 (см. также начало п. 15.1.2). В связи с этим мы будем пользоваться обозначениями из п. 10.1.

$\mathcal{A}_1$ состоит из единственного множества $\Omega$ (см. (10:1:f) в п. 10.1.1) и является подразбиением $\mathcal{B}_1$ ((10:1:a) из п. 10.1.1); следовательно, $\mathcal{B}_1$ также состоит из одного множества $\Omega$ (остальные множества оказываются

---

[1]) В действительности надо пользоваться индексами $1, \ldots, \nu - 1$ и писать $\mathcal{M}_1^{\bar\sigma_1}, \ldots, \mathcal{M}_{\nu-1}^{\bar\sigma_1}$ для того, чтобы отметить зависимость от $\bar\sigma_1$. Однако мы предпочитаем более простые обозначения $\mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_\nu$.

[2]) Это терминология из п. 6.3, т. е. мы используем частную форму зависимости в смысле п. 7.2.1. Используя общее описание из п. 7.2.1, можно сформулировать (15:A:a) следующим образом: для любого личного хода $\mathcal{M}_\varkappa$ ($\varkappa = 2, \ldots, \nu$) множество $\Phi_\varkappa$ содержит функцию $\sigma_1$.

пустыми) [1, 2]. Иначе говоря,

$$B_1(k) = \begin{cases} \Omega \text{ ровно для одного } k, \text{ скажем для } k = k_1, \\ \varnothing \text{ для всех } k \neq k_1. \end{cases}$$

Это число $k_1 = 0, 1, \ldots, n$ определяет природу $\mathcal{M}_1$; оно является параметром $k_1$ из п. 6.2.1. Если $k_1 = 1, \ldots, n$, т. е. если ход личный, то $\mathcal{A}_1$ также будет подразбиением $\mathcal{D}_1(k_1)$. (См. (10:1:d) из п. 10.1.1. Это определялось только для $B_1(k_1)$, но $B_1(k_1) = \Omega$). Следовательно, $\mathcal{D}_1(k_1)$ также состоит из единственного множества $\Omega$ [3]. Значит, при $k \neq k_1$ $\mathcal{D}_1(k)$, являющееся разбиением в $B_1(k) = \varnothing$ (см. (10:A:a) из п. 10.1.1), должно быть пустым.

Таким образом, мы получаем ровно одно множество $A_1$ из $\mathcal{A}_1$, которое совпадает с $\Omega$, и для $k_1 = 1, \ldots, n$ ровно одно $D_1$ во всех $\mathcal{D}_1(k)$, также совпадающее с $\Omega$, в то время как при $k_1 = 0$ ни в одном из $\mathcal{D}_1(k)$ не содержится множеств $D_1$.

Ход $\mathcal{M}_1$ состоит в выборе некоторого $C_1$ из $\mathcal{C}_1(k_1)$; этот выбор случаен, если $k_1 = 0$, и производится игроком $k_1$, если $k_1 = 1, \ldots, n$. $C_1$ автоматически оказывается подмножеством единственного множества $A_1$ $(= \Omega)$ в первом случае и подмножеством единственного $D_1$ $(= \Omega)$ во втором. Число таких $C_1$ равно $\alpha_1$ (см. п. 9.1.5, сноску 1 на стр. 96); поскольку же рассматриваемые $A_1$ или $D_1$ фиксированы, $\alpha_1$ является вполне определенной константой. $\alpha_1$ — число альтернатив при ходе $\mathcal{M}_1$, где $\alpha_1$ определялось в пп. 6.2.1 и 15.1.2.

Эти $C_1$ отвечают $\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$ из п. 15.1.2, и мы будем обозначать их соответственно через $C_1(1), \ldots, C_1(\alpha_1)$ [4]. Теперь утверждение (10:1:h) в п. 10.1.1 показывает, как мы это уже заметили, что $\mathcal{A}_2$ также является множеством из $C_1(1), \ldots, C_1(\alpha_1)$, т. е. равно $\mathcal{C}_1$.

До сих пор наш анализ был совершенно общим; он был справедлив для $\mathcal{M}_1$ (а при некотором обобщении — и для $\mathcal{M}_2$) в условиях любой игры Г. Читатель может перевести эти свойства на повседневную терминологию в смысле пп. 8.4.2 и 10.4.2.

Перейдем теперь к $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$. Этот переход, как было описано в п. 15.1.2, осуществляется предписанием выбора при ходе $\mathcal{M}_1$, т. е. принятием $\sigma_1 = \bar{\sigma}_1$. В то же самое время ходы в игре $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ ограничиваются множеством $\mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_\nu$. Это означает, что элемент $\pi$, представляющий партию в игре, не может более принимать произвольные значения из $\Omega$, а ограничен в пределах $C_1(\bar{\sigma}_1)$. Разбиения, перечисленные в п. 9.2.1, ограничиваются теми, для которых $\varkappa = 2, \ldots, \nu$ [5] (и $\varkappa = \nu + 1$ для $\mathcal{A}_\varkappa$).

**15.2.2.** Перейдем теперь к ограничениям, эквивалентным тем, которые описывались в п. 15.1.3.

Возможность осуществления изменений, сформулированных в конце п. 15.2.1, зависит от некоторых ограничений, налагаемых на Г.

---

[1] $\mathcal{B}_1$ представляет собой исключение из (8:B:a) в п. 8.3.1; см. замечание по поводу этого (8:B:a) в сноске 1 на стр. 89, а также сноску 1 на стр. 95.

[2] Доказательство. $\Omega$ принадлежит $\mathcal{A}_1$, которое является подразбиением $\mathcal{B}_1$; следовательно, $\Omega$ оказывается подмножеством некоторого элемента из $\mathcal{B}_1$. Этот элемент должен быть равен $\Omega$. Все остальные элементы $\mathcal{B}_1$ поэтому с $\Omega$ не пересекаются (см. п. 8.3.1), т. е. пусты.

[3] Как $\mathcal{A}_1$, так и $\mathcal{D}_1(k_1)$, в отличие от $\mathcal{B}_1$ (см. выше), должны удовлетворять обоим условиям (8:B:a) и (8:B:b) из п. 8.3.1, следовательно, они не содержат других элементов, кроме $\Omega$.

[4] Они представляют собой альтернативы $\mathcal{A}_1(1), \ldots, \mathcal{A}_1(\alpha_1)$ из пп. 6.2, 9.1.4 и 9.1.5.

[5] Мы не будем менять нумерацию на $\varkappa = 1, \ldots, \nu - 1$ (см. сноску 1 на странице 140).

Как было показано, мы стремимся ограничить партию, т. е. $\pi$, в рамках $C_1(\bar{\sigma}_1)$. Поэтому все множества, фигурирующие в описании $\Gamma$ и являющиеся подмножествами $\Omega$, должны быть заменены подмножествами $C_1(\bar{\sigma}_1)$, а разбиения — разбиениями в $C_1(\bar{\sigma}_1)$ (или в подмножествах $C_1(\bar{\sigma}_1)$). Как это должно быть сделано?

Разбиения, с помощью которых описывается игра $\Gamma$ (см. п. 9.2.1), распадаются на два класса: те, которые представляют объективные факты — $\mathcal{A}_\varkappa$, $\mathcal{B}_\varkappa = (B_\varkappa(0), \ldots, B_\varkappa(n))$ и $\mathcal{C}_\varkappa(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, — и те, которые представляют только состояние информации игрока [1]) — $\mathcal{D}_\varkappa(k)$, $k = 1, \ldots, n$. Мы предполагаем, конечно, что $\varkappa \geqq 2$ (см. конец п. 15.2.1).

В первом классе разбиений достаточно лишь заменить каждый элемент на его пересечение с $C_1(\bar{\sigma}_1)$. Таким образом, $\mathcal{B}_\varkappa$ видоизменяется заменой его элементов $B_\varkappa(0), \ldots, B_\varkappa(n)$ соответственно на

$$C_1(\bar{\sigma}_1) \cap B_\varkappa(0), \ldots, C_1(\bar{\sigma}_1) \cap B_\varkappa(n).$$

В $\mathcal{A}_\varkappa$ и этого делать не надо. Оно является подразбиением $\mathcal{A}_2$ (поскольку $\varkappa \geqq 2$, см. п. 10.4.1), т. е. системы попарно непересекающихся множеств $(C_1(1), \ldots, C_1(\alpha_1))$ (см. п. 5.2.1); следовательно, достаточно оставить только элементы из $\mathcal{A}_\varkappa$, являющиеся подмножествами $C_1(\bar{\sigma}_1)$, т. е. часть $\mathcal{A}_\varkappa$, содержащуюся в $C_1(\bar{\sigma}_1)$. К $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ следует подходить так же, как и к $\mathcal{B}_\varkappa$, однако мы предпочитаем отложить это рассмотрение.

Во втором классе разбиений, т. е. для $\mathcal{D}_\varkappa(k)$, ничего подобного делать нельзя. Замена элементов из $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ их пересечениями с $C_1(\bar{\sigma}_1)$ приводит к изменению состояния информации игрока [2]), и, таким образом, недопустима. Единственно возможной процедурой является процедура, выполнимая в случае $\mathcal{A}_\varkappa$, замена $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ той его частью, которая лежит в $C_1(\bar{\sigma}_1)$. Однако это применимо только лишь в том случае, когда $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ (как ранее $\mathcal{A}_\varkappa$) является подразбиением $\mathcal{A}_2$ (при $\varkappa \geqq 2$).

Теперь $\mathcal{C}_\varkappa(k)$ само позаботится о себе: оно является подразбиением $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ (см. (10:1:c) в п. 10:1:1); следовательно, таковым оказывается и $\mathcal{A}_2$ (согласно сделанному выше предположению); поэтому мы можем заменить его на ту его часть, которая содержится в $C_1(\bar{\sigma}_1)$.

Итак, мы видим, что необходимым ограничением, налагаемым на $\Gamma$, является то, что каждое $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ (при $k \geqq 2$) должно быть подразбиением $\mathcal{A}_2$. Вспомним теперь интерпретацию п. 8.4.2 и утверждения (10:A:d*) и (10:A:g*) в п. 10.1.2. Эти ограничения имеют тот смысл, что каждый игрок при совершении им личного хода в $\mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_\nu$ полностью информирован о состоянии дел после хода $\mathcal{M}_1$ (до совершения хода $\mathcal{M}_2$), что выражается через $\mathcal{A}_2$ (см. также рассмотрение, предшествующее (10:B) в п. 10.4.2). Сказанное означает, что ход $\mathcal{M}_1$ должен предварять все ходы $\mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_\nu$.

Таким образом, мы вновь получили условие (15:A:a) из п. 15.1.3. Мы предоставляем читателю простую проверку того, что игра $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ удовлетворяет требованиям п. 10.1.1.

---

[1]) $\mathcal{A}_\varkappa$ представляет собой состояние информации посредника, но оно есть объективный факт: события, происшедшие до этого момента, определяют течение партии в точности до этого момента (см. П.9.1.2).

[2]) Именно, ему сообщается дополнительная информация.

## 15.3. Точное условие (индуктивный переход)

**15.3.1.** Как было указано в конце п. 15.1.2, мы стремимся вывести свойства игры Γ из свойств игр $\Gamma_{\bar\sigma_1}$, $\bar\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$: в случае успеха это и будет типичным индуктивным переходом.

К настоящему моменту тем не менее единственный класс игр, свойства (математические) которого нам известны, состоит из игр двух лиц с нулевой суммой: для них мы имеем величины $v_1$ и $v_2$ (см. п. 15.1.1). Предположим поэтому, что Γ — игра двух лиц с нулевой суммой.

Покажем теперь, что величины $v_1$ и $v_2$, определенные для игры Γ, могут быть выражены с помощью соответствующих величин для $\Gamma_{\bar\sigma_1}$, $\bar\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$ (см. п. 15.1.2). Это обстоятельство пробуждает желание проводить «индукцию» и дальше, т. е. строить таким же способом игры $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2}$, $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \bar\sigma_3}$, ..., $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_\nu}$[1]. Существенно здесь то, что число шагов в этих играх последовательно убывает от ν (для Γ), ν — 1 (для $\Gamma_{\bar\sigma_1}$), принимая значения ν — 2, ν — 3, ..., до 0 (для игры $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_\nu}$); здесь $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_\nu}$ — «пустая» игра (похожая на игру, упомянутую в замечании на странице 102). Она не содержит ходов: игрок $k$ получает фиксированный выигрыш

$$\mathscr{F}_k(\bar\sigma_1, \ldots, \bar\sigma_\nu).$$

Это — терминология из пп. 15.1.2, 15.1.3, т. е. из §§ 6 и 7. В терминах пп. 15.2.1 и 15.2.2, т. е. из §§ 9, 10, мы сказали бы, что Ω (для Γ) последовательно ограничивается $C_1(\bar\sigma_1)$ из $\mathscr{A}_2$ (для $\Gamma_{\bar\sigma_1}$), далее $C_2(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2)$ из $\mathscr{A}_3$ (для $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2}$), $C_3(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \bar\sigma_3)$ из $\mathscr{A}_4$ (для $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \bar\sigma_3}$) и т. д. и, наконец, $C_\nu(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_\nu)$ из $\mathscr{A}_{\nu+1}$ (для $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_\nu}$). Но это последнее множество состоит из единственного элемента ((10:1:g) из п. 10.1.1), скажем $\bar\pi$. Следовательно, исход игры $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_\nu}$ оказывается фиксированным. Игрок $k$ получает фиксированный выигрыш $\mathscr{F}_k(\bar\pi)$.

Следовательно, природа игры $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_\nu}$ очевидна: понятно, что является ее значением для каждого игрока. Поэтому процесс, ведущий от $\Gamma_{\bar\sigma_1}$ к Γ, если его удастся построить, может быть использован для работы и в обратном направлении: от $\Gamma_{\bar\sigma_1, \ldots, \bar\sigma_\nu}$ к $\Gamma_{\bar\sigma_1, \ldots, \bar\sigma_{\nu-1}}$, к $\Gamma_{\bar\sigma_1, \ldots, \bar\sigma_{\nu-2}}$ и т. д., и т. д., к $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2}$, к $\Gamma_{\bar\sigma_1}$ и, наконец, к Γ.

Однако все это возможно только в том случае, когда мы в состоянии построить все игры последовательности $\Gamma_{\bar\sigma_1}$, $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2}$, $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \bar\sigma_3}$, ... ..., $\Gamma_{\bar\sigma_1, \ldots, \bar\sigma_\nu}$, т. е. если для всех этих игр выполняются последние условия из п. 15.1.3 или из п. 15.2.2. Это требование можно снова сформулировать для произвольной общей игры $n$ лиц Γ, и мы опять возвращаемся к таким Γ.

**15.3.2.** Нужное требование (в терминах пп. 15.1.2, 15.1.3, т. е. из §§ 6 и 7) состоит в том, что ход $\mathscr{M}_1$ должен предварять все ходы $\mathscr{M}_2$, ... ..., $\mathscr{M}_\nu$, ход $\mathscr{M}_2$ должен предварять все $\mathscr{M}_3$, ..., $\mathscr{M}_\nu$ и т. д., и т. д., т. е. предварение должно совпадать с предшествованием.

---

[1] $\bar\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$; $\bar\sigma_2 = 1, \ldots, \alpha_2$, где $\alpha_2 = \alpha_2(\bar\sigma_1)$; $\bar\sigma_3 = 1, \ldots, \alpha_3$, где $\alpha_3 = \alpha_3(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2)$, и т. д.

То же самое можно, конечно, сформулировать и в терминах пп. 15.2.1 и 15.2.2. Именно все $\mathcal{D}_\varkappa(k)$, $\varkappa \geqq 2$, должны быть подразбиениями $\mathcal{A}_2$; все $\mathcal{D}_\varkappa(k)$, $\varkappa \geqq 3$, должны быть подразбиениями $\mathcal{A}_3$ и т. д., и т. д., т. е. все $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ должны быть подразбиениями $\mathcal{A}_\lambda$ при $\varkappa \geqq \lambda$ [1]).

Поскольку $\mathcal{A}_\varkappa$ всегда является подразбиением $\mathcal{A}_\lambda$ (см. п. 10.4.1), достаточно потребовать, чтобы все $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ были подразбиениями $\mathcal{A}_\varkappa$. Однако $\mathcal{A}_\varkappa$ является подразбиением $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ в $\mathcal{B}_\varkappa(k)$ (см. (10:1:d) в п. 10.1.1); следовательно, наше требование равносильно тому, что $\mathcal{D}_\varkappa(k)$ является частью $\mathcal{A}_\varkappa$, лежащей в $B_\varkappa(k)$ [2]). Согласно (10:B) из п. 10.4.1 это как раз означает то, что в игре Г предварение совпадает с предшествованием.

В результате всех этих рассуждений мы установили следующее:

(15:B) Для того чтобы можно было построить полную последовательность игр

(15:1) $$\Gamma,\ \Gamma_{\bar\sigma_1},\ \Gamma_{\bar\sigma_1,\bar\sigma_2},\ \Gamma_{\bar\sigma_1,\bar\sigma_2,\bar\sigma_3},\ \ldots,\ \Gamma_{\bar\sigma_1,\bar\sigma_2,\ldots,\bar\sigma_\nu},$$

состоящих соответственно из

$$\nu,\ \nu-1,\ \nu-2,\ \ldots,\ 0$$

ходов, необходимо и достаточно, чтобы в игре Г предварение и предшествование совпадали, т. е. чтобы имела место полная информация. (См. п. 6.4.1 и конец п. 14.8.)

Если Г — игра двух лиц с нулевой суммой, то сказанное позволяет проанализировать игру Г путем движения в обратном направлении вдоль последовательности (15.1): от тривиальной игры $\Gamma_{\bar\sigma_1,\bar\sigma_2\ldots,\bar\sigma_\nu}$ к Г, пользуясь на каждом шаге способом, ведущим от $\Gamma_{\bar\sigma_1}$ к Г, так, как это будет показано в п. 15.6.2.

## 15.4. Точное исследование индуктивного перехода

**15.4.1.** Перейдем теперь к выводу индуктивного перехода от $\Gamma_{\sigma_1}$ [3]) к Г. Игра Г должна лишь удовлетворять последним условиям из п. 15.1.3 или п. 15.2.2, но она должна быть при этом игрой двух лиц с нулевой суммой.

Следовательно, мы можем построить все $\Gamma_{\sigma_1}$, $\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$, и они также будут играми двух лиц с нулевой суммой. Обозначим стратегии обоих игроков в Г соответственно через $\Sigma_1^1, \ldots, \Sigma_1^{\beta_1}$ и $\Sigma_2^1, \ldots, \Sigma_2^{\beta_2}$, а «математическое ожидание» выигрыша каждого из игроков в партии при использовании ими стратегий $\Sigma_1^{\tau_1}$, $\Sigma_2^{\tau_2}$ — через

$$\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2) \equiv \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2), \quad \mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2) \equiv -\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$$

(см. пп. 11.2.3 и 14.1.1). Обозначим соответствующие величины в игре $\Gamma_{\sigma_1}$ через $\Sigma^1_{\sigma_1/1}, \ldots, \Sigma^{\beta_{\sigma_1/1}}_{\sigma_1/1}$ и $\Sigma^1_{\sigma_1/2}, \ldots, \Sigma^{\beta_{\sigma_1/2}}_{\sigma_1/2}$ и при использовании стратегий $\Sigma^{\tau_{\sigma_1/1}}_{\sigma_1/1}$, $\Sigma^{\tau_{\sigma_1/2}}_{\sigma_1/2}$ положим

$$\mathcal{K}_{\sigma_1/1}(\tau_{\sigma_1/1}, \tau_{\sigma_2/2}) \equiv \mathcal{K}_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1}, \tau_{\sigma_1}{}_2),$$

$$\mathcal{K}_{\sigma_1/2}(\tau_{\sigma_1/1}, \tau_{\sigma_1/2}) \equiv -\mathcal{K}_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1}, \tau_{\sigma_1/2}).$$

---

1) Мы уже установили это для $\lambda = 2, 3, \ldots$; для $\lambda = 1$ это выполняется автоматически: каждое разбиение является подразбиением $\mathcal{A}_1$, поскольку $\mathcal{A}_1$ состоит из единственного множества (см. (10.1.j) в п. 10.1.1).

2) По поводу обоснования, если таковое потребуется, см. сноску 3 на стр. 89.

3) Начиная с этого места, будем писать $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$ вместо $\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_\nu$, так как ни к каким недоразумениям это не приведет,

Составим выражения для $v_1$, $v_2$ из п. 14.4.1 в игре $\Gamma$ и в игре $\Gamma_{\sigma_1}$, обозначая их в последнем случае через $v_{\sigma_1/1}$, $v_{\sigma_1/2}$. Таким образом,

$$v_1 = \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2),$$

$$v_2 = \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2),$$

$$v_{\sigma_1/1} = \max_{\tau_{\sigma_1/1}} \min_{\tau_{\sigma_1/2}} \mathcal{K}_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1}, \tau_{\sigma_1/2}),$$

$$v_{\sigma_1/2} = \min_{\tau_{\sigma_1/2}} \max_{\tau_{\sigma_1/1}} \mathcal{K}_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1}, \tau_{\sigma_1/2}).$$

Наша задача состоит в выражении $v_1$ и $v_2$ через $v_{\sigma_1/1}$ и $v_{\sigma_1/2}$.

Индекс $k_1$ из пп. 15.1.2, 15.2.1, который определяет характер хода $\mathcal{M}_1$, будет играть существенную роль. Поскольку $n = 2$, $k_1$ может принимать только значения 0, 1 и 2. Мы рассмотрим каждый из этих трех случаев отдельно.

**15.4.2.** Рассмотрим сначала случай $k_1 = 0$, т. е. $\mathcal{M}_1$ является случайным ходом. Вероятности альтернатив $\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$ равны $p_1(1), \ldots, p_1(\alpha_1)$ ($p_1(\sigma_1)$ равно $p_1(c_1)$ из (10:A:h) в п. 10.1.1 при $c_1 = c_1(\sigma_1)$ в п. 15.2.1).

Стратегия игрока 1 состоит, очевидно, в выборе стратегии $\Sigma_{\sigma_1/1}^{\tau_{\sigma_1/1}}$ игрока 1 в игре $\Gamma_{\sigma_1}$ для каждого из значений случайной величины $\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$ [1]; таким образом, $\Sigma_1^{\tau_1}$ соответствует совокупности $\Sigma_{1/1}^{\tau_{1/1}}, \ldots, \Sigma_{\alpha_1/1}^{\tau_{\alpha_1/1}}$ для всевозможных комбинаций $\tau_{1/1}, \ldots, \tau_{\alpha_1/1}$.

Аналогично стратегия игрока 2 в $\Gamma$ состоит в выборе стратегии $\Sigma_{\sigma_1/2}^{\tau_{1/2}}$ игрока 2 в $\Gamma_{\sigma_1}$ для каждого из значений случайной величины $\sigma_1 = 1, \ldots, \alpha_1$; таким образом, $\Sigma_2^{\tau_2}$ соответствует совокупности $\Sigma_{1/2}^{\tau_{1/2}}, \ldots, \Sigma_{\alpha_1/2}^{\tau_{\alpha_1/2}}$ для всевозможных комбинаций $\tau_{1/2}, \ldots, \tau_{\alpha_1/2}$.

«Математические ожидания» выигрыша в играх $\Gamma$ и $\Gamma_{\sigma_1}$ связываются очевидной формулой

$$\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = \sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1)\, \mathcal{K}_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1}, \tau_{\sigma_1/2}).$$

Следовательно, выражение для $v_1$ принимает вид

$$v_1 = \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) =$$

$$= \max_{\tau_{1/1}, \ldots, \tau_{\alpha_1/1}} \; \min_{\tau_{1/2}, \ldots, \tau_{\alpha_1/2}} \; \sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1)\, \mathcal{K}_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1}, \tau_{\sigma_1/2}).$$

Соответствующее индексу $\sigma_1$ в стоящей справа сумме $\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1}$ слагаемое

$$p_1(\sigma_1)\, \mathcal{K}_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1}, \tau_{\sigma_1/2})$$

содержит только две переменные: $\tau_{\sigma_1/1}$, $\tau_{\sigma_1/2}$. Таким образом, пары

$$\tau_{1/1}, \tau_{1/2}; \ldots; \tau_{\alpha_1/1}, \tau_{\alpha_1/2}$$

[1] Интуитивно это очевидно. Читатель может показать это и формально, применяя определения п. 11.1.1 и (11:A) из п. 11.1.3 к ситуации, описанной в п. 15.2.1.

встречаются порознь в различных $\sigma_1$-членах:

$$\sigma_1 = 1, \ldots; \sigma_1 = \alpha_1.$$

Следовательно, при нахождении $\min\limits_{\tau_{1/2}, \ldots, \tau_{\alpha_1/2}}$ можно минимизировать $\sigma_1$-слагаемые независимо друг от друга, а при нахождении $\max\limits_{\tau_{1/1}, \ldots, \tau_{\alpha_1/1}}$ можно эти $\sigma_1$-слагаемые независимо максимизировать. В соответствии с этим наше выражение принимает вид

$$\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1) \max_{\tau_{\sigma_1/1}} \min_{\tau_{\sigma_1/2}} \mathcal{K}_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1}, \tau_{\sigma_1/2}) = \sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1) \mathrm{v}_{\sigma_1/1}.$$

Таким образом, мы показали, что

$$\mathrm{v}_1 = \sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1) \mathrm{v}_{\sigma_1/1}. \tag{15:2}$$

Переставляя max и min, мы, применяя буквально ту же аргументацию, получаем

$$\mathrm{v}_2 = \sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1) \mathrm{v}_{\sigma_1/2}. \tag{15:3}$$

**15.4.3.** При исследовании случая $k_1 = 1$ мы будем пользоваться результатом п. 13.5.3. Несмотря на исключительно формальный характер этого результата, представляется полезным показать читателю, что это просто формальное утверждение интуитивно правдоподобного факта, касающегося игр. Это прояснит также, почему этот результат должен сыграть определенную роль в данной конкретной ситуации.

Интерпретация результата п. 13.5.3 основана на рассмотрениях пп. 14.2—14.5 и особенно из пп. 14.5.1, 14.5.2; поэтому ее не удалось изложить в п. 13.5.3.

Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой Γ в нормальной форме (см. п. 14.1.1) и минорантную и мажорантную игры $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ (см. п. 14.2).

Если мы решим трактовать нормальную форму игры Γ так, как если бы она была позиционной, а затем с помощью правил, изложенных в пп. 11.2.2 и 11.2.3, вводить стратегии и т. д. с целью получить новую игру в нормальной форме, то, как это отмечалось в п. 11.3 и, в частности, в сноске 3 на стр. 109, ничего не произойдет. Иначе обстоит, однако, дело с мажорантной и минорантной играми $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$. Они, как об этом упоминалось в сносках 1 и 2 на странице 127, не заданы в нормальной форме. Следовательно, представляется естественным и необходимым привести их к нормальной форме по правилам пп. 11.2.2, 11.2.3.

Поскольку полные решения игр $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ были найдены в пп. 14.3.1, 14.3.3, следует ожидать, что эти игры окажутся вполне определенными [1]).

---

[1]) Эта аргументация носит чисто эвристический характер, поскольку принципы, на которых строится решение в пп. 14.3.1, 14.3.3, не совпадают с теми, которыми мы пользовались в случае полной определенности в пп. 14.5.1, 14.5.2; тем не менее они являются основой для дальнейшего. Верно также, что аргументацию можно сделать вполне удовлетворительной при помощи некоторого чисто словесного, «нематематического» разъяснения. Однако мы предпочитаем исследовать вопрос математически по тем же причинам, что и в аналогичном случае в п. 14.3.2.

Достаточно ограничиться рассмотрением игры $\Gamma_1$ (см. начало п. 14.3.4), к чему мы и перейдем.

Для игры $\Gamma_1$ будем пользоваться обозначениями $\tau'_1$, $\tau'_2$, $\mathcal{K}'(\tau'_1, \tau'_2)$ и $v'_1$, $v'_2$, а соответствующие понятия для игры $\Gamma$ будем обозначать через $\tau_1$, $\tau_2$, $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$, $v_1$, $v_2$.

Стратегия игрока 1 в игре $\Gamma_1$ состоит в выборе (фиксированного) значения $\tau_1$ $(=1, \ldots, \beta_1)$, в то время как стратегия игрока 2 в $\Gamma_1$ состоит в выборе значения $\tau_2$ $(=1, \ldots, \beta_2)$ в зависимости от выбора $\tau_1$, $\tau_1$ $(=1, \ldots, \beta_1)$ [1]. Таким образом, $\tau_2$ является функцией от $\tau_1$: $\tau_2 = \mathcal{J}_2(\tau_1)$.

Таким образом, $\tau'_1$ есть $\tau_1$, тогда как $\tau'_2$ соответствует функциям $\mathcal{J}_2$, а $\mathcal{K}(\tau'_1, \tau'_2)$ превращается в $\mathcal{K}(\tau_1, \mathcal{J}_2(\tau_1))$.

Поэтому

$$v'_1 = \max_{\tau_1} \min_{\mathcal{J}_2} \mathcal{K}(\tau_1, \mathcal{J}_2(\tau_1)),$$

$$v'_2 = \min_{\mathcal{J}_1} \max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \mathcal{J}_2(\tau_1)).$$

Следовательно, утверждение о полной определенности игры $\Gamma_1$, т. е. о равенстве $v'_1 = v'_2$, полностью совпадает с равенством (13:E) из п. 13.5.3; для этого достаточно заменить $x$, $u$, $f(x)$, $\psi(x, f(x))$] соответственно на $\tau_1$, $\tau_2$, $\mathcal{J}_2(\tau_1)$, $\mathcal{K}(\tau_1, \mathcal{J}_2(\tau_1))$.

Эквивалентность результата п. 13.5.3 и полной определенности игры $\Gamma_1$ делает понятным значимость его для дальнейших рассмотрений. $\Gamma_1$ является очень простым примером игры с полной информацией,— эти игры становятся теперь конечной целью наших исследований (см. конец п. 15.3.2). Первый ход в игре $\Gamma_1$ — точно такого же типа, как и тот, который нам теперь нужно рассмотреть: он личный и принадлежит игроку 1, т. е. $k_1 = 1$ [2].

## 15.5. Точное исследование индуктивного перехода (продолжение)

**15.5.1.** Рассмотрим теперь случай, когда $k_1 = 1$, т. е. когда $\mathcal{M}_1$ есть личный ход игрока 1.

Стратегия $\Sigma_1^{\tau_1}$ игрока 1 в $\Gamma$ состоит, очевидно, из указания фиксированного значения $\sigma_1^0$ $(=1, \ldots, \alpha_1)$, а также фиксированной стратегии $\Sigma_{\sigma_1^0/1}^{\tau_{\sigma_1^0/1}}$ [2]), т. е. $\Sigma_1^{\tau_1}$ соответствует парам $\sigma_1^0$, $\tau_{\sigma_1^0/1}$.

Стратегия $\Sigma_2^{\tau_2}$ игрока 2 в $\Gamma$ состоит в выборе стратегии $\Sigma_{\sigma_1^0/2}^{\tau_{\sigma_1^0/2}}$ игрока 2 в $\Gamma_{\sigma_1^0}$ при всех значениях переменной $\sigma_1^0 = 1, \ldots, \alpha_1$. Тем самым $\tau_{\sigma_1^0/2}$ оказывается функцией от $\sigma_1^0$: $\tau_{\sigma_1^0/1} = \mathcal{J}_2(\sigma_1^0)$, т. е. $\Sigma_2^{\tau_2}$ соответствует функциям $\mathcal{J}_2$, и, очевидно,

$$\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = \mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/2}, \mathcal{J}_2(\sigma_1^0)).$$

Поэтому наша формула для $v_1$ дает

$$v_1 = \max_{\sigma_1^0, \tau_{\sigma_1^0/1}} \min_{\mathcal{J}_2} \mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \mathcal{J}_2(\sigma_1^0)) = \max_{\tau_{\sigma_1^0/1}} \max_{\sigma_1^0} \min_{\mathcal{J}_2} \mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \mathcal{J}_2(\sigma_1^0)).$$

---

[1]) Это интуитивно очевидно. Переформулировав определение п. 14.2 на языке разбиений и множеств и используя определения из п. 11.1.1 и (11:A) из п. 11.1.3, читатель может провести формальный вывод.

Существенно то, что в $\Gamma_1$ личный ход игрока 1 предшествует ходу игрока 2.

[2]) См. сноску 1 на стр. 145 и предыдущую сноску.

Из равенства (13:G) в п. 13.5.3 мы получаем заменой $x$, $u$, $f(x)$ и $\psi(x, y)$ соответственно на $\sigma_1^0$, $\tau_{\sigma_1^0/2}$, $\mathcal{J}_2(\sigma_1^0)$ и $\mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2})$ [1]:

$$\max_{\sigma_1^0}\min_{\mathcal{J}_2}\mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \mathcal{J}_2(\sigma_1^0)) = \max_{\sigma_1^0}\min_{\tau_{\sigma_1^0/2}}\mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2}).$$

Далее имеем

$$\mathrm{v}_1 = \max_{\tau_{\sigma_1^0/1}}\max_{\sigma_1^0}\min_{\tau_{\sigma_1^0/2}}\mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2}) =$$

$$= \max_{\sigma_1^0}\max_{\tau_{\sigma_1^0/1}}\min_{\tau_{\sigma_1^0/2}}\mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2}) = \max_{\sigma_1^0}\mathrm{v}_{\sigma_1^0/1}.$$

Формула для $\mathrm{v}_2$ дает нам [2]

$$\mathrm{v}_2 = \min_{\mathcal{J}_2}\max_{\sigma_1^0, \tau_{\sigma_1^0/1}}\mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \mathcal{J}_2(\sigma_1^0)) =$$

$$= \min_{\mathcal{J}_2}\max_{\sigma_1^0}\max_{\tau_{\sigma_1^0/1}}\mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \mathcal{J}_2(\sigma_1^0)).$$

Теперь

$$\min_{\mathcal{J}_2}\max_{\sigma_1^0}\max_{\tau_{\sigma_1^0/1}}\mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \mathcal{J}_2(\sigma_1^0)) =$$

$$= \max_{\sigma_1^0}\min_{\mathcal{J}_2}\max_{\tau_{\sigma_1^0/1}}\mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \mathcal{J}_2(\sigma_1^0)) = \max_{\sigma_1^0}\min_{\tau_{\sigma_1^0/2}}\max_{\tau_{\sigma_1^0/1}}\mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2})$$

следует из (13:E) и (13:G) из п. 13.5.3; достаточно только заменить $x$, $u$, $f(x)$, $\psi(x, u)$ на $\sigma_1^0$, $\tau_{\sigma_1^0/2}$, $\mathcal{J}_2(\sigma_1^0)$, $\max_{\tau_{\sigma_1^0/1}}\mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2})$ [3]. Следовательно,

$$\mathrm{v}_2 = \max_{\sigma_1^0}\min_{\tau_{\sigma_1^0/2}}\max_{\tau_{\sigma_1^0/1}}\mathcal{K}_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2}) = \max_{\sigma_1^0}\mathrm{v}_{\sigma_1^0/2}.$$

Резюмируя (и заменяя $\sigma_1^0$ на $\sigma_1$), мы получаем

(15:4) $$\mathrm{v}_1 = \max_{\sigma_1}\mathrm{v}_{\sigma_1/1},$$

(15:5) $$\mathrm{v}_2 = \max_{\sigma_1}\mathrm{v}_{\sigma_1/2}.$$

**15.5.2.** Рассмотрим, наконец, случай $k_1 = 2$, при котором ход $\mathcal{M}_1$ принадлежит игроку 2.

Перемена ролями игроков 1 и 2 сводит этот случай к предыдущему.

---

[1]) В этом случае $\tau_{\sigma_1^0/1}$ следует понимать как константу. Этот шаг, очевидно, тривиален — см. приведенную выше аргументацию.

[2]) В отличие от п. 15.4.2, здесь наблюдается существенное различие в толковании смысла $\mathrm{v}_1$ и $\mathrm{v}_2$.

[3]) $\tau_{\sigma_1^0/1}$ исключается операцией максимизации $\max_{\tau_{\sigma_1^0/1}}$. Этот шаг не тривиален. Он использует (13:E) из п. 13.5.3 и является существенным результатом этого пункта, как отмечается в п. 15.4.3.

Как было показано в п. 14.6, эта перемена приводит к замене $v_1$ и $v_2$ на $-v_2$ и $-v_1$ и, следовательно, $v_{\sigma_1/1}$ и $v_{\sigma_1/2}$ на $-v_{\sigma_1/2}$ и $-v_{\sigma_1/1}$. При подстановке полученных после замены значений в формулы (15:4) и (15:5) становится очевидной замена max на min, и мы получаем

(15:6) $$v_1 = \min_{\sigma_1} v_{\sigma_1/1},$$

(15:7) $$v_2 = \min_{\sigma_1} v_{\sigma_1/2}.$$

**15.5.3.** Формулы (15:2)—(15:7) из пп. 15.4.2, 15.5.1 и 15.5.2 можно объединить следующим образом.

Для произвольной функции $f(\sigma_1)$ переменной $\sigma_1$ $(= 1, \ldots, \alpha_1)$ определим операции $M_{\sigma_1}^{k_1}$, $k_1 = 0, 1, 2$, полагая

(15:8) $$M_{\sigma_1}^{k_1} f(\sigma_1) = \begin{cases} \sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1) f(\sigma_1) & \text{при} \quad k_1 = 0, \\ \max_{\sigma_1} f(\sigma_1) & \text{при} \quad k_1 = 1, \\ \min_{\sigma_1} f(\sigma_1) & \text{при} \quad k_1 = 2. \end{cases}$$

Тогда

$$v_k = M_{\sigma_1}^{k_1} v_{\sigma_1/k} \quad \text{при} \quad k = 1, 2.$$

Подчеркнем некоторые простые свойства введенных операций $M_{\sigma_1}^{k_1}$.

Во-первых, $M_{\sigma_1}^{k_1}$ связывает переменную $\sigma_1$: $M_{\sigma_1}^{k_1} f(\sigma_1)$ не зависит более от $\sigma_1$. Для $k_1 = 1, 2$, т. е. для $\max_{\sigma_1}$, $\min_{\sigma_1}$, это было обнаружено в п. 13.2.3. Для $k_1 = 0$ это очевидно; эта операция, таким образом, аналогична операции интегрирования, упомянутой в качестве иллюстрации в сноске 1 на стр. 117.

Во-вторых, $M_{\sigma_1}^{k_1}$ явно зависит от игры Г. Это очевидно, поскольку $M_{\sigma_1}^{k_1}$ зависит от $k_1$, а $\sigma_1$ принимает значения $1, \ldots, \alpha_1$. Дальнейшая зависимость появляется ввиду использования $p_1(1), \ldots, p_1(\alpha_1)$ в случае $k_1 = 0$.

В-третьих, зависимость $v_k$ от $v_{\sigma_1/k}$ одна и та же при $k = 1, 2$ для всех значений $k_1$.

Мы закончим замечанием, что можно было бы легко сделать эти формулы — охватывающие математическое ожидание $\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_2} p_1(\sigma_1) f(\sigma_1)$ для случайного хода, максимум для личного хода первого игрока и минимум для хода его противника — достаточно правдоподобными при помощи чисто словесных (нематематических) рассуждений. Тем не менее представляется необходимым дать точное математическое описание, чтобы полностью отдать должное роли $v_1$ и $v_2$. Чисто словесная аргументация, которая могла бы это осуществить, неизбежно окажется настолько сложной (если вообще понятной), что не будет представлять большой ценности.

## 15.6. Результат для случая полной информации

**15.6.1.** Возвратимся к ситуации, описанной в конце п. 15.3.2, и примем все упомянутые там допущения; предположим, что игра Г является игрой двух лиц с нулевой суммой с полной информацией. Вместе с формулой (15:8) из п. 15.5.3, обеспечивающей индуктивный переход, приведенная

там схема даст нам возможность определить некоторые важные свойства игры Г.

Докажем прежде всего, не вдаваясь в дальнейшие подробности, что игра Г вполне определена. Доказательство проведем полной индукцией по длине игры $\nu$ (см. п. 15.1.2). Оно будет состоять в доказательстве двух утверждений:

(15:С:а) Это справедливо для игр минимальной длины, т. е. для случая $\nu = 0$.

(15:С:b) Из того, что это справедливо для игр длины $\nu - 1$ при некотором $\nu = 1, \ldots, 2, \ldots,$ следует его справедливость для игр длины $\nu$.

Доказательство (15:С:а). Если длина игры Г равна нулю, то игра не содержит ни одного хода и состоит в выплате игрокам 1 и 2 некоторых фиксированных сумм w и —w [1]). Следовательно, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\tau_1 = \tau_2 = 1$, $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = w$ [2]), и, таким образом,

$$v_1 = v_2 = w;$$

т. е. игра Г вполне определена, и $v = w$ [3]).

Доказательство (15:С:b). Пусть Г имеет длину $\nu$. Тогда каждая из игр $\Gamma_{\sigma_1}$ имеет длину $\nu - 1$. Следовательно, по предположенному игры $\Gamma_{\sigma_1}$ вполне определены. Поэтому $v_{\sigma_1/1} \equiv v_{\sigma_1/2}$. Теперь формула (15:8) из п. 15.5.3 показывает [4]), что $v_1 = v_2$. Следовательно, игра Г также вполне определена, и доказательство завершено.

**15.6.2.** Перейдем теперь к более подробному и явному выводу равенства $v_1 = v_2 = v$ для игры Г. Для этого нам не понадобится даже результат п. 15.6.1.

Составим, как мы это делали в конце п. 15.3.2, последовательность игр

(15:9) $$\Gamma,\ \Gamma_{\sigma_1},\ \Gamma_{\sigma_1, \sigma_2},\ \Gamma_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3},\ \ldots,\ \Gamma_{\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu}\ ^{5)},$$

длины которых соответственно равны

$$\nu,\ \nu - 1,\ \nu - 2,\ \ldots,\ 0.$$

Обозначим величины $v_1$ и $v_2$ для этих игр через

$$v_k,\ v_{\sigma_1/k},\ v_{\sigma_1, \sigma_2/k},\ \ldots,\ v_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu/k}.$$

Для проведения индуктивного перехода, описанного в конце п. 15.3.2, применим формулу (15:8), заменив при любом $\varkappa = 1, \ldots, \nu$ выражения $\sigma_1$, Г, $\Gamma_{\sigma_1}$ из п. 15.5.3 на $\sigma_\varkappa$, $\Gamma_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}}$, $\Gamma_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}, \sigma_\varkappa}$. Тогда $k_1$ из п. 15.5.3 относится к первому ходу в $\Gamma_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}}$, т. е. к ходу $\mathcal{M}_\varkappa$ игры Г. Поэтому его удобно обозначить через $k_\varkappa(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1})$ (см. п. 7.2.1). Следовательно, заменяя $M_{\sigma_1}^{k_1}$ из п. 15.5.3, сконструируем

---

[1]) См. игру из замечания на странице 102 или $\Gamma_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_\nu}$ из п. 15.3.1. В терминах разбиений и множеств (10:1:f), (10:1:g) из п. 10.1.1 показывают, что при $\nu = 0$ множество $\Omega$ содержит только один элемент $\bar\pi$. Таким образом, $w = \mathcal{F}_1(\bar\pi)$, $-w = \mathcal{F}_2(\bar\pi)$ играют указанную выше роль.

[2]) То есть каждый игрок имеет по одной стратегии, состоящей в том, чтобы ничего не делать.

[3]) Это, разумеется, очевидно. Существенным шагом является (15:С:b).

[4]) См. замечание в конце п. 15.5.3. Формула при любых значениях $k_1$ одна и та же для $k = 1, 2$.

[5]) См. сноску 3 на странице 144.

операцию $M_{\sigma_\varkappa}^{k_\varkappa(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1})}$. На этом пути мы получим

(15:10) $$v_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}/k} = M_{\sigma_\varkappa}^{k_\varkappa(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1})} v_{\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa/k} \quad \text{для} \quad k = 1, 2.$$

Рассмотрим теперь последний член последовательности (15:9), игру $\Gamma_{\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu}$. Она подпадает под рассмотрение (15:C:a) из п 15.5.1; эта игра вовсе не содержит ходов. Обозначим единственную возможную в ней партию через $\bar{\pi} = \bar{\pi}(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)$ [1]. Следовательно w в ней фиксировано [2] и равно $\mathscr{F}_1(\bar{\pi}(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu))$. Таким образом, мы получаем

(15:11) $$v_{\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu/1} = v_{\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu/2} = \mathscr{F}_1(\bar{\pi}(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)).$$

Применим теперь (15:10) при $\varkappa = \nu$ к (15:11) и далее последовательно к $\varkappa = \nu - 1, \ldots, 2, 1$. Таким способом мы получим

(15:12) $$v_1 = v_2 = v = M_{\sigma_1}^{k_1} M_{\sigma_2}^{k_2(\sigma_1)} \ldots M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})} \mathscr{F}_1(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)).$$

Это еще раз доказывает, что игра $\Gamma$ вполне определена и дает в то же время явное выражение для значения игры.

## 15.7. Применение к шахматам

**15.7.1.** Рассуждения п. 6.4.1 и утверждения п. 14.8 об играх двух лиц с нулевой суммой, в которых предварение эквивалентно предшествованию, т. е. об играх, в которых имеет место полная информация, теперь уже обоснованы. Мы ссылались там на распространенное мнение, что такие игры обладают некоторыми свойствами рациональности; теперь мы придали этой расплывчатой точке зрения точный смысл, показав, что такие игры вполне определены. Мы показали также, что это справедливо и для игр, содержащих случайные ходы,— факт, в меньшей степени основанный на «общих соображениях».

В п. 6.4.1 были приведены примеры игр с полной информацией: шахматы (без случайных ходов) и трик-трак (со случайными ходами). Таким образом, для всех этих игр мы установили существование определенного значения (для партии) и определенных оптимальных стратегий. Однако существование таких стратегий доказано в абстрактном виде, и метод их построения в большинстве случаев слишком громоздок для эффективного применения [3].

В связи с этим стоит рассмотреть более подробно игру в шахматы.

Исходы игры в шахматы, т. е. множество значений функций $\mathscr{F}_k$ из п. 6.2.2 или п. 9.2.4, ограничиваются тремя числами 1, 0, —1 [4]. Таким образом, функции $\mathscr{G}_k$ из п. 11.2.2 принимают те же значения, и, поскольку случайные ходы отсутствуют, то же самое верно и для функций $\mathscr{K}_k$ из п. 11.2.3 [5]. Далее мы будем пользоваться функцией $\mathscr{K} = \mathscr{K}_1$ из

[1]) См. замечания по поводу $\Gamma_{\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_2}$ в п. 15.3.1.

[2]) См. (15.C:a) из п. 15.6.1, в частности, сноску 1 на стр. 150.

[3]) В основном это связано с тем, что $\nu$ чудовищно велико. По поводу шахмат см. соответствующую часть замечания 1 на стр. 85. Фигурирующее там $\nu^*$ совпадает с нашим $\nu$; см. конец п. 7.2.3.

[4]) Это наиболее простой способ интерпретации понятий «выигрыш», «ничья», «проигрыш».

[5]) Каждое значение $\mathscr{G}_k$ является также значением $\mathscr{F}_k$, каждое значение $\mathscr{K}_k$ при отсутствии случайных ходов является значением $\mathscr{G}_k$. При наличии случайных ходов значением $\mathscr{K}_k$ была бы вероятность «выигрыша» минус вероятность «проигрыша», т. е. некоторое число, лежащее между 1 и —1.

п. 14.1.1. Поскольку $\mathcal{K}$ принимает только значения 1, 0, —1, число

$$v = \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \tag{15.13}$$

равно одному из чисел

$$v = 1, 0, -1.$$

Мы предоставляем читателю провести простые рассуждения о том, что (15:13) означает следующее:

(15:D:a) Если v = 1, то игрок (белые) обладает стратегией, при которой он «выигрывает» независимо от действий второго игрока (черных).

(15:D:b) Если v = 0, то каждый из игроков обладает стратегией, при которой он может гарантировать ничейный исход (или выигрыш) независимо от действий другого игрока.

(15:D:c) Если v = —1, то игрок2 (черные) обладает стратегией, при которой он «выигрывает» независимо от действий первого игрока (белых) [1]).

15.7.2. Мы видим, что если теория шахмат была бы уже полностью известна, то в эту игру было бы неинтересно играть. Эта теория показала бы, какая из трех возможностей (15:D:a), (15:D:b), (15:D:c) в действительности имеет место, и исход партии стал бы известен до начала игры: в случае (15:D:a) им был бы выигрыш белых, в случае (15:D:b) — ничья, и в случае (15:D:c) — выигрыш черных.

Однако наше доказательство, гарантирующее осуществление одного и только одного из этих трех исходов, не дает практического метода отыскания истинного исхода. Такая относительная трудность делает необходимым использование неполных, эвристических методов игры, которые и составляют «хорошую» игру в шахматы; без этого в шахматах не было бы элементов неожиданности и борьбы.

## 15.8. Другой подход. Словесные рассуждения

15.8.1. Закончим этот параграф одним более простым и менее формальным подходом к нашему основному результату о том, что игра двух лиц с нулевой суммой с полной информацией всегда вполне определена.

Можно оспаривать доказательность приводимой аргументации; мы предпочитаем сформулировать ее как правдоподобное рассуждение, с помощью которого оказывается возможным приписать значение каждой партии любой игры Г указанного вида, и оставляем возможность ее критики. Мы не считаем необходимым показывать во всех деталях опровержение этой критики, поскольку мы получаем то же значение для партии игры Г, что и в пп. 15.4—15.6, где было дано вполне строгое доказательство,

---

[1]) При наличии случайных ходов $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ выражает превышение вероятности «выигрыша» над вероятностью «проигрыша». Игроки стремятся максимизировать или соответственно минимизировать это число, и строгая трихотомия, описанная в (15:D:a) — (15:D:c), вообще говоря, не получается.

Хотя трик-трак является игрой с полной информацией, содержащей случайные ходы, ее нельзя считать удачным примером для иллюстрации описанной выше возможности. Трик-трак играется с целью получения различных выигрышей, а не просто «выигрыша», «ничьей», «проигрыша», т. е. возможные значения функции $\mathcal{F}_k$ не ограничиваются числами 1, 0, —1.

основанное на четко определенных понятиях. Ценность приводимых правдоподобных рассуждений заключается в том, что они легче уясняются и могут быть повторены применительно к другим играм с полной информацией, выходящим за пределы класса игр двух лиц с нулевой суммой. Мы хотим здесь подчеркнуть, что та же критика приложима и в общем случае и что ее нельзя оставить без опровержения. Действительно, решение в общем случае (даже для игр с полной информацией) будет найдено совсем иным путем. Наши рассуждения прояснят природу различия между случаем игр двух лиц с нулевой суммой и общим случаем. Это будет достаточно важным для обоснования существенно отличающихся друг от друга методов, которые будут применяться в общем случае (см. § 24).

15.8.2. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой Г с полной информацией. Воспользуемся обозначениями п. 15.6.2, указав $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_\nu$; $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$; $k_1$, $k_2(\sigma_1), \ldots, k_\nu(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1})$; вероятности; операторы $M_{\sigma_1}^{k_1}$, $M_{\sigma_2}^{k_2(\sigma_1)}, \ldots, M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1})}$; последовательность игр (15:9), полученную из Г, и функцию $\mathcal{F}_1(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu))$.

Начнем исследование игры Г с последнего хода $\mathcal{M}_\nu$, после чего пойдем в обратном направлении через ходы $\mathcal{M}_{\nu-1}, \mathcal{M}_{\nu-2}, \ldots$ Предположим сначала, что выборы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1}$ соответственно при ходах $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$ $\ldots, \mathcal{M}_{\nu-1}$ уже сделаны и совершается выбор $\sigma_\nu$ (при ходе $\mathcal{M}_\nu$).

Если ход $\mathcal{M}_\nu$ случайный, т. е. если $k_\nu(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1}) = 0$, то $\sigma_\nu$ будет принимать значения $1, 2, \ldots, \alpha_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})$ соответственно с вероятностями $p_\nu(1), p_\nu(2), \ldots, p_\nu(\alpha_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}))$. Поэтому математическое ожидание выигрыша (игрока 1) $\mathcal{F}_1(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu))$ будет равно

$$\sum_{\sigma_\nu=1}^{\alpha_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})} p_\nu(\sigma_\nu)\, \mathcal{F}_1(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu)).$$

Если $\mathcal{M}_\nu$ является личным ходом игрока 1 или 2, т. е. если $k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}) = 1$ или 2, то игрок будет при выборе $\sigma_\nu$ максимизировать или минимизировать $\mathcal{F}_1(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu))$, т. е. исходом игры будет $\max_{\sigma_\nu} \mathcal{F}_1(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu))$ или $\min_{\sigma_\nu} \mathcal{F}_1(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu))$.

Таким образом, во всех случаях математическое ожидание выигрыша (после выборов $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}$) равно

$$M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})} \mathcal{F}_1(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)).$$

Предположим, далее, что выбраны только $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-2}$ (при ходах $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{\nu-2}$) и предстоит выбрать $\sigma_{\nu-1}$ (при ходе $\mathcal{M}_{\nu-1}$).

Поскольку определенный выбор $\sigma_{\nu-1}$ приводит, как мы уже видели, к исходу $M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})} \mathcal{F}_1(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu))$, который является функцией только от $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}$ (так как операция $M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})}$ связывает переменную $\sigma_\nu$), мы можем поступить так же, как и раньше. Нам нужно только заменить $\nu$; $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$; $M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})} \mathcal{F}_1(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu))$ соответственно на $\nu - 1$; $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}$; $M_{\sigma_{\nu-1}}^{k_{\nu-1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-2})} M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})} \mathcal{F}_1(\pi(\sigma_1, \ldots$ $\ldots, \sigma_\nu))$. Следовательно, ожидаемый выигрыш в игре после выполнения

выборов $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-2}$ равен

$$M_{\sigma_{\nu-1}}^{k_{\nu-1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-2})} M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})} \mathcal{F}_1(\bar{\pi}(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)).$$

Аналогично математическое ожидание выигрыша в игре после выборов $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-3}$ равно

$$M_{\sigma_{\nu-2}}^{k_{\nu-2}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-3})} M_{\sigma_{\nu-1}}^{k_{\nu-1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-2})} M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})} \mathcal{F}_1(\bar{\pi}(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)).$$

Наконец, математическое ожидание выигрыша во всей игре — перед тем как она началась — равно

$$M_{\sigma_1}^{k_1} M_{\sigma_2}^{k_2(\sigma_1)} \ldots M_{\sigma_{\nu-1}}^{k_{\nu-1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-2})} M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})} \mathcal{F}_1(\bar{\pi}(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)).$$

А это в точности совпадает со значением v из (15:12) в п. 15.6.2 [1]).

**15.8.3.** Основным возражением против процедуры, описанной в п. 15.8.2, является то, что этот подход к «значению» для партии игры Г предполагает наличие «рационального» поведения всех игроков; иными словами, стратегия игрока 1 основана на предположении об оптимальности стратегии игрока 2, и наоборот.

Положим, в частности, $k_{\nu-1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-2}) = 1$, $k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}) = 2$. Тогда игрок 1 при ходе $\mathcal{M}_{\nu-1}$ выбирает $\sigma_{\nu-1}$ в предположении, что игрок 2 при ходе $\mathcal{M}_\nu$ выбирает $\sigma_\nu$ «рациональным» образом. Единственным оправданием для такого предположения является то, что выбор $\sigma_{\nu-1}$ приводит к выигрышу $\min_{\sigma_\nu} \mathcal{F}_1(\bar{\pi}(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu))$, т. е. к $M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})} \mathcal{F}_1(\bar{\pi}(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu))$ (см. определение $\mathcal{M}_{\nu-1}$ в п. 15.8.2).

Во второй части п. 4.2.1 мы пришли к заключению, что гипотезы о «рациональном» поведении противников следует избегать. Аргументация в п. 15.8.2 не удовлетворяет этому требованию.

Однако можно согласиться с тем, что в игре двух лиц с нулевой суммой можно предположить рациональность поведения противника, поскольку ошибки противника никогда не вредят игроку. Действительно, так как речь идет об игре с двумя участниками, и сумма их выигрышей равна нулю, любые потери, которые несет один игрок (в том числе вследствие своей неразумности), необходимо оборачиваются равным по величине выигрышем другого игрока [2]). В таком виде этому соображению далеко до полноты, но оно может быть тщательно разработано. Однако для нас нет необходимости проводить здесь строгие рассуждения: мы располагаем доказательством пп. 15.4—15.6, которое для такой критики неуязвимо [3]).

---

[1]) Представляя себе применение указанной процедуры в какой-либо конкретной игре, следует помнить, что длина игры Г предполагается фиксированной. Если v является в действительности переменной, как это имеет место в большинстве игр (см. замечание 1 на стр. 85), то следует сделать ее постоянной, дополнив игру фиктивными бессодержательными ходами, как это описано в конце п. 7.2.3. Только после этого становится допустимым обратное движение через ходы $\mathcal{M}_\nu, \mathcal{M}_{\nu-1}, \ldots, \mathcal{M}_1$. Для практических построений эта процедура, конечно, не лучше, чем описанная в пп. 15.4—15.6.

Возможно, некоторые простые игры типа игры в крестики и нолики могут быть эффективно исследованы таким способом.

[2]) Это не обязательно так, если игра не является игрой с нулевой суммой или же если она имеет более двух игроков.

[3]) См. в связи с этим (14:D:a), (14:D:b), (14:C:d), (14:C:e) в п. 14.5.1 и (14:C:a), 14:C:b) в п. 14.5.2.

Тем не менее предыдущие рассуждения могут оказаться значимыми для некоторого существенного аспекта вопроса. Мы увидим, как влияет изменение условий в более общем случае (без ограничения играми двух лиц с нулевой суммой, о котором говорилось в конце п. 15.8.1).

## § 16. ЛИНЕЙНОСТЬ И ВЫПУКЛОСТЬ

### 16.1. Геометрические основания

**16.1.1.** Задача, с которой нам сейчас придется иметь дело, заключается в нахождении решений для всех игр двух лиц с нулевой суммой; при этом мы встречаемся с трудностями, вытекающими из неполной определенности игры. Мы добьемся успеха, пользуясь теми же идеями, которым мы следовали в случае определенности: окажется, что эти идеи можно обобщить настолько, что будут охвачены все игры двух лиц с нулевой суммой. Для того чтобы это сделать, мы должны будем воспользоваться некоторыми возможностями теории вероятностей (см. пп. 17.1, 17.2). Кроме того, окажется необходимым также применение несколько необычного математического аппарата. Наш анализ в § 13 составляет одну его часть; для оставшегося удобнее всего будет возвращение к математико-геометрической теории *линейности* и *выпуклости*. Две теоремы о выпуклых телах будут иметь особенное значение [1]).

По этим причинам мы перейдем к изучению — в той степени, в какой они нам понадобятся, — понятий линейности и выпуклости.

**16.1.2.** Подробный анализ понятия $n$-мерного линейного (евклидова) пространства для нас не является необходимым. Достаточно будет сказать, что это пространство описывается $n$ числовыми координатами. В соответствии с этим определим для каждого $n = 1, 2, \ldots$, *$n$-мерное линейное пространство* $L_n$ как множество $n$-наборов вещественных чисел. Эти $n$-наборы можно рассматривать также как функции $x_i$ переменной $i$ с областью определения $(1, \ldots, n)$ в смысле пп. 13.1.2, 13.1.3 [2]). Мы, как это принято делать, будем называть $i$ индексом, а не переменной; однако это не влияет на существо дела. В частности, мы имеем

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

в том и только в том случае, когда $x_i = y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$ (см. конец п. 13.1.3). $L_n$ можно рассматривать также как простейшее возможное пространство числовых функций, заданных на фиксированном конечном множестве $(1, \ldots, n)$ [3]).

Эти $n$-наборы чисел, или функции из $L_n$, мы будем называть *точками* или *векторами* пространства $L_n$ и записывать как

(16:1) $$\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Значения $x_i$ для фиксированного $i = 1, \ldots, n$ (значения функции $x_i$) называются *компонентами* вектора $\vec{x}$.

---

[1]) См. T. Bonessen, W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, in «Ergebnissen der Mathematik und ihrer Grenzgebiete», vol. III/1, Berlin, 1934; дальнейшие исследования в H. Weyl, Elementare Theorie der konvexen Polyeder, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. VII, 1935, pp. 290—306 (русск. пер. в сб. «Матричные игры», физматгиз, 1961, стр. 254—273).

[2]) $n$-наборы $\{x_1, \ldots, x_n\}$ являются не просто множествами в смысле п. 8.2.1. Нумерация $x$ посредством индекса $i = 1, \ldots, n$ является столь же существенной, как и объединение их значений. См. сходную ситуацию в сноске 1 на стр. 95.

[3]) Многое в современном анализе подтверждает эту точку зрения.

**16.1.3.** Отметим, хотя это для дальнейшего несущественно, что $L_n$ является не *абстрактным евклидовым* пространством, а таким, в котором уже выбрана определенная *система отсчета* (система координат) [1].

*Нулевой вектор*, или *начало координат в* $L_n$, имеет вид

$$\vec{0} = \{0, \ldots, 0\}$$

*n-координатными векторами* пространства $L_n$ являются векторы

$$\vec{\delta}^j = \{0, \ldots, 1, \ldots, 0\} = \{\delta_{1j}, \ldots, \delta_{nj}\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad i = j \text{ [2, 3]}, \\ 0 & \text{для} \quad i \neq j. \end{cases}$$

После этого вступления мы можем описать основные свойства векторов из $L_n$ и основные операции над ними.

## 16.2. Операции над векторами

**16.2.1** Основными операциями над векторами являются операции *умножения на скаляр*, т. е. умножение вектора $\vec{x}$ на число $t$, и *векторное сложение*, т. е. сложение двух векторов. Обе эти операции определяются с помощью соответствующих операций над координатами векторов. Более точно:

Умножение на скаляр: $t \cdot \{x_1, \ldots, x_n\} = \{tx_1, \ldots, tx_n\}$.

Векторное сложение:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} + \{y_1, \ldots, y_n\} = \{x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n\}.$$

Алгебра этих операций настолько проста и очевидна, что мы не будем на ней останавливаться. Отметим только, что указанные операции позволяют выразить каждый вектор $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ через его компоненты и координатные векторы в виде

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\delta}^j \text{ [4]}.$$

Перечислим некоторые важные подмножества пространства $L_n$.

(16:A:a) Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$\text{(16:2:a)} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i\, {}_i = b$$

($a_1, \ldots, a_n, b$ — постоянные). Случай $a_1 = \ldots = a_n = 0$ мы исключаем из рассмотрения, так как в этом случае вообще не будет

---

[1] Во всяком случае, это является ортодоксальной геометрической точкой зрения.

[2] Таким образом, все координаты нулевого вектора равны нулю, в то время как $j$-я координата $j$-го координатного вектора равна 1, а остальные — нулю.

[3] $\delta_{ij}$ —«символ Кронекера и Вейерштрасса», удобный для использования во многих случаях.

[4] $x_j$ суть числа, и, следовательно, они в произведении $x_j\vec{\delta}_j$ играют роль скалярных множителей. $\sum_{j=1}^{n}$ означает векторное сложение.

никакого уравнения. Все точки (векторы), удовлетворяющие этому уравнению, образуют *гиперплоскость*[1]).

(16:A:b) Пусть задана гиперплоскость

(16:2:a) $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b;$$

она определяет две части пространства $L_n$:

(16:2:b) $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i > b$$

и

(16:2:c) $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i < b.$$

Это — два *полупространства*, порождаемые гиперплоскостью.

Заметим, что если заменить $a_1, \ldots, a_n, b$ на $-a_1, \ldots, -a_n, -b$, то гиперплоскость (16:2:a) останется неизменной, однако полупространства (16:2:b), и (16:2:c) поменяются местами. Следовательно, можно считать, что полупространство задается неравенством (16:2:b).

(16:A:c) Пусть даны две точки (вектора) $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и число $t \geqq 0$, для которого $1 - t \geqq 0$; тогда *центром тяжести* точек $\vec{x}$, $\vec{y}$ с весами $t$, $1-t$ мы будем, в соответствии с механическими представлениями, называть точку $t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$.

Равенства

$$\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad \vec{y} = \{y_1, \ldots, y_n\},$$

$$t\vec{x} + (1-t)\vec{y} = \{tx_1 + (1-t)y_1, \ldots, tx_n + (1-t)y_n\}$$

делают это определение понятным.

Подмножество $C$ пространства $L_n$, содержащее все центры тяжести своих точек (т. е. содержащее вместе с каждой парой своих точек $\vec{x}$, $\vec{y}$ все точки вида $t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$, $0 \leqq t \leqq 1$), называется *выпуклым*.

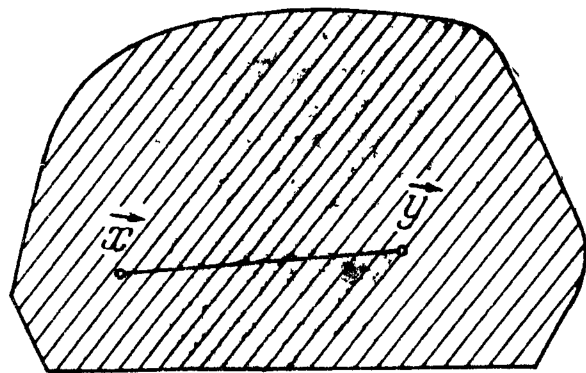



Рис. 11.

Читатель видит, что в случае $n = 2, 3$, т. е. в случае обычных плоскости и пространства, это является принятым понятием выпуклости. Действительно, множество всех точек вида $t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$, $0 \leqq t \leqq 1$, представляет собой прямолинейный отрезок, соединяющий точки $\vec{x}$, $\vec{y}$, *сегмент* $[\vec{x}, \vec{y}]$. Таким образом, выпуклым называется множество, содержащее вместе с любыми своими точками и соединяющий их сегмент. Рис. 11 поясняет это условие при $n = 2$, т. е. в случае плоскости.

**16.2.2.** Очевидно, что пересечение любого числа выпуклых множеств снова выпукло. Следовательно, для любого числа точек (векторов) $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^p$ существует наименьшее выпуклое множество, которое их всех содержит: пересечение всех выпуклых множеств, содержащих

---

[1]) Для $n = 3$ в обычном трехмерном пространстве это просто двумерные плоскости. В общем случае это их $(n-1)$-мерные аналоги; отсюда и название.

$\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^p$. Это — выпуклое множество, *натянутое* на точки $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^p$. Полезно проиллюстрировать этот факт для случая плоскости. См. рис. 12, где $p = 6$. Легко проверить, что это множество состоит из всех точек (векторов) вида

$$\sum_{j=1}^{p} t_j \vec{x}^j, \quad t_1 \geqq 0, \ldots, t_p \geqq 0, \tag{16:2:d}$$

где $\sum_{j=1}^{p} t_j = 1$.

Доказательство. Точки (16:2:d) образуют множество, содержащее все $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^p$. Действительно, чтобы получить представление для $\vec{x}^j$, достаточно положить $t_j = 1$, а все остальные $t_i = 0$.

Точки (16:2:d) образуют выпуклое множество: если $\vec{x} = \sum_{j=1}^{p} t_j \vec{x}^j$ и $\vec{y} = \sum_{j=1}^{p} s_j \vec{x}^j$, то

$$t\vec{x} + (1-t)\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} u_j \vec{x}^j,$$

где $u_j = tt_j + (1-t)s_j$.

Любое выпуклое множество $D$, содержащее $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^p$, содержит также и все точки (16:2:d). Докажем это индукцией по $p$.

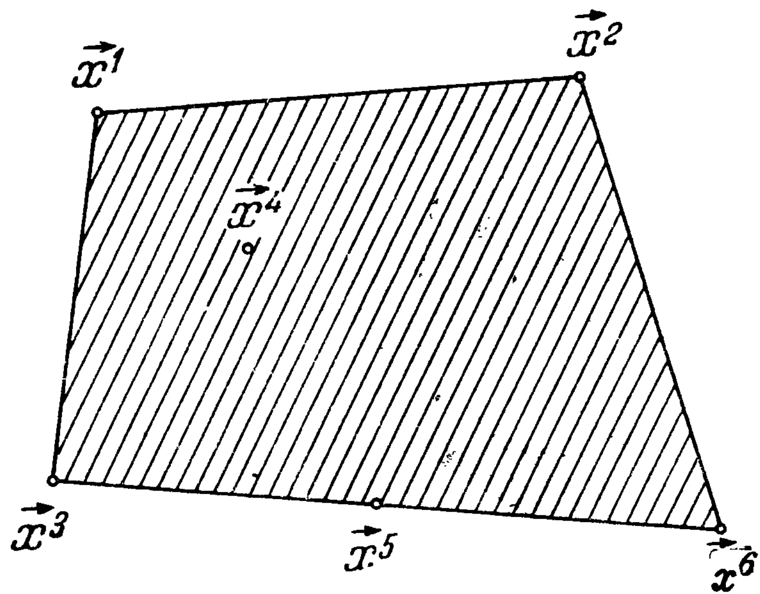



Рис. 12.

Доказательство. Для $p = 1$ это очевидно, поскольку тогда $t_1 = 1$, и $\vec{x}^1$ будет единственной точкой, принадлежащей множеству (16:2:d).

Предположим, что утверждение верно для $p-1$. Докажем, что оно верно и для $p$. Если $\sum_{j=1}^{p-1} t_p = 0$, то $t_1 = \ldots = t_{p-1} = 0$ и точка из (16:2:d) совпадает с $\vec{x}^p$ и, следовательно, принадлежит $D$. Если $\sum_{j=1}^{p-1} t_j > 0$, то полагаем $t = \sum_{j=1}^{p-1} t_j$, так что $1 - t = \sum_{j=1}^{p} t_j - \sum_{j=1}^{p-1} t_j = t_p$. Следовательно, $0 < t \leqq 1$. Положим $s_j = t_j/t$ для $j = 1, \ldots, p-1$, $\sum_{j=1}^{p-1} s_j = 1$. Тогда из нашего предположения для $p-1$ имеем, что $\sum_{j=1}^{p-1} s_j \vec{x}^j$ принадлежит $D$. Множество $D$ выпукло, поэтому

$$t \sum_{j=1}^{p-1} s_j \vec{x}^j + (1-t)\vec{x}^p$$

также принадлежит $D$. Однако этот вектор равен

$$\sum_{j=1}^{p-1} t_j \vec{x}^j + t_p \vec{x}^p = \sum_{j=1}^{p} t_j \vec{x}^j,$$

который, таким образом, также принадлежит $D$.

Доказательство завершено. ∎

Сами числа $t_1, \ldots, t_p$ из (16:2:d) можно рассматривать и как компоненты вектора $\vec{t} = \{t_1, \ldots, t_p\}$ в $L_p$. Поэтому множество возможных значений вектора, которое определяется условиями

$$t_1 \geqq 0, \ldots, t_p \geqq 0$$

и

$$\sum_{j=1}^{p} t_j = 1,$$

удобно как-то именовать. Мы будем обозначать его через $S_p$. Обозначим, далее, множество векторов $\vec{t}$, удовлетворяющих только первой группе

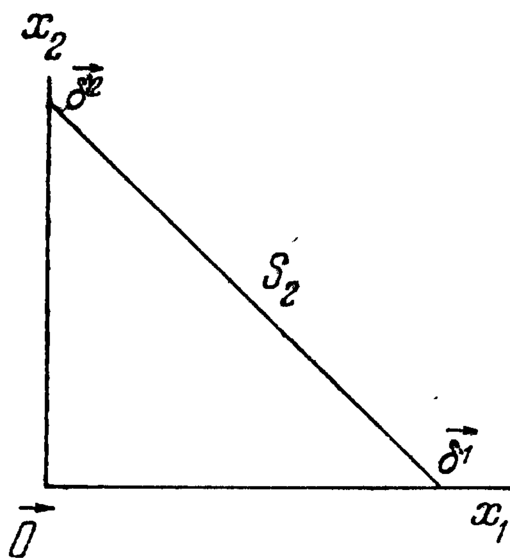



Рис. 13.

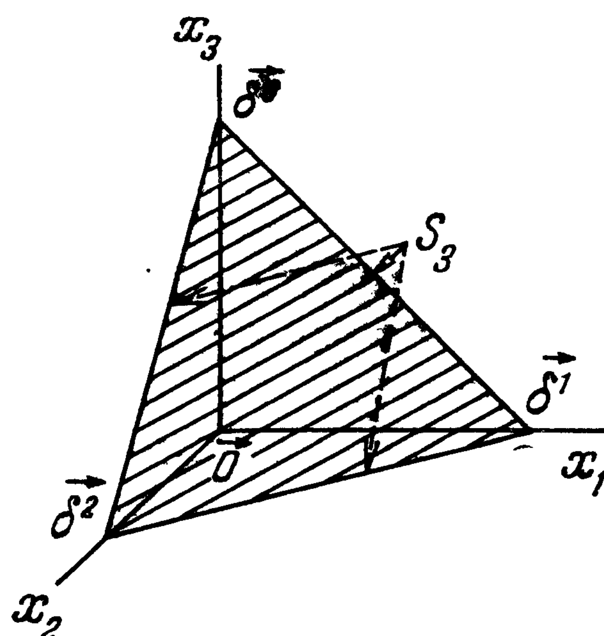



Рис. 14.

предыдущих условий, т. е. $t_1 \geqq 0, \ldots, t_p \geqq 0$, через $P_p$. Оба множества $S_p$ и $P_p$ являются выпуклыми.

Изобразим графически случаи $p = 2$ (плоскость) и $p = 3$ (пространство). $P_2$ есть *положительный квадрант* — множество точек между положительными полуосями $x_1$ и $x_2$ (рис. 13). $P_3$ есть *положительный октант* — пространство, заключенное между положительными полуосями $x_1$, $x_2$ и $x_3$, т. е. между плоскими квадрантами, ограниченными парами $x_1, x_2$; $x_1, x_3$; $x_2, x_3$ (рис. 14). $S_2$ есть прямолинейный отрезок, пересекающий $P_2$ (рис. 13). $S_3$ — плоский треугольник, аналогичным образом пересекающий $P_3$ (рис. 14). Полезно изобразить отдельно множества $S_2$, $S_3$ без $P_2$, $P_3$ (и тем более без $L_2$, $L_3$), в которые они естественно погружаются (рис. 15 и 16). На рисунках отмечены расстояния, пропорциональные $x_1$, $x_2$ и соответственно $x_1$, $x_2$, $x_3$.

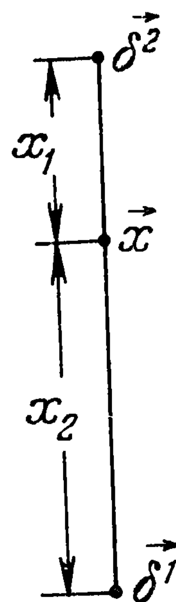



Рис. 15.

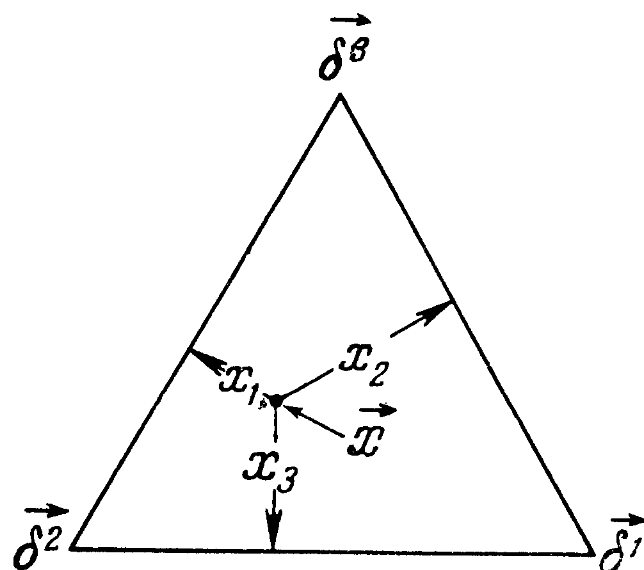



Рис. 16.

(Подчеркнем еще раз: расстояния, отмеченные на рис. 15 и 16 как $x_1$, $x_2$, $x_3$, не являются самими координатами $x_1$, $x_2$, $x_3$. Последние лежат в $L_2$ или в $L_3$ вне $S_2$ или $S_3$ и поэтому не могут быть изображены на $S_2$ или на $S_3$. Однако, как можно легко показать, они пропорциональны этим координатам.)

16.2.3. Другим важным понятием является понятие *длины* вектора. Длиной вектора $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ называется

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Расстоянием между двумя точками (векторами) называется длина вектора разности

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Таким образом, длина вектора $\vec{x}$ есть его расстояние от начала координат $\vec{0}$ [1]).

## 16.3. Теорема об опорной гиперплоскости

16.3. Установим теперь одно важное общее свойство выпуклых множеств.

(16:B) Пусть дано $p$ векторов $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^p$. Тогда вектор $\vec{y}$ либо принадлежит выпуклому множеству $C$, натянутому на векторы $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^p$ (см. (16:A:c) в п. 16.2.1), либо существует такая, содержащая $\vec{y}$, гиперплоскость (см. (16:2:a) в п. 16.2.1), что множество $C$ содержится в одном из полупространств, порождаемых этой гиперплоскостью (скажем, (16:2:b) в п. 16.2.1; см. (16:A:b) там же).

Это утверждение справедливо и в том случае, когда выпуклое множество, натянутое на $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^p$, заменено любым выпуклым множеством.

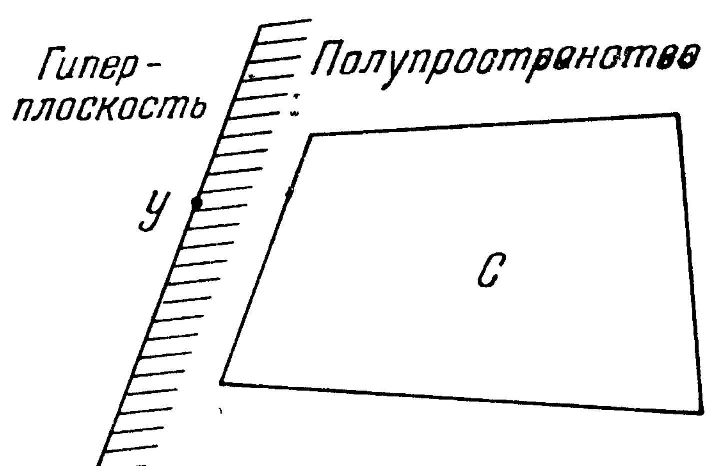


Рис. 17.

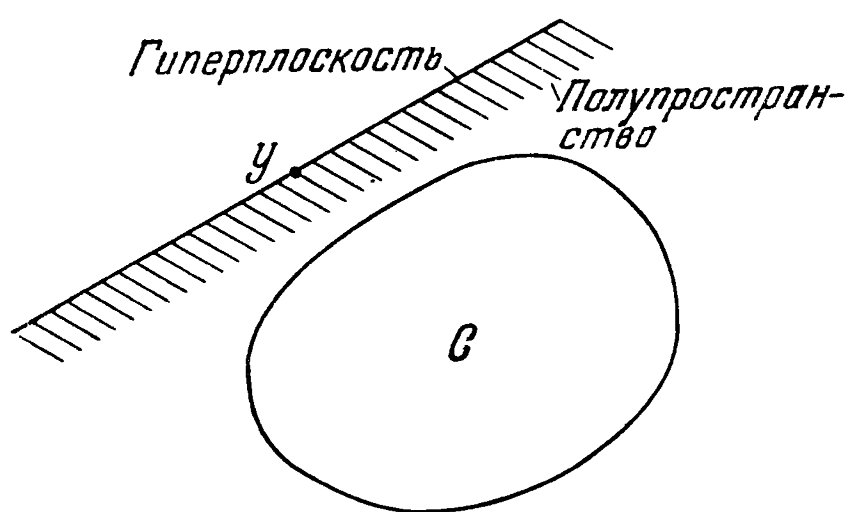


Рис. 18.

В такой форме это утверждение является основным рабочим аппаратом современной теории выпуклых множеств.

Картина в случае $n = 2$ (т. е. для плоскости) оказывается следующей. На рис. 17 изображено выпуклое множество $C$ с рис. 12 (которое натянуто на конечное число точек), тогда как на рис. 18 изображено выпуклое множество $C$ общего вида [2]).

---

[1]) Евклидов и пифагоров смысл этих понятий очевиден.

[2]) Для читателя, знакомого с топологией, мы добавим следующее. Для того чтобы оставаться строгим, это предложение должно быть уточнено — утверждение верно для замкнутых выпуклых множеств. Это гарантирует существование минимума, которым мы пользуемся при доказательстве. Об этом см. также замечание на страницах 397, 398.

Прежде чем доказывать (16:B), заметим, что вторая альтернатива явным образом исключает первую, поскольку $\vec{y}$ принадлежит гиперплоскости, а не полупространству (т. е. выполняется (16:2:a), а не (16:2:b) из (16:A:b)).

Перейдем теперь к доказательству.

Доказательство. Предположим, что $\vec{y}$ не принадлежит $C$. Возьмем тогда точку из $\vec{C}$, которая лежит ближе всего к $\vec{y}$, т. е. для которой величина

$$|\vec{z}-\vec{y}|=\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

достигает своего минимального значения.

Рассмотрим любую другую точку $\vec{u}$ из $C$. Тогда при любом $t$, для которого $0 \leqq t \leqq 1$, $t\vec{u}+(1-t)\vec{z}$ также принадлежит $C$. Из свойства минимальности точки $\vec{z}$ (см. выше) мы имеем

$$|t\vec{u}+(1-t)\vec{z}-\vec{y}|^2 \geqq |\vec{z}-\vec{y}|^2,$$

т. е.

$$|(\vec{z}-\vec{y})+t(\vec{u}-\vec{z})|^2 \geqq |\vec{z}-\vec{y}|^2,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\{(z_i-y_i)+t(u_i-z_i)\}^2 \geqq \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2.$$

Выполняя элементарные алгебраические преобразования, мы получаем

$$2\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i)t+\sum_{i=1}^{n}(u_i-z_i)^2t^2 \geqq 0.$$

Для $t>0$ (причем, конечно, $t \leqq 1$) имеем, следовательно,

$$2\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i)+\sum_{i=1}^{n}(u_i-z_i)^2t \geqq 0.$$

Если $t \to 0$, то левая сторона неравенства стремится к

$$2\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i).$$

Таким образом,

(16:3) $$\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i) \geqq 0.$$

Так как $u_i-y_i=(u_i-z_i)+(z_i-y_i)$, это означает следующее:

$$\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-y_i) \geqq \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2=|\vec{z}-\vec{y}|^2.$$

Далее, $\vec{z} \neq \vec{y}$ ($\vec{z}$ принадлежит $C$, а $\vec{y}$ — нет); следовательно, $|\vec{z}-\vec{y}|^2>0$. Значит, и левая сторона неравенства $>0$. Мы получаем

(16:4) $$\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)u_i>\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)y_i.$$

Положим $a_i = z_i - y_i$; тогда случай $a_1 = \ldots = a_n = 0$ исключается, так как $\vec{z} \neq \vec{y}$ (см. предыдущие рассуждения). Положим также $b = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$. Таким образом, равенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \qquad \text{(16:2:a*)}$$

определяет гиперплоскость, которой точка $\vec{y}$, очевидно, принадлежит. Далее, пусть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i > b \qquad \text{(16:2:b*)}$$

— полупространство, порожденное этой гиперплоскостью; тогда (16:4) утверждает, что $\vec{u}$ принадлежит этому пролупространству.

Поскольку $\vec{u}$ — произвольный элемент из $C$, доказательство завершено.

Это алгебраическое доказательство можно провести также на геометрическом языке.

Сделаем это сначала для случая $n = 2$ (т. е. для плоскости). Ситуация изображена на рис. 19: $\vec{z}$ — точка из $C$, ближайшая к данной точке $\vec{y}$;

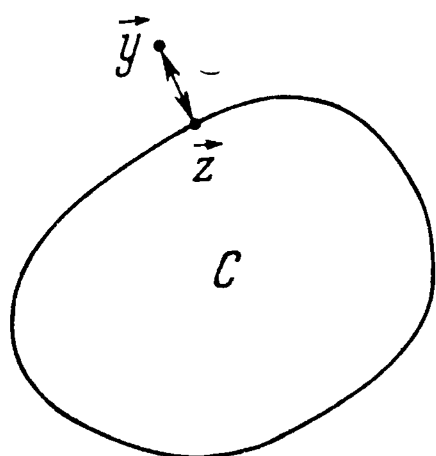



Рис. 19.

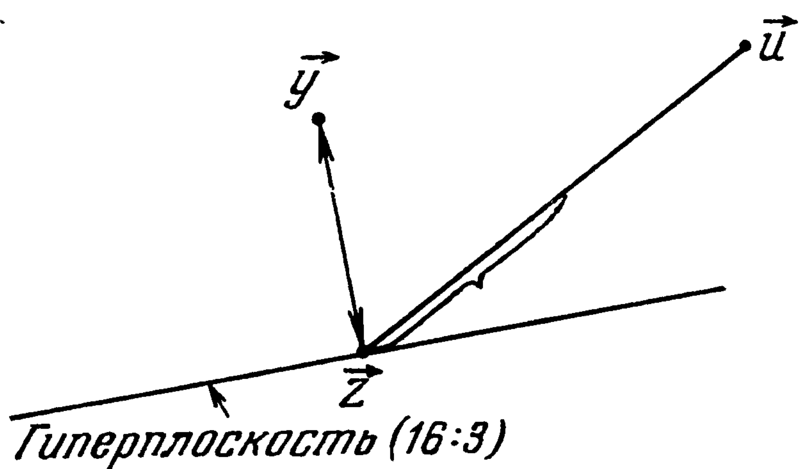



Рис. 20.

это значит, что расстояние $|\vec{z} - \vec{y}|$ принимает на $\vec{z}$ свое минимальное значение. Поскольку $\vec{y}$ и $\vec{z}$ фиксированы, а $\vec{u}$—переменная точка (принадлежащая $C$), неравенство (16:3) определяет гиперплоскость и одно из полупространств, порожденных ею. Легко проверить, что $\vec{z}$ принадлежит этой гиперплоскости и сама гиперплоскость состоит из точек $\vec{u}$, для которых эти три точки образуют прямой угол (т. е. для которых векторы $\vec{z} - \vec{y}$ и $\vec{u} - \vec{z}$ ортогональны). Фактически это означает, что $\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)(u_i - z_i) = 0$. Очевидно, что все множество $C$ должно лежать на этой гиперплоскости или по ту сторону от нее, которая не содержит $\vec{y}$. Если какая-либо точка $\vec{u}$ из $C$ лежала бы на $\vec{y}$-стороне, то нашлись бы точки из сегмента $[\vec{z}, \vec{u}]$, лежащие ближе к $\vec{y}$, чем $\vec{z}$. (См. рис. 20. Вычисления на страницах 161—162, в надлежащей интерпретации, именно это и показывают.) Поскольку $C$ содержит $\vec{z}$ и $\vec{u}$ а, следовательно, и весь сегмент $[\vec{z}, \vec{u}]$, это противоречит утверждению о том, что точка $\vec{z}$ является ближайшей точкой к $\vec{y}$ из точек множества $C$.

Переход от (16:3) к (16:4) соответствует параллельному переносу гиперплоскости I в положение II (параллельному, ибо коэффициенты $a_i = z_i - y_i$ при $u_i$, $i = 1, \ldots, n$, не изменяются.) Теперь $\vec{y}$ принадлежит гиперплоскости, а $C$ — порожденному ею полупространству (рис. 21).

Случай $n = 3$ можно наглядно представить себе сходным образом.

Такой геометрический способ рассуждений можно распространить и на произвольное $n$. Если читатель сможет убедить себя в том, что он обладает $n$-мерной «геометрической интуицией», то предыдущие рассуждения могут быть восприняты как доказательство, верное в пространстве $n$ измерений. Можно даже избежать и этого, рассуждая следующим способом. Каково бы ни было $n$, доказательство имеет дело одновременно только с тремя точками, а именно с точками $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{u}$. Через три точки всегда можно провести плоскость (двумерную). Если мы будем рассматривать только эту плоскость, то рис. 19—21 и связанные с ними рассуждения могут быть использованы без дополнительной интерпретации.

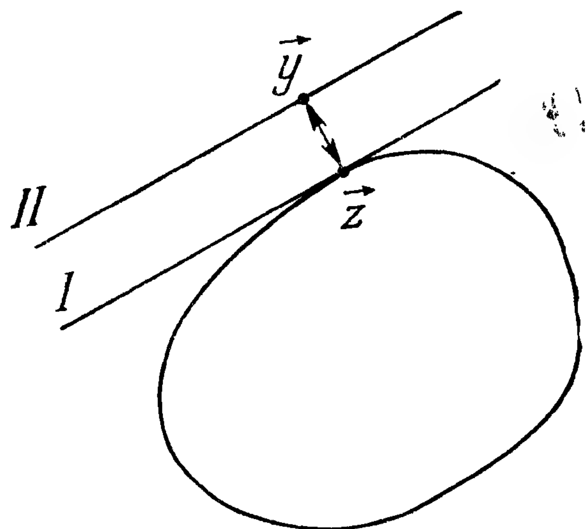


Рис. 21.

Как бы то ни было, приведенное выше чисто алгебраическое доказательство является абсолютно строгим. Мы привели геометрические аналогии главным образом в надежде, что это облегчит понимание алгебраических выкладок, выполненных в ходе доказательства.

### 16.4. Теорема об альтернативах для матриц

**16.4.1.** Теорема (16:B) позволяет сделать очень важный для нашей дальнейшей работы вывод.

Мы начнем с рассмотрения прямоугольной матрицы в смысле п. 13.3.3 с $n$ строками и $m$ столбцами и элементами $a(i, j)$. (См. рис. 11 в п. 13.3.3, где $\varphi$; $x$, $y$, $t$, $s$ соответствуют нашим $a$, $i$, $j$, $n$, $m$.) Иными словами, $a(i, j)$ является совершенно произвольной функцией двух переменных $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, m$. Построим некоторые векторы из $L_n$. Для каждого $j = 1, \ldots, m$ возьмем вектор $\vec{x}^j = \{x_1^j, \ldots, x_n^j\}$ с $x_i^j = a(i, j)$, а для каждого $l = 1, \ldots, n$ — координатный вектор $\vec{\delta}^l = \{\delta_{il}\}$ (см. конец п. 16.1.3; мы здесь заменили $j$ на $l$). Применим теперь теорему (16:B) из п. 16.3 в случае $p = n + m$ к $n + m$ векторам $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m, \vec{\delta}^1, \ldots, \vec{\delta}^n$ (которые выступают в роли $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^p$). Положим $\vec{y} = \vec{0}$.

Выпуклое множество $C$, натянутое на $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m, \vec{\delta}^1, \ldots, \vec{\delta}^n$, может содержать $\vec{0}$. Если это имеет место, то из (16:2:d) в п. 16.2.2 следует, что

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \vec{x}_j^j + \sum_{l=1}^{n} s_l \vec{\delta}^l = \vec{0},$$

где

(16:5) $$t_1 \geqq 0, \ldots, t_m \geqq 0, \quad s_1 \geqq 0, \ldots, s_n \geqq 0,$$

(16:6) $$\sum_{j=1}^{m} t_j + \sum_{l=1}^{n} s_l = 1$$

(мы заменили $t_1, \ldots, t_p$ на $t_1, \ldots, t_m, s_1, \ldots, s_n$). В покомпонентной записи это равносильно

$$\sum_{j=1}^{m} t_j a(i, j) + \sum_{l=1}^{n} s_l \delta_{il} = 0.$$

Второе слагаемое слева равно $s_i$, так что можно написать

$$\sum_{j=1}^{m} a(i, j)\, t_j = -s_i. \tag{16:7}$$

Если бы имело место $\sum_{j=1}^{m} t_j = 0$, то были бы справедливы равенства $t_1 = \ldots = t_m = 0$ и, следовательно, из (16:7) вытекало бы, что $s_1 = \ldots = s_n = 0$. Это, однако, противоречит (16:6). Следовательно, $\sum_{j=1}^{m} t_j > 0$. Заменим равенство (16:7) его следствием

$$\sum_{j=1}^{m} a(i, j)\, t_j \leqq 0. \tag{16:8}$$

Положим теперь $x_j = t_j / \sum_{j=1}^{m} t_j$ для $j = 1, \ldots, m$. Тогда мы получим $\sum_{j=1}^{m} x_j = 1$, и (16:5) дает нам $x_1 \geqq 0, \ldots, x_m \geqq 0$. Следовательно,

$$\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_m\} \in S_m, \tag{16:9}$$

и (16:8) приводит к условию

$$\sum_{j=1}^{m} a(i, j)\, x_j \leqq 0 \quad \text{для } j = 1, \ldots, n. \tag{16:10}$$

Рассмотрим, с другой стороны, случай, когда $C$ не содержит $\vec{0}$.

Теорема (16:B) из п. 16.3 позволяет нам сделать вывод о существовании такой содержащей $\vec{y}$ гиперплоскости (см. (16:2:a) из п. 16.2.1), что множество $C$ содержится в полупространстве, порожденном этой гиперплоскостью (см. (16:2:b) из п. 16.2.1). Обозначим эту гиперплоскость через

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b.$$

Поскольку $\vec{0}$ принадлежит ей, то $b = 0$. Таким образом, рассматриваемое полупространство имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i > 0. \tag{16:11}$$

Векторы $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m, \vec{\delta}^1, \ldots, \vec{\delta}^n$ принадлежит этому полупространству. При записи этого факта для $\vec{\delta}^l$ неравенство (16:11) принимает вид $\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{il} > 0$, т. е. $a_l > 0$. Таким образом, мы получаем

$$a_1 > 0, \ldots, a_n > 0. \tag{16:12}$$

При аналогичной записи для $\vec{x}^j$ мы получаем

(16:13) $$\sum_{i=1}^{n} a(i, j) a_i > 0.$$

Положим теперь $w_i = a_i / \sum_{i=1}^{n} a_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Тогда мы получаем $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, и (16:12) дает нам $w_1 > 0, \ldots, w_n > 0$.

Следовательно,

(16:14) $$\vec{w} = \{w_1, \ldots, w_n\} \in S_n.$$

Неравенство (16:13) дает нам

(16:15) $$\sum_{i=1}^{n} a(i, j) w_i > 0 \quad \text{для } j = 1, \ldots, m.$$

Объединяя соотношения (16:9), (16:10), (16:14), (16:15), мы можем утверждать следующее:

(16:C) Пусть задана прямоугольная матрица с $m$ столбцами и $n$ строками. Обозначим элементы этой матрицы через $a(i, j)$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. Тогда либо существует такой вектор $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_m\} \in S_m$, что

(16:16:a) $$\sum_{j=1}^{m} a(i, j) x_j \leqq 0 \quad \text{для } i = 1, \ldots, n,$$

либо такой вектор $w = \{w_1, \ldots, w_n\} \in S_n$, что

(16:16:b) $$\sum_{i=1}^{n} a(i, j) w_i > 0 \quad \text{для } j = 1, \ldots, m.$$

Заметим, далее, следующее:

Альтернативы (16:16:a) и (16:6:b) исключают друг друга.

Доказательство. Предположим, что (16:6:a) и (16:16:b) имеют место одновременно. Умножим каждое из неравенств (16:6:a) на $w_i$ и просуммируем по всем $i = 1, \ldots, n$; это дает нам

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a(i, j) w_i x_j \leqq 0.$$

Умножим, далее, каждое из неравенств (16:16:b) на $x_i$ и просуммируем по $j = 1, \ldots, m$; это дает нам

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a(i, j) w_i x_j > 0$$ [1]).

Таким образом, мы получаем противоречие.

**16.4.2.** Заменим матрицу $a(i, j)$ *отрицательно транспонированной* к ней матрицей; это значит, что мы обозначим столбцы (а не строки,

[1]) Здесь $>0$, а не просто $\geqq 0$. Действительно, из $=0$ мы получили бы $x_1 = \ldots = x_m = 0$, что невозможно, так как $\sum_{j=1}^{m} x_j = 1$.

как раньше) через $i = 1, \ldots, n$ и строки (а не столбцы, как раньше) через $j = 1, \ldots, m$. Пусть, далее, элементами матрицы будут $-a(i, j)$ (а не $a(i, j)$, как раньше). (Таким образом, числа $n$ и $m$ также поменялись ролями.)

Сформулируем окончательный результат п. 16.4.1 для новой матрицы в терминах первоначальной матрицы. Пусть при этом $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ играет роль $\vec{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$, а $\vec{w}' = \{w'_1, \ldots, w'_n\}$ играет роль $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_m\}$.

Мы получим следующее:

(16:D) Пусть прямоугольная матрица с $n$ строками и $m$ столбцами задана. Обозначим элементы этой матрицы через $a(i, j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда либо существует вектор $\vec{x}' = \{x'_1, \ldots, x'_m\} \in S_m$, для которого выполняется

(16:17:a) $$\sum_{j=1}^{m} a(i, j)\, x'_j < 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

либо существует вектор $\vec{w}' = \{w'_1, \ldots, w'_n\} \in S_n$, для которого выполняется

(16:17:b) $$\sum_{i=1}^{n} a(i, j)\, w'_i \geqq 0.$$

Эти две альтернативы исключают одна другую.

**16.4.3.** Объединим результаты пп. 16.4.1 и 16.4.2. Из них следует, что выполняются либо (16:17:a), либо (16:16:b), либо, наконец, (16:16:a) и (16:17:b) одновременно; эти три возможности исключают друг друга.

Используя ту же самую матрицу $a(i, j)$ и переобозначая $\vec{x}, \vec{w}, \vec{x}', \vec{w}'$ из пп. 16.4.1, 16.4.2 через $\vec{x}', \vec{w}, \vec{x}, \vec{w}'$, мы получаем следующее:

(16:E) Либо существует вектор $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_m\} \in S_m$, для которого

(16:18:a) $$\sum_{j=1}^{m} a(i, j)\, x_j < 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n,$$

либо вектор $\vec{w} = \{w_1, \ldots, w_n\} \in S_n$, для которого

(16:18:b) $$\sum_{i=1}^{n} a(i, j)\, w_i < 0 \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, m,$$

либо два вектора: $\vec{x}' = \{x'_1, \ldots, x'_m\} \in S_m$ и $\vec{w}' = \{w'_1, \ldots, w'_n\} \in S_n$, для которых

(16:18:c) $$\sum_{j=1}^{m} a(i, j)\, x'_j \leqq 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a(i, j)\, w'_i \geqq 0 \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, m.$$

Три альтернативы (16:18:a), (16:18:b) и (16:18:c) исключают друг друга.

Комбинируя (16:18:a) и (16:18:c), с одной стороны, и (16:18:b) и (16:18:c), с другой, мы получаем более простое, однако более слабое утверждение [1, 2]:

(16:F) Либо существует вектор $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_m\} \in S_m$, для которого

(16:19:a) $$\sum_{j=1}^{m} a(i, j)\, x_j \leqq 0 \text{ для } i = 1, \ldots, n,$$

либо существует вектор $\vec{w} = \{w_1, \ldots, w_n\} \in S_n$, для которого

(16:19:b) $$\sum_{i=1}^{n} a(i, j)\, w_i \geqq 0 \text{ для } j = 1, \ldots, m.$$

**16.4.4.** Рассмотрим теперь *кососимметрическую матрицу* $a(i, j)$, т. е. такую матрицу, которая совпадает со своей отрицательно транспонированной в смысле п. 16.4.2; в этом случае должно быть $n = m$ и

$$a(i, j) = -a(j, i), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Тогда условия (16:19:a) и (16:19:b) из п. 16.4.3 выражают одно и то же. Действительно, (16:19:b) записывается как

$$\sum_{i=1}^{n} a(i, j)\, w_i \geqq 0;$$

это можно переписать как

$$-\sum_{i=1}^{n} a(j, i)\, w_i \geqq 0 \text{ или } \sum_{i=1}^{n} a(i, j)\, w_i \leqq 0.$$

Нам остается взять $j$, $i$ вместо $i$, $j$ [3]), и мы получаем $\sum_{j=1}^{n} a(i, j)\, w_j \leqq 0$, а затем взять $\vec{x}$ вместо $\vec{w}$, и мы получаем $\sum_{j=1}^{n} a(i, j)\, x_j \leqq 0$. Мы установили (16:19:a).

Таким образом, мы можем заменить дизъюнкцию неравенств (16:19:a) и (16:19:b) на одно из них, например на (16:19:b). В результате мы получаем:

(16:G) Если матрица $a(i, j)$ является кососимметрической (поэтому $n = m$), то существует вектор $\vec{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ из $S_n$, для которого

$$\sum_{i=1}^{n} a(i, j)\, w_i \geqq 0 \text{ для } j = 1, \ldots, n.$$

---

[1]) Альтернативы (16:19:a), (16:19:b) не исключают друг друга: их конъюнкция равносильна (16:18:c).

[2]) Этот результат мог бы быть получен непосредственно из окончательного результата п. 16.4.1. Действительно, (16:19:a) равносильно (16:16:a), а (16:19:b) является слабой формой (16:16:b). Мы привели более подробный вывод, так как он проясняет общее положение дел.

[3]) Заметим, что теперь при $n = m$ это просто изменение обозначений!

## § 17. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ. РЕШЕНИЕ ВСЕХ ИГР

### 17.1. Два элементарных примера

**17.1.1.** Для того чтобы преодолеть трудности в случае неполной определенности, который мы рассматриваем, в частности, в п. 14.7, лучше всего возвратиться к простейшим примерам. Это игра в «орлянку», а также игра «камень, мешок и ножницы» (см. пп. 14.7.2 и 14.7.3). Поскольку существует основанное на здравом смысле отношение к «проблемам», возникающим в этих играх, мы надеемся получить ключ к нахождению решения в случае неполной определенности игры двух лиц с нулевой суммой, рассматривая и анализируя это отношение.

Уже было замечено, что при игре в «орлянку» ни один из способов игры (ни выбор «герба», ни выбор «решетки является лучшим»), не и единственное, что имеет смысл,— это раскрыть намерения противника. Это, на первый взгляд, преграждает путь к решению, так как правила игры запрещают игрокам получать информацию о выборах противника в момент совершения хода. Однако это обстоятельство не соответствует реальному положению дел: в игре в «орлянку» против мало-мальски разумного противника игрок не будет стремиться обнаружить намерения противника, а постарается скрыть свои собственные намерения, выбирая в последовательных партиях «герб» и «решетку» без какой-либо закономерности. Таким образом, если мы попытаемся описать стратегию в одной партии — так как в действительности нам приходится рассматривать одну партию, а не целую их последовательность,— то предпочтительнее всего выразить это следующим образом. Стратегия игрока состоит не в выборе «герба» и не в выборе «решетки», а в выборе «герба» с вероятностью 1/2 и «решетки» с вероятностью 1/2.

**17.1.2.** Можно представить себе, что рациональный способ игры в «орлянку» состоит в том, чтобы перед совершением выбора в партии выбрать решение играть «герб» или «решетку» [1]) с помощью некоторого случайного устройства 50:50. Дело в том, что такая процедура предохраняет игрока от потерь. Действительно, что бы ни делал противник, ожидаемый выигрыш игрока равен нулю [2]). Это верно, в частности, и тогда, когда противник играет «герб», и тогда, когда он играет «решетку», и тогда, когда он играет «герб» и «решетку» с некоторыми вероятностями [3]).

Следовательно, если мы разрешим игроку в игре в «орлянку» использовать «статистическую» стратегию, т. е. «смешивать» возможные способы игры с некоторыми вероятностями (выбираемыми им самим), то он сможет избежать потерь. Действительно, выше мы определили статистическую стратегию, применяя которую игрок не может проиграть независимо от того, что бы ни делал его противник. То же самое верно и для противника, т. е. он может применять статистическую стратегию, которая не даст игроку выиграть независимо от его действий [4]).

---

[1]) Например, игрок может бросить игральную кость так, чтобы противник не видел результата бросания, и выбирать «герб», если получившееся в результате бросания число четное, и «решетку» в противном случае.

[2]) Именно вероятность его выигрыша равна вероятности проигрыша, потому что в указанных условиях вероятность угадать, равно как и вероятность не угадать, равна 1/2, что бы противник ни предпринял.

[3]) Скажем $p$, $1-p$. Для самого игрока мы приняли вероятности 1/2, 1/2.

[4]) Все это, конечно, следует понимать в статистическом смысле: то, что игрок не может проиграть, означает, что вероятность проигрыша $\leqq$ вероятности выигрыша. То, что он не может выиграть, означает, что первая вероятность не меньше второй. В действительности каждая партия будет заканчиваться выигрышем или проигрышем, поскольку «орлянка» не знает ничьих.

Читатель может заметить большое сходство этих рассуждений с рассуждениями из п. 14.5 [1]). С этой точки зрения является вполне законным рассматривать нуль как значение партии для игры в «орлянку», а статистическую смесь «герба» и «решетки» в пропорции 50:50 — как оптимальную стратегию.

Ситуация в игре «камень, мешок и ножницы» вполне аналогична. Здравый смысл подсказывает, что оптимальный способ игры заключается в выборе каждой из трех альтернатив с вероятностями 1/3 [2]). Значение партии, как и обоснование качества такой стратегии, может быть мотивировано так же, как и в предыдущем случае [3]).

## 17.2. Обобщение изложенной точки зрения

**17.2.1.** Представляются правдоподобными попытки распространить результаты, полученные для игр в «орлянку» и в «камень, мешок и ножницы», на все игры двух лиц с нулевой суммой.

Мы будем иметь дело с нормальной формой игры, принимая, как и раньше, $\tau_1 = 1, \ldots, \beta_1$ и $\tau_2 = 1, \ldots, \beta_2$ в качестве возможных выборов игроков и считая выигрыш игрока 1 равным $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$. Мы не делаем здесь предположений о полной определенности игры.

Попытаемся повторить процедуру, оказавшуюся успешной в п. 17.1. Это значит, что мы будем рассматривать игроков, для которых «теория» игры заключается не в выборе определенных стратегий, а в выборе нескольких стратегий с определенными вероятностями [4]). Таким образом, игрок 1 будет выбирать не число $\tau_1 = 1, \ldots, \beta_1$, т. е. не стратегию $\Sigma_1^{\tau_1}$, а $\beta_1$ чисел $\xi_1, \ldots, \xi_{\beta_1}$ — соответственно вероятности стратегий $\Sigma_1^1, \ldots, \Sigma_1^{\beta_1}$. Аналогично игрок 2 будет выбирать не число $\tau_2 = 1, \ldots, \beta_2$, т. е. не стратегию $\Sigma_2^{\tau_2}$, а $\beta_2$ чисел $\eta_1, \ldots, \eta_{\beta_2}$, которые являются вероятностями стратегий $\Sigma_2^1, \ldots, \Sigma_2^{\beta_2}$. Поскольку эти вероятности относятся к попарно несовместимым и единственно возможным альтернативам, числа $\xi_{\tau_1}$ и $\eta_{\tau_2}$ подчиняются условиям

$$\text{(17:1:a)} \qquad \xi_{\tau_1} \geqq 0, \quad \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \xi_{\tau_1} = 1,$$

$$\text{(17:1:b)} \qquad \eta_{\tau_2} \geqq 0, \quad \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \eta_{\tau_2} = 1$$

и никаким другим.

Образуем векторы $\vec{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_{\beta_1}\}$ и $\vec{\eta} = \{\eta_1, \ldots, \eta_{\beta_2}\}$. Только что выписанные условия означают, что $\vec{\xi} \in S_{\beta_1}$, а $\vec{\eta} \in S_{\beta_2}$ (см. п. 16.2.2).

При таком положении дел игрок выбирает не стратегии, как раньше, а только вероятности, с которыми он использует их в партии. Это

---

[1]) Имеются в виду утверждения (14:C:d) и (14:C:e) из п. 14.5.1.

[2]) Как и ранее, здесь можно использовать случайное устройство. Одним из возможных является прием, упомянутый в сноске 1 на стр. 168. Например, игрок может выбрать «камень», если на кости выпадают 1 или 2, «мешок», если выпадают 3 и 4, и «ножницы», если выпадают 5 или 6.

[3]) В игре «камень, мешок и ножницы» ничья существует, однако проигрыш не означает, что вероятность проигрыша ≦ вероятности выигрыша, и выигрыш не означает обратного. См. сноску 4 на стр. 168.

[4]) То, что эти вероятности одни и те же для всех стратегий (в примерах предыдущего пункта 1/2, 1/2 или 1/3, 1/3, 1/3), является, конечно, случайностью. Можно ожидать, что это равенство появилось ввиду симметричности появления в этих играх различных альтернатив. Теперь мы переходим к допущению, что существенным в формировании стратегии было появление самих вероятностей, тогда как их конкретные значения носят второстепенный характер.

обобщение встречается со значительными трудностями в случае не полной определенности. Мы видели, что характеристической чертой этого случая являются потери[1]) игрока, если его намерения становятся известными противнику. Поэтому в такой игре для игрока является очень важным скрыть от противника свои намерения[2]). Случайный выбор нескольких различных стратегий, для которых определенными являются только их вероятности, представляется весьма эффективным для этого путем. При такой игре противник не может узнать, какую стратегию выберет игрок, поскольку последний сам этого не знает[3]). Незнание является, конечно, самой лучшей гарантией против прямого или косвенного раскрытия информации.

**17.2.2.** Может показаться, что в данном случае мы несколько ограничили свободу действий игрока. Может случиться, что он захочет играть одну определенную стратегию, исключив все остальные, или, желая выбирать некоторые стратегии с определенными вероятностями, захочет полностью исключить возможность выбора остальных[4]). Мы подчеркиваем, что такие возможности находятся целиком в рамках нашей схемы. Игрок, не желающий играть те или иные стратегии, просто будет выбирать каждую из них с вероятностью нуль. Игрок, желающий играть одну определенную стратегию, исключив все остальные, выберет ее с вероятностью единица, а все остальные — с вероятностью нуль.

Таким образом, если игрок 1 захочет играть $\Sigma_1^{\tau_1}$, то он в качестве вектора $\vec{\xi}$ выберет координатный вектор $\vec{\delta}^{\tau_1}$ (см. п. 16.1.3). Аналогично, если игрок 2 захочет выбрать стратегию $\Sigma_2^{\tau_2}$, то он выберет в качестве $\vec{\eta}$ вектор $\vec{\delta}^{\tau_2}$. В свете предыдущих рассмотрений мы будем называть вектор $\vec{\xi} \in S_{\beta_1}$ или вектор $\vec{\eta} \in S_{\beta_2}$ *статистической* или *смешанной стратегией* соответственно игроков 1 или 2. Координатные векторы $\vec{\delta}^{\tau_1}$ или $\vec{\delta}^{\tau_2}$ отвечают, как мы уже видели, первоначальным стратегиям $\tau_1$ или $\tau_2$, т. е. $\Sigma_1^{\tau_1}$ или $\Sigma_2^{\tau_2}$ игроков 1 или 2. Мы будем называть их *точными* или *чистыми стратегиями*.

### 17.3. Оправдание процедуры применительно к отдельной партии

**17.3.1.** На данном этапе читатель может почувствовать неудобство и усмотреть противоречие между двумя точками зрения, которые мы в наших рассуждениях считали одинаково реалистичными. С одной стороны, мы всегда настаивали на том, что наша теория является статической (см. п. 4.8.2) и что мы исследуем течение одной партии, а не последо-

---

[1]) $\Delta > 0$ из п. 14.7.1.

[2]) Но это не обязательно единственная цель.

[3]) Если противник имеет достаточную статистическую информацию о «стиле» игрока или если он обладает достаточным здравым смыслом в рационализации своего поведения, то он сумеет обнаружить вероятности (точнее говоря, частоты) различных стратегий. (Мы не вдаемся сейчас в обсуждение того, как и каким образом это может произойти. См. п. 17.3.1.) Однако сущностью понятий вероятности и случайности является то, что никто ни при каких условиях не может предсказать, что фактически произойдет в каждом отдельном случае. (Исключение составляют вырожденные вероятности, по поводу которых см. дальше.)

[4]) В этом случае он, очевидно, увеличивает опасность обнаружения своей стратегии противником. Однако может оказаться, что эта стратегия или стратегии имеют сами по себе такие преимущества перед остальными стратегиями, что сведут на нет эту неприятность. Это происходит, например, при использовании «оптимальных» стратегий в случае полной определенности (см. п. 14.5, в частности утверждения (14:C:a), (14:C:b), (14:C:c) из п. 14.5.2).

вательности партий (см. п. 17.1). Однако, с другой стороны, мы поставили в центр внимания рассуждения, касающиеся опасности угадывания стратегии игрока его противником (см. пп. 14.4, 14.7.1, и, наконец, последнюю часть п. 17.2). Как же можно иначе обнаружить стратегию игрока, в особенности если он осуществляет случайную смесь различных стратегий, как не путем продолжительного наблюдения! Мы вывели, что эти наблюдения должны распространяться на несколько партий. Для этого необходимо провести их в каждой отдельной партии. Если правила игры таковы, что допускают подобные наблюдения, т. е. если они ведут к повторяющимся партиям, то наблюдения могут дать эффект только постепенно и последовательно в ходе партий. Они не будут доступными в начале. Все будет связано с различными динамическими рассмотрениями, в то время как мы настаиваем на статичности теории! Кроме того, правила игры могут вообще исключать возможность наблюдений [1]), как это имеет место в «орлянке» или в игре «камень, мешок и ножницы». Эти конфликты и противоречия возникают как в рассуждениях в § 14, где мы не использовали понятия вероятности в связи с выбором стратегий, так и в рассуждениях § 17, где вероятности используются.

Как следует их разрешить?

**17.3.2.** Наш ответ будет таким.

Начнем с того, что доказательства последних результатов в §§ 14 и 17, т. е. рассуждения из пп.14.5 и 17.2, не содержат этих элементов противоречия. Таким образом, мы можем утверждать, что наши окончательные результаты справедливы, хотя эвристические процедуры, ведущие к ним, можно оспаривать.

Но даже эти процедуры можно обосновать. Мы не идем здесь на уступки. Наша точка зрения статическая, и мы анализируем одну-единственную партию. Мы пытаемся создать удовлетворительную теорию — на данном этапе — для игры двух лиц с нулевой суммой. Следовательно, мы занимаемся не дедуктивной аргументацией на прочной основе какой-либо существующей теории, которая уже выдержала все разумные испытания, а занимаемся поисками такой теории [2]). В этих целях вполне законным для нас является использование аппарата обычной логики и, в частности, *косвенного доказательства*. Такой аппарат состоит из предположения о наличии некоторой удовлетворительной теории некоторого нужного типа [3]) и попыток обрисовать следствия из воображаемой логической ситуации и затем из заключений о том, какой же должна быть наша гипотетическая теория. Если применение этого процесса окажется успешным, то он может настолько сузить возможности для такой гипотетической теории, что останется только одна возможность; это и означает, что теория определена и открыта именно этим способом [4]). Конечно,

---

[1]) То есть «постепенных» и «последовательных» наблюдений за поведением противника в течение одной партии.

[2]) Мы пользуемся, конечно, эмпирическим методом: мы пытаемся понять, формализовать и обобщить те черты простейших игр, которые нам представляются типичными. Это — стандартный метод любой науки, опирающейся на опыт.

[3]) Это полное представление о том факте, что мы (пока) не обладаем такой теорией и что мы не можем представить себе (пока), какой бы она была, если бы мы ее имели.

Все это не хуже, чем любое другое косвенное доказательство в любой области науки (в качестве примера можно указать на доказательства от противного в математике и в физике).

[4]) Имеется несколько важных примеров таких построений в физике. Последовательные приближения к специальной и общей теории относительности или к волновой механике могут рассматриваться как таковые. См. A. D'Abro, The Deciline of Mechanism in Modern Physics, New York, 1939.

может быть и так, что приложение этого метода оказывается более, чем «успешным» и сужает число возможностей до нуля; это доказывает, что непротиворечивая теория желаемого вида немыслима [1]).

**17.3.3.** Предположим, что существует теория игр двух лиц с нулевой суммой, которая указывает игроку, как ему действовать, и она является абсолютно убедительной. Если бы игроки знали такую теорию, то каждый из них предположил бы, что его стратегия раскрыта его противником. Противник знает теорию и также то, что для игрока было бы неразумным не следовать ей [2]). Таким образом, предположение о существовании удовлетворительной теории узаконивает наше исследование ситуации, в которой стратегия игрока «раскрывается» его противником. Удовлетворительная теория [3]) может быть построена только в том случае, если удастся гармонизировать две крайности $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, когда «раскрыты» стратегии игрока 1 и когда «раскрыты» стратегии игрока 2.

Для первоначальной трактовки предмета — без использования понятия вероятности (т. е. с одними чистыми стратегиями) — границы, до которых можно распространить теорию, были определены в п. 14.5.

Мы видели, что случай полной определенности является именно тем случаем, при котором на этой основе существует удовлетворительная теория. Постараемся теперь продвинуться дальше, используя вероятности (т. е. смешанные стратегии). Мы снова пустим в ход способ анализа раскрытия стратегии другого игрока, которым мы воспользовались в п. 14.5, когда никаких вероятностей не было.

Окажется, что теперь гипотетическая теория может быть определена полностью и во всех случаях (а не только в случае полной определенности см. пп. 17.5.1 и 17.6).

После того как теория найдена, ее нужно независимо обосновать путем прямой аргументации [4]). Это было сделано в случае полной определенности в п. 14.5, а для нашей общей теории мы сделаем это в п. 17.8.

### 17.4. Минорантная и мажорантная игры (для смешанных стратегий)

**17.4.1.** Воплощение нашей идеи состоит в том, что игрок 1 выбирает произвольный элемент $\vec{\xi} \in S_{\beta_1}$, а игрок 2 выбирает произвольный элемент $\vec{\eta} \in S_{\beta_2}$.

---

[1]) Такое случается также в физике. Анализ «величин, которые не могут наблюдаться одновременно», Н. Бора — Гейзенберга в квантовой механике допускает такую интерпретацию. См. N. Bohr, Atomic and the Description of Nature, Cambridge, 1934 and P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, London, 1931, Chap. 1.

[2]) Почему неразумно не следовать теории — нас в данный момент не касается; мы предположили, что теория абсолютно убедительна.

То, что это не невозможно, будет видно из окончательного результата. Мы построим удовлетворительную теорию несмотря на то, что при ее использовании стратегия игрока оказывается обнаруженной противником. Теория предписывает ему такое поведение, при котором он от этого ничего не теряет. (См. теорему в п. 17.6 и обсуждение полного решения в п. 17.8.)

[3]) То есть теория, использующая только сделанные предположения. Конечно, мы не претендуем на способность делать «абсолютные» утверждения. Если наши настоящие требования окажутся невыполнимыми, то мы будем искать другие основания теории. Фактически мы уже сделали это однажды, при переходе от § 14 (где говорилось о чистых стратегиях) к § 17 (где говорилось о смешанных стратегиях).

[4]) Косвенная аргументация, как было обрисовано выше, дает только необходимые условия. Следовательно, они могут установить противоречивость доказательства приведением к абсурду или же сузить число возможностей до единицы; в последнем случае необходимо еще показать, что оставшаяся возможность удовлетворительна.

Если игрок 1 захочет играть только стратегию $\Sigma_1^{\tau_1}$, то он должен в качестве $\vec{\xi}$ выбрать координатный вектор $\vec{\delta}^{\tau_1}$ (см. п. 16.1.3); аналогично, если игрок 2 захочет играть стратегию $\Sigma_2^{\tau_2}$, то он должен в качестве $\vec{\eta}$ выбрать $\vec{\delta}^{\tau_2}$.

Мы предполагаем, что игрок 1 производит выбор $\vec{\xi}$ независимо от выбора игрока 2, и наоборот.

Смысл этого состоит, конечно, в том, что после того, как выборы сделаны, игрок 1 фактически использует каждую из стратегий $\tau_1 = 1, \ldots, \beta_1$ с вероятностями $\xi_{\tau_1}$, а игрок 2 использует стратегии $\tau_2 = 1, \ldots, \beta_2$ с вероятностями $\eta_{\tau_2}$. Поскольку выборы игроков независимы, математическое ожидание выигрыша равно

$$\text{(17:2)} \qquad \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1} \eta_{\tau_2}.$$

Иными словами, мы заменили первоначальную игру Г некоторой новой игрой, которая имеет, по существу, такую же структуру, но обладает, однако, и некоторыми формальными отличиями. Числа $\tau_1$ и $\tau_2$ (выборы игроков) заменены теперь векторами $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$. Функция $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$ — выигрыш или, точнее, «математическое ожидание» выигрыша в игре — заменена на $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$. Все это указывает на идентичность нашей данной точки зрения на игру Г с той, которая была изложена в п. 14.1.2 (с единственной разницей, заключающейся в замене $\tau_1$, $\tau_2$, $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$ на $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$). Этот изоморфизм указывает нам на возможность приложения тех же самых методов, которыми мы пользовались для исследования первоначальной игры Г, а именно сравнения с мажорантной и минорантной играми $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, как это было описано в пп. 14.2, 14.3.1, 14.3.3.

**17.4.2.** Таким образом, в игре $\Gamma_1$ игрок 1 выбирает свой вектор $\vec{\xi}$ первым, а игрок 2 выбирает $\vec{\eta}$ после него, имея уже полную информацию о векторе $\vec{\xi}$, выбранном противником. В $\Gamma_2$ порядок выбора изменен на противоположный. Поэтому рассуждения из п. 14.3.1 здесь применимы дословно. Игрок 1, выбирая $\vec{\xi}$, может ожидать, что игрок 2 будет выбирать $\vec{\eta}$ с целью минимизировать $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, т. е. что выбор игроком 1 $\vec{\xi}$ ведет к $\min\limits_{\vec{\eta}} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$. Это функция только от $\vec{\xi}$; следовательно, игрок 1 должен выбрать $\vec{\xi}$ так, чтобы максимизировать $\min\limits_{\vec{\eta}} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$. Таким образом, значение для партии игры $\Gamma_1$ (для игрока 1) равно

$$\mathrm{v}_1' = \max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

Аналогично мы получаем, что значение для партии игры $\Gamma_2$ (для игрока 1) равно

$$\mathrm{v}_2' = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

(Очевидное допущение о рациональном поведении противника не играет в действительности никакой роли, поскольку утверждения (14:A:a) — (14:A:e), (14:B:a) — (14:B:e) из пп. 14.3.1 и 14.3.3 применимы здесь дословно.)

Как это делалось в п. 14.4.1, можно обосновать тот очевидный факт, что игра $\Gamma_1$ менее благоприятна для игрока 1, чем $\Gamma_2$, т. е. что

$$v_1' \leqq v_2'.$$

Если в справедливости этого возникнут какие-либо сомнения, то напомним, что строгое доказательство содержится в (13:A *) в п. 13.4.3. Употребляемые там выражения $x$, $y$, $\varphi$ соответствуют нашим $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, K [1]). Если окажется, что

$$v_1' = v_2',$$

то рассуждения из п. 14.5 применимы дословно. Утверждения (14:C:a) — (14:C:f), (14:D:a), (14:D:b) определяют понятия оптимальных $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ и устанавливают «значение» партии (для игрока 1):

$$v' = v_1' = v_2'$$ [2]).

Согласно (13:B) в п. 13.4.3, все это происходит в том и только в том случае, когда существует седловая точка функции K (переменные $x$, $y$, $\varphi$ соответствуют нашим $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, K).

## 17.5. Полная определенность в общем случае

**17.5.1.** Мы заменили $v_1$ и $v_2$ из (14:A:c) и (14:B:c) на $v_1'$ и $v_2'$, и предыдущее обсуждение показывает, что последние могут играть роль первых. Однако мы теперь в такой же степени зависим от равенства $v_1' = v_2'$, как раньше от $v_1 = v_2$. Естествен поэтому вопрос: приобрели ли мы что либо в результате такой замены?

Очевидно, что приобрели, если, имея равенство $v_1' = v_2'$ (для любой заданной игры Γ), мы располагаем лучшими перспективами, чем имея равенство $v_1 = v_2$. Мы называли игру Γ *вполне определенной*, если имели $v_1 = v_2$. Нам представляется целесообразным фиксировать теперь различие и называть игру Γ в случае $v_1 = v_2$ *вполне определенной в частном*, а в случае $v_1' = v_2'$ *вполне определенной в общем*. Такая терминология будет правомерной только в том случае, когда из первого будет следовать второе.

С точки зрения здравого смысла эта импликация вполне правдоподобна. Введение смешанных стратегий увеличивает возможность игрока обороняться против раскрытия его стратегии противником; поэтому можно ожидать, что числа $v_1'$ и $v_2'$ действительно лежат между $v_1$ и $v_2$. Иными словами, можно утверждать, что

(17:3) $$v_1 \leqq v_1' \leqq v_2' \leqq v_2$$

(это неравенство гарантирует, конечно, правомерность использования только что упомянутой импликации).

---

[1]) Хотя $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ — векторы, т. е. последовательности вещественных чисел ($\xi_1, \ldots, \xi_{\beta_1}$) и ($\eta_1, \ldots, \eta_{\beta_2}$), но каждый из них можно рассматривать как переменную в операциях max и min. Областями их изменения являются, конечно, $S_{\beta_1}$ и $S_{\beta_2}$, введенные нами в п. 17.2.

[2]) Подробное повторение рассматриваемых доводов дано в п. 17.8.

Чтобы устранить все возможные сомнения, дадим строгое доказательство неравенства (17:3). Это удобно сделать как следствие другого утверждения.

**17.5.2.** Докажем вначале такую лемму:

(17:A) Для любого $\vec{\xi} \in S_{\beta_1}$

$$\min_{\vec{\eta}} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2} = \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}.$$

Для любого $\vec{\eta} \in S_{\beta_2}$

$$\max_{\vec{\xi}} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \max_{\vec{\xi}} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2} = \max_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \eta_{\tau_2}.$$

Доказательство. Докажем только первую из этих формул; доказательство второй в точности такое же, надо только заменить max на min, а также $\leqq$ на $\geqq$.

Если в качестве $\vec{\eta}$ взять вектор $\delta^{\tau_2'}$ (см. п. 16.1.3 и конец п. 17.2), то мы получим

$$\min_{\vec{\eta}} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2} \leqq \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}\delta_{\tau_2\tau_2'} =$$

$$= \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2')\, \xi_{\tau_1}.$$

Поскольку это верно для всех $\tau_2'$, то

(17:4:a)
$$\min_{\vec{\eta}} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2} \leqq \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2')\, \xi_{\tau_1}.$$

С другой стороны, для всех $\tau_2$

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1} \geqq \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}.$$

Возьмем произвольное $\vec{\eta} \in S_{\beta_2}$, умножим обе стороны этого неравенства на $\eta_{\tau_2}$ и просуммируем по $\tau_2 = 1, \ldots, \beta_2$. Поскольку $\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \eta_{\tau_2} = 1$, мы получим

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2} \geqq \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}.$$

Так как это верно для всех $\vec{\eta}$, то должно быть

(17:4:b)
$$\min_{\vec{\eta}} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}\xi_{\tau_2} \geqq \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}.$$

Теперь (17:4:a) и (17:4:b) дают требуемое соотношение.

Сопоставляя написанные формулы с определением $v_1'$ и $v_2'$ из п. 17.4, мы получаем

(17:5:a) $$v_1' = \max_{\vec{\xi}} \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1},$$

(17:5:b) $$v_2' = \min_{\vec{\eta}} \max_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\, \eta_{\tau_2}.$$

Эти формулы допускают простую словесную интерпретацию. При вычислении $v_1'$ мы заботимся только о защите игрока 1 от раскрытия противником его стратегии, что выражается в использовании $\vec{\xi}$ (вместо $\tau_1$); игрок 2 может при этом действовать по-старому и использовать $\tau_2$ (вместо $\vec{\eta}$). При вычислении $v_2'$ роли игроков меняются. Это понятно и с точки зрения здравого смысла: $v_1'$ относится к игре $\Gamma_1$ (см. пп. 17.4 и 14.2); там игрок 2 выбирает после игрока 1 и полностью информирован о выборе 1; следовательно, он не нуждается в защите от раскрытия его собственной стратегии игроком 1. Для числа $v_2'$, относящегося к $\Gamma_2$, роли игроков меняются.

Значение $v_1'$ не увеличится, если в приведенной выше формуле ограничить переменную $\vec{\xi}$ в операции $\max_{\vec{\xi}}$. Ограничим значение вектора $\vec{\xi}$ векторами $\vec{\delta}^{\tau_1'}$ ($\tau_2' = 1, \ldots, \beta_1$) (см. п. 16.1.3 и конец п. 17.2). Поскольку

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\, \delta_{\tau_1 \tau_1'} = \mathscr{K}(\tau_1', \tau_2),$$

наше выражение заменяется на

$$\max_{\tau'} \min_{\tau_2} \mathscr{K}(\tau_1', \tau_2) = v_1.$$

Таким образом, мы показали, что

$$v_1 \leqq v_1'.$$

Аналогично (см. замечание в начале доказательства последней леммы), ограничивая $\vec{\eta}$ векторами $\vec{\eta} = \vec{\delta}^{\tau_2'}$, мы получаем

$$v_2 \geqq v_2'.$$

Вместе с $v_1' \leqq v_2'$ (см. п. 17.4) это дает нам

(17:3) $$v_1 \leqq v_1' \leqq v_2' \leqq v_2,$$

что и требовалось.

### 17.6. Доказательство основной теоремы

**17.6.** Мы установили, что полная определенность в частном смысле ($v_1 = v_2$) влечет полную определенность в общем смысле ($v_1' = v_2'$). То, что полная определенность в общем может иметь место и тогда, когда полная определенность в частном не имеет места, т. е. что $v_1' = v_2'$ и в то же

время $v_1 \neq v_2$, видно из примеров «орлянки» и игры «камень, мешок и ножницы» [1]). Поэтому мы можем утверждать, что переход от полной определенности в частном смысле к полной определенности в общем смысле действительно является шагом вперед. Однако на данный момент мы не знаем, относится ли это ко всем играм; может оказаться, что существуют такие игры Г двух лиц с нулевой суммой, которые не вполне определены даже в общем: мы еще не исключили возможности неравенства

$$v'_1 < v'_2.$$

Если эта возможность реализуется, то все сказанное в п. 14.7.1 будет снова применимо и даже более широко: раскрытие стратегии противника будет составлять определенное преимущество

$$\Delta' = v'_2 - v'_1 > 0,$$

и трудно себе представить, как может быть построена теория такой игры без дополнительной гипотезы о том, «кто чью стратегию раскроет».

Решающим фактором поэтому является возможность доказательства ого, что это никогда не произойдет. Для всех игр Г

$$v'_1 = v'_2,$$

т. е.

$$\max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \tag{17:6}$$

или, что то же самое (снова подставляя $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, K вместо $x$, $y$, $\varphi$ в (13:B) из п. 13.4.3), седловая точка функции $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ существует.

Это — общая теорема, которая имеет место для всех функций $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ вида

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1} \eta_{\tau_2}. \tag{17:2}$$

Выбор коэффициентов $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$ здесь абсолютно неограничен; они образуют, как это было описано в п. 14.1.3, некоторую совершенно произвольную матрицу. Переменные $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ представляют собой фактически последовательности вещественных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_{\beta_1}$ и $\eta_1, \ldots, \eta_{\beta_2}$, областями изменения которых являются множества $S_{\beta_1}$ и $S_{\beta_2}$ (см. сноску 1 на стр. 174). Функции $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ вида (17:2) называются *билинейными формами*.

Замечание. Эта теорема впервые была сформулирована и доказана в статье одного из авторов теории игр: J. von Neumann, Zur Theorie de Gesellschaftsspiele, *Math. Annalen*, **100** (1928), 295—320. Несколько более общая форма этой минимаксной проблемы возникает в математической экономике в связи с уравнениями производства: J. von Neumann, Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brower'schen Fixpunktsatzes, Ergebnisse eines Math. Kolloquinms, 8 (1937), 73—83. Следует заметить, что две совершенно различные задачи, изучаемые совершенно различными методами, приводят к одной и той же математической задаче необычного, «минимаксного» вида. По-видимому, здесь имеют место и более глубокие формальные связи, как и в других направлениях, о которых упоминается во второй статье. Это обстоятельство должно быть разъяснено.

[1]) В обеих играх $v_1 = -1$, $v_2 = 1$ (см. пп. 14.7.2 и 14.7.3), а рассуждения в п. 17.1 можно рассматривать как доказательство того, что $v'_1 = v'_2 = 0$.

Доказательство нашей теоремы, приведенное в первой статье, довольно запутанным образом использует аппарат топологии и теории функций. Доказательство во второй статье полностью топологическое и связано с теоремой, являющейся важным методом этой дисциплины, так называемой «теоремой о неподвижной точке» Л. Е. И. Брауера. Этот аспект был в дальнейшем прояснен, а доказательство упрощено С. Какутани: A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem *Duke Math. Journal*, 8 (1941), 457—459. Все эти доказательства определенно не являются элементарными. Первое элементарное доказательство было дано Ж. Виллем вместе с Е. Борелем и его сотрудниками: Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications, IV, 2, Application aux Jeux de Hasard, Paris, 1938; J. Ville, Sur la Théorie Générale des Jeux au Intervient l'Habileté des Joueurs, 105—113. Доказательство, которое мы здесь приводим, является дальнейшей элементаризацией доказательства Ж. Вилля и представляется особенно простым. Основным здесь является, конечно, связь с теорией выпуклых множеств, изложенной в § 16, и в особенности с результатами из п. 16.4.3.

Доказательство получается просто при помощи результатов п. 16.4.3. Приведем его.

Применим (16:19:a) и (16:19:b) из п. 16.4.3, заменяя $i$, $j$, $n$, $m$ и $a(i, j)$ на $\tau_1, \tau_2$, $\beta_1, \beta_2$ и $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$, а векторы $\vec{w}$ и $\vec{x}$ — на $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$.

Если выполняется (16:19:b), то существует такой вектор $\vec{\xi} \in S_{\beta_1}$, что

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1} \geqq 0 \quad \text{для} \quad \tau_2 = 1, \ldots, \beta_2,$$

т. е.

$$\min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1} \geqq 0.$$

Следовательно, формула (17:5:a) из п. 17.5.2 дает нам

$$\mathrm{v}_1' \geqq 0.$$

Если выполняется (16:19:a), то существует вектор $\vec{\eta} \in S_{\beta_2}$, для которого

$$\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \eta_{\tau_2} \leqq 0 \quad \text{для} \quad \tau_1 = 1, \ldots, \beta_1,$$

т. е.

$$\max_{\tau_2} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \eta_{\tau_2} \leqq 0.$$

Следовательно, формула (17:5:b) из п. 17.5.2 дает

$$\mathrm{v}_2' \leqq 0.$$

Мы видим теперь, что имеет место либо $\mathrm{v}_1' \geqq 0$, либо $\mathrm{v}_2' \leqq 0$, т. е.

(17:7) Невозможно $\mathrm{v}_1' < 0 < \mathrm{v}_2'$.

Возьмем теперь произвольное число $\mathrm{w}$ и заменим функцию $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ на $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) - \mathrm{w}$ [1]).

При этом $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ заменяется на $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) - \mathrm{w} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}$. Так как $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ принадлежат соответственно $S_{\beta_1}$ и $S_{\beta_2}$, должно быть $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \xi_{\tau_1} = \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \eta_{\tau_2} = 1$,

[1]) Это значит, что игра Г заменяется новой игрой, правила которой в точности совпадают с правилами игры Г, за исключением того, что в конце партии игрок 1 получает меньше, а игрок 2 больше на фиксированную величину w.

и фактически $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ заменяется на $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) - w$. Следовательно, $v'_1$ и $v'_2$ заменяются на $v'_1 - w$ и $v'_2 - w$[1]). Применяя утверждение (17:7) к $v'_1 - w$, $v'_2 - w$, мы получаем:

(17:8) Невозможно $v'_1 < w < v'_2$.

Заметим теперь, что число w было выбрано совершенно произвольно. Вместе с тем при $v'_1 < v'_2$ можно будет выбрать w так, чтобы было $v'_1 < w < v'_2$, однако это противоречит (17:8). Итак, неравенство $v'_1 < v'_2$ невозможно, и мы доказали $v'_1 = v'_2$, что и требовалось. Доказательство завершено.

### 17.7. Сравнение подходов для чистых и для смешанных стратегий

**17.7.1.** Прежде чем двинуться дальше, обсудим еще раз смысл равенства

$$v'_1 = v'_2.$$

Его существенной чертой является то, что всегда имеет место $v'_1 = v'_2$, но не всегда $v_1 = v_2$, т. е. всегда имеет место полная определенность в общем и не всегда вполне определенность в частном (см. начало п. 17.6).

Выразим сказанное математически.

Всегда имеет место равенство

$$\max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \tag{17:9}$$

т. е.

$$\max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2} = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}. \tag{17:10}$$

Используя (17:A), можно даже написать, что

$$\max_{\vec{\xi}} \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1} = \min_{\vec{\eta}} \max_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \eta_{\tau_2}. \tag{17:11}$$

Однако не всегда выполняется

$$\max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2). \tag{17:12}$$

Сравним (17:9) с (17:12). Равенство (17:9) верно всегда, чего нельзя сказать о (17:12). Единственно, чем они отличаются, это величинами $\xi$, $\eta$, K и $\tau_1$, $\tau_2$, $\mathcal{K}$. Почему же подстановка одних на место других превращает неправильное утверждение (17:12) в правильное (17:9)?

Причина этого заключается в том, что $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ из (17:12) является совершенно произвольной функцией своих переменных $\tau_1$ и $\tau_2$ (см. п. 14.1.3), тогда как $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ в (17:9) является функцией весьма частного вида переменных $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$, т. е.

$$\xi_1, \ldots, \xi_{\beta_1}, \quad \eta_1, \ldots, \eta_{\beta_2},$$

а именно билинейной формой. (См. первую часть п. 17.6.) Большая общность $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ делает невозможным доказательство (17:12), в то время

[1]) Это становится очевидным, если вспомнить интерпретацию из сноски 1 на стр. 178.

как частная, билинейная природа $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ составляет основу приведенного в п. 17.6 доказательства равенства (17.9).

Замечание. Билинейность $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ происходит оттого, что она является «математическим ожиданием» выигрыша. Представляется существенным, что линейность этой функции связана с существованием решения в том смысле, в котором мы его нашли. С математической точки зрения это открывает нам довольно интересные перспективы: можно исследовать, какие иные понятия, кроме «математического ожидания», не будут противоречить нашему решению, т. е. получению результата п. 17.6 для игр двух лиц с нулевой суммой.

Понятие «математического ожидания» является фундаментальным со многих точек зрения. Его значимость с точки зрения теории полезности обсуждалась в п. 3.7.1.

**17.7.2.** При всей правдоподобности может показаться парадоксальным, что функция $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ имеет более частный вид, чем $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$, несмотря на то что первая получена из второй с помощью процесса, имеющего все признаки обобщения: мы получили ее заменой понятия чистой стратегии на понятие смешанной стратегии, как это было описано в п. 17.2, т. е. заменой $\tau_1$ и $\tau_2$ на $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$.

Однако более пристальное рассмотрение разрешает этот парадокс. $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ является функцией очень частного вида по сравнению с $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$, однако ее переменные имеют значительно более широкую область изменения, чем первоначальные переменные $\tau_1$ и $\tau_2$. Действительно, $\tau_1$ имеет областью значений конечное множество $1, \ldots, \beta_1$, тогда как $\vec{\xi}$ изменяется во всем множестве $S_{\beta_1}$, которое является $(\beta_1 - 1)$-мерной поверхностью в $\beta_1$-мерном линейном пространстве $S_{\beta_1}$ (см. конец п. 16.2.2 и п. 17.2). Аналогичное справедливо по отношению к $\tau_2$ и $\vec{\eta}$.

Замечание. Заметим, что вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{\beta_1})$ с компонентами $\xi_{\tau_1}$, где $\tau_1 = 1, \ldots, \beta_1$, также содержит $\tau_1$; однако здесь имеется существенное отличие. В $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$ само $\tau_1$ является переменной. В $K(\xi, \eta)$ переменной является $\xi$, в то время как $\tau_1$ оказывается как бы переменной внутри переменной. $\vec{\xi}$ фактически является функцией от $\tau_1$ (см. конец п. 16.1.2), и эта функция как таковая является переменной в $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$. То же относится и к $\tau_2$, $\eta$.

Выразим то же в терминах $\tau_1$ и $\tau_2$: $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$ является функцией от $\tau_1$ и $\tau_2$, в то время как $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ является функцией от функции от переменных $\tau_1$, $\tau_2$ (т. е. тем, что в математике называется функционалом).

Среди точек $\vec{\xi}$ из $S_{\beta_1}$ находятся точки, фактически соответствующие различным $\tau_1$ из $1, \ldots, \beta_1$. Для каждого $\tau_1$ можно построить (как это делалось в п. 16.1.3 и в конце п. 17.2) координатный вектор $\vec{\xi} = \vec{\delta}^{\tau_1}$, выражающий выбор стратегии $\Sigma_1^{\tau_1}$ при исключении всех остальных стратегий. Таким же способом каждой чистой стратегии $\tau_2$ из $1, \ldots, \beta_2$ можно поставить в соответствие некоторый вектор $\vec{\eta}$ из $S_{\beta_2}$. Для этого по данному $\tau_2$ можно построить координатный вектор $\vec{\eta} = \vec{\delta}^{\tau_2}$, выражающий выбор стратегии $\Sigma_2^{\tau_2}$ с исключением всех остальных.

Теперь очевидно, что

$$K(\vec{\delta}^{\tau_1}, \vec{\delta}^{\tau_2}) = \sum_{\tau_1'=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2'=1}^{\beta_2} \mathscr{K}(\tau_1', \tau_2')\, \delta_{\tau_1'\tau_1} \delta_{\tau_2'\tau_2} = \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\,^{1)}.$$

---

[1]) Смысл этой формулы очевиден; достаточно только вспомнить, как выборы стратегий осуществляют $\vec{\delta}^{\tau_1}$ и $\vec{\delta}^{\tau_2}$.

Таким образом, несмотря на свой частный вид, функция $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ содержит функцию $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ и поэтому является более общей. Она действительно шире, чем $\mathcal{K}(\tau, \tau_2)$, поскольку не все $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ имеют вид $\vec{\delta}^{\tau_1}$, $\vec{\delta}^{\tau_2}$, т. е. не все смешанные стратегии являются чистыми [1]). Можно сказать, что $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ является продолжением $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ с более узкой области определения $\tau_1$, $\tau_2$ (т. е. с $\vec{\delta}^{\tau_1}$, $\vec{\delta}^{\tau_2}$) на более широкую область $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ (т. е. на все $S_{\beta_1}$, $S_{\beta_2}$): с области чистых стратегий на область смешанных стратегий. Билинейность функции $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ выражает лишь тот факт, что это продолжение осуществляется путем *линейной интерполяции*. То, что пришлось применить именно этот процесс, объясняется линейным характером «математического ожидания» [2]).

**17.7.3.** Возвращаясь к равенствам (17:9) — (17:12), мы видим теперь, что можно следующим образом выразить справедливость (17:9) — (17:11) и неправильность (17:12).

(17:9) и (17:10) выражают тот факт, что каждый из игроков полностью защищен от раскрытия его стратегии противником в том случае, если он пользуется смешанными стратегиями $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ вместо чистых $\tau_1$, $\tau_2$. (17:11) утверждает, что это остается в силе и в том случае, когда игрок, раскрывший стратегию противника, использует $\tau_1$, $\tau_2$, в то время как противник продолжает использовать $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$. Наконец, неверность (17:12) показывает, что оба игрока — и в особенности тот, стратегия которого окажется раскрытой,— не могут, вообще говоря, безнаказанно обойтись без использования смешанных стратегий $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$.

### 17.8. Исследование полной определенности в общем случае

**17.8.1.** Переформулируем содержание п. 14.5, как указывалось в конце п. 17.4, особо подчеркивая тот установленный в п. 17.6 результат, что всякая игра двух лиц с нулевой суммой Г вполне определена в общем.

Согласно этому результату мы можем определить

$$v' = \max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \mathrm{Sa}_{\vec{\xi}/\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

(см. также (13:C*) в п. 13.5.2 и конец п. 13.4.3).

Построим теперь по аналогии с множествами $A$ и $B$ в (14:D:a), (14:D:b) из п. 14.5.1 множества $\bar{A}$ и $\bar{B}$, являющиеся соответственно подмножествами $S_{\beta_1}$ и $S_{\beta_2}$. Это будут множества $A^{\varphi}$ и $B^{\varphi}$ из п. 13.5.1 (здесь $\varphi$ соответствует нашему K). Таким образом, мы определяем:

(17:B:a) $\bar{A}$ есть множество тех $\vec{\xi} \in S_{\beta_1}$, для которых $\min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ принимает свое максимальное значение, т. е. тех, для которых $\min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = v$.

---

[1]) То есть с положительными вероятностями могут использоваться несколько стратегий.

[2]) Фундаментальная связь между понятием числовой полезности и линейным «математическим ожиданием» была отмечена в конце п. 3.7.1.

(17:B:b) $\overline{B}$ есть множество тех $\vec{\eta} \in S_{\beta_2}$, для которых $\max\limits_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ принимает свое минимальное значение, т. е. тех, для которых

$$\max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = v'.$$

Теперь можно повторить рассуждения из п. 14.5. При этом мы будем использовать нумерацию, которая соответствует перечислению утверждений (14:C:a) — (14:C:f) в п. 14.5 [1]).

Во-первых, заметим следующее:

(17:C:d) Игрок 1, играя надлежащим образом, независимо от действий второго игрока может обеспечить себе выигрыш $\geqq v'$.

Игрок 2, играя надлежащим образом, независимо от действий первого игрока может обеспечить себе выигрыш $\geqq - v'$.

Доказательство. Пусть игрок 1 выбирает $\vec{\xi} \in \overline{A}$. Тогда независимо от действий игрока 2, т. е. для всех $\vec{\eta}$, мы имеем $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \geqq \geqq \min\limits_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = v'$. Пусть игрок 2 выбирает $\eta \in \overline{B}$. Тогда независимо от действий игрока 1, т. е. для всех $\vec{\xi}$, мы имеем $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \leqq \max\limits_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = = v'$. Это завершает доказательство.

Во-вторых, утверждение (17:C:d), очевидно, эквивалентно следующему:

(17:C:e) Игрок 2, играя надлежащим образом, может быть уверен в том, что выигрыш игрока 1 будет $\leqq v'$, т. е. он может не дать игроку 1 выиграть $> v'$ независимо от того, что делает игрок 1.

Игрок 1, играя надлежащим образом, может быть уверен в том, что выигрыш игрока 2 будет $\leqq - v'$, т. е. он может не дать выиграть игроку 2 $> - v'$ независимо от того, что делает игрок 2.

**17.8.2.** В третьих, можно утверждать, опираясь на (17:C:d) и (17:C:e) и на рассуждения, приведенные при доказательстве (17:C:d), что

(17:C:a) Оптимальный способ игры (комбинация стратегий) для игрока 1 в игре Г заключается в выборе произвольного $\vec{\xi} \in \overline{A}$, где $\overline{A}$ — множество, определенное в (17:B:a).

(17:C:b) Оптимальный способ игры (комбинация стратегий) для игрока 2 в игре Г заключается в выборе произвольного $\vec{\eta} \in \overline{B}$, где $\overline{B}$ — множество, определенное в (17:B:b).

В-четвертых, объединение утверждений из (17:C:d) или, что равносильно, из (17:C:e) дает:

(17:C:c) Если оба игрока 1 и 2 оптимально играют в игру Г, т. е. если $\vec{\xi} \in \overline{A}$, а $\vec{\eta} \in \overline{B}$, то значение $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ будет равно значению партии (для игрока 1), т. е. $v'$.

[1]) В связи с этим (a) — (f) появляются в необычном порядке. Это относится также и к п. 14.5, поскольку нумерация в нем основывалась на пп. 14.3.1, 14.3.3, а рассуждения в этих пунктах шли по несколько иному пути.

Используя дополнительно (13:D*) из п. 13.5.2, а также предшествующее (17:B:a) замечание о множествах $\overline{A}$ и $\overline{B}$, мы получаем:

(17:C:f) Оба игрока 1 и 2 играют оптимально в игру Γ, т. е. $\vec{\xi} \in \overline{A}$, а $\vec{\eta} \in \overline{B}$ в том и только в том случае, когда $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ является седловой точкой функции K ($\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$).

Все это делает вполне понятным, что v′ можно в действительности интерпретировать как значение партии игры Γ (для 1) и что $\overline{A}$ и $\overline{B}$ содержат оптимальные способы игры соответственно для игроков 1 и 2. Во всех рассуждениях (17:C:a) — (17:C:f) нет ничего эвристического или неопределенного. Мы не делали никаких специальных предположений о «способностях» игроков, о том, «кто чью стратегию обнаружил» и т. п. Точно так же наши результаты не основываются и на вере в рациональное поведение противника; важность этого момента мы неоднократно подчеркивали. (См. конец п. 14.1.2, а также п. 15.8.3.)

## 17.9. Дальнейшие свойства оптимальных стратегий

**17.9.1.** Результаты (17:C:c) и (17:C:f) в п. 17.8.2 дают также простую и явную характеризацию элементов нашего решения, т. е. число v′ и множества векторов $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Согласно (17:C:c) $\overline{A}$ и $\overline{B}$ определяют v′; следовательно, достаточно только изучить $\overline{A}$, $\overline{B}$, что мы и сделаем, опираясь на утверждение (17:C:f).

На основании этого критерия $\vec{\xi} \in \overline{A}$ и $\vec{\eta} \in \overline{B}$ тогда и только тогда, когда пара $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ является седловой точкой функции K ($\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$). Это означает, что

$$\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \begin{cases} \max\limits_{\vec{\xi}'} \mathrm{K}(\vec{\xi}', \vec{\eta}), \\ \min\limits_{\vec{\eta}'} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}'). \end{cases}$$

Мы получили это в явном виде, использовав выражение (17:2) из п. 17.4.1 и п. 17.6 для K ($\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$), а также выражения в лемме (17:A) из п. 17.5.2 для $\max\limits_{\vec{\xi}'} \mathrm{K}(\vec{\xi}', \vec{\eta})$ и $\min\limits_{\vec{\eta}'} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}')$. Теперь наши уравнения приобретают такой вид:

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2} = \begin{cases} \max\limits_{\tau_1'} \sum\limits_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathscr{K}(\tau_1', \tau_2)\, \eta_{\tau_2}, \\ \min\limits_{\tau_2'} \sum\limits_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2')\, \xi_{\tau_1}. \end{cases}$$

Замечая, что $\sum\limits_{\tau_1=1}^{\beta_1} \xi_{\tau_1} = \sum\limits_{\tau_2=1}^{\beta_2} \eta_{\tau_2} = 1$, мы можем также написать

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \left(\max_{\tau_1'}\right) \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathscr{K}(\tau_1', \tau_2)\, \eta_{\tau_2}\left(- \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\, \eta_{\tau_2}\right) \xi_{\tau_1} = 0,$$

$$\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \left(-\min_{\tau_2'}\right) \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2')\, \xi_{\tau_1}\left(+ \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}\right) \eta_{\tau_2} = 0.$$

Слева в этих уравнениях коэффициенты при $\xi_{\tau_1}$ и $\eta_{\tau_2}$ все $\geq 0$ [1]). Кроме того, все $\xi_{\tau_1}$, $\eta_{\tau_2}$ и сами $\geq 0$. Следовательно, эти равенства имеют место только в том случае, если все слагаемые слева обращаются в нуль. Иными словами, для всех $\tau_1 = 1, \ldots, \beta_1$, для которых коэффициент при $\xi_{\tau_1}$ не равен нулю, должно быть $\xi_{\tau_1} = 0$; точно так же для всех $\tau_2 = 1, \ldots \beta_2$, для которых коэффициент при $\eta_{\tau_2}$ не равен нулю, должно быть $\eta_{\tau_2} = 0$.

Резюмируем:

(17:D) $\vec{\xi} \in \bar{A}$ и $\vec{\eta} \in \bar{B}$ в том и только в том случае, когда имеет место следующее:

Для всех $\tau_1 = 1, \ldots, \beta_1$, для которых $\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \eta_{\tau_2}$ не принимает своего максимального значения (по $\tau_1$), мы имеем $\xi_{\tau_1} = 0$.

Для всех $\tau_2 = 1, \ldots, \beta_2$, для которых $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}$ не принимает своего минимального значения (по $\tau_2$), мы имеем $\eta_{\tau_2} = 0$.

Легко сформулировать эти принципы словесно. Они выражают следующее. Если $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ — оптимальные смешанные стратегии, то $\vec{\xi}$ не содержит стратегий $\tau_1$, которые не оптимальны (для игрока 1) против $\vec{\eta}$, а $\vec{\eta}$ не содержит стратегий $\tau_2$, которые не оптимальны (для игрока 2) против $\vec{\xi}$. Иными словами, $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, как и следовало ожидать, оказываются оптимальными друг против друга.

**17.9.2.** Другое замечание, которое можно сделать в связи с этим, таково:

(17:E) Игра вполне определена в частном в том и только в том случае, когда для каждого игрока существует оптимальная чистая стратегия.

С точки зрения наших предыдущих рассуждений, в особенности процесса обобщения, с помощью которого мы перешли от чистых стратегий к смешанным, это утверждение можно считать интуитивно убедительным. Однако мы приведем математическое доказательство, которое столь же просто. Оно состоит в следующем.

В последней части п. 17.5.2 мы видели, что как $v_1$, так и $v_1'$ получаются применением операции $\max_{\vec{\xi}}$ к $\min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1}$, но по различным множествам изменения $\vec{\xi}$. Для $v_1$ это будет множество всех $\vec{\delta}^{\tau_1}$ ($\tau_1 = 1, \ldots, \beta_1$), а для $v_1'$ — множество $S_{\beta_1}$. Таким образом, максимизация производится по множеству чистых стратегий в первом случае и по множеству смешанных стратегий во втором. Следовательно, $v_1 = v_1'$, т. е. равенство двух максимумов возможно в том и только в том случае, когда максимум во втором множестве достигается (хотя бы однажды) в пределах первого множества. Это, согласно (17:D), означает, что множеству $\bar{A}$ должна принадлежать хотя бы одна чистая стратегия, т. е. хотя бы одна чистая стратегия должна быть оптимальной. Таким образом,

[1]) Проследите, как появились здесь max и min.

(17:F:a) $v_1 = v_1'$ в том и только в том случае, когда для игрока 1 существует оптимальная чистая стратегия.

(17:F:b) $v_2 = v_2'$ в том и только в том случае, когда для игрока 2 существует оптимальная чистая стратегия.

Теперь мы имеем $v_1' = v_2' = v'$, а полная определенность в частном означает $v_1 = v_2 = v$, откуда $v_1 = v_1'$ и $v_2 = v_2'$. Таким образом, (17:F:a) и (17:F:b) дают вместе (17:E).

### 17.10. Ошибки и их следствия. Перманентная оптимальность

**17.10.1.** Из предыдущих рассуждений мы выяснили, что представляет собой оптимальная смешанная стратегия. Скажем еще несколько слов о других смешанных стратегиях. Мы хотим выразить отличие этих стратегий (т. е. векторов $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$) от «оптимальности» и таким образом определить величину ошибки при использовании стратегий, не являющихся оптимальными. Однако мы не будем пытаться исчерпать этот вопрос, имеющий много интересных ответвлений.

Для всех $\vec{\xi} \in S_{\beta_1}$ и всех $\vec{\eta} \in S_{\beta_2}$ определим числовые функции

(17:13:a) $$\alpha(\vec{\xi}) = v' - \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

и

(17:13:b) $$\beta(\vec{\eta}) = \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) - v'.$$

Согласно лемме (17:A) из п. 17.5.2 это равносильно

(17:13:a*) $$\alpha(\vec{\xi}) = v' - \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=\beta_1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\, \xi_{\tau_1},$$

(17:13:b*) $$\beta(\vec{\eta}) = \max_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)\eta_{\tau_2} - v'.$$

Определение

$$v' = \max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

гарантирует нам, что всегда

$$\alpha(\vec{\xi}) \geqq 0, \quad \beta(\vec{\eta}) \geqq 0.$$

Теперь утверждения (17:B:a), (17:B:b) и (17:C:a), (17:C:b) из п. 17.8 дают нам, что стратегия $\vec{\xi}$ является оптимальной в том и только в том случае, когда $\alpha(\vec{\xi}) = 0$, а $\vec{\eta}$ является оптимальной в том и только в том случае, когда $\beta(\vec{\eta}) = 0$.

Таким образом, $\alpha(\vec{\xi})$ и $\beta(\vec{\eta})$ являются удобными числовыми описаниями для произвольных $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ их расстояний от оптимальных стратегий. Явное словесное определение $\alpha(\vec{\xi})$, $\beta(\vec{\eta})$ делает это еще более правдоподобным: формулы (17:13:a), (17:13:b) или (17:13:a*), (17:13:b*)

показывают, сколько рискует потерять игрок (с точки зрения значения партии для него) [1]), используя данную стратегию. Под «риском» мы понимаем здесь наихудшее, что может произойти при данных условиях [2]).

Тем не менее необходимо отдавать себе отчет в том, что $\alpha(\vec{\xi})$ и $\beta(\vec{\eta})$ не указывают, какая именно стратегия противника причиняет эту (максимальную) потерю для игрока, использующего $\vec{\xi}$ или $\vec{\eta}$. В частности, вовсе не очевидно, что если противник использует некоторую оптимальную стратегию, т. е. некоторое $\vec{\eta}_0 \in \overline{B}$ или $\vec{\xi}_0 \in A$, то это само по себе приведет к максимальным потерям. Если игроки используют отличные от оптимальных стратегии $\vec{\xi}$ или $\vec{\eta}$, то максимальные потери достигаются на тех стратегиях $\vec{\eta}'$ или $\vec{\xi}'$ противника, для которых

$$(17:14:a) \qquad K(\vec{\xi}, \vec{\eta}') = \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}),$$

$$(17:14:b) \qquad K(\vec{\xi}', \vec{\eta}) = \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}),$$

т. е. если стратегия $\vec{\eta}'$ оптимальна против данной $\vec{\xi}$ или $\vec{\xi}'$ оптимальна против данной $\vec{\eta}$. При этом мы никогда не можем установить, будет ли некоторая фиксированная стратегия $\vec{\eta}_0$ или $\vec{\xi}_0$ оптимальной против всех $\vec{\xi}$ или $\vec{\eta}$.

**17.10.2.** Назовем поэтому стратегию $\vec{\eta}'$ или стратегию $\vec{\xi}'$, которая оптимальна против всех $\vec{\eta}$ или $\vec{\xi}$, т. е. стратегию, для которой выполняются (17:14:a) или (17:14:b) в п. 17.10.1 для всех $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$,— *перманентно оптимальной*. Всякая перманентно оптимальная стратегия $\vec{\eta}'$ или $\vec{\xi}'$ необходимо является оптимальной; с концептуальной точки зрения это должно быть ясно, и строгое доказательство является простым.

Доказательство. Достаточно провести доказательство для $\vec{\eta}'$; доказательство для $\vec{\xi}'$ аналогично.

Пусть стратегия $\vec{\eta}'$ перманентно оптимальна. Выберем стратегию $\vec{\xi}^*$, которая оптимальна против $\vec{\eta}'$, т. е. для которой

$$K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}') = \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}').$$

---

[1]) Под «потерей» игрока понимается значение партии минус его фактический выигрыш:

для игрока 1 $\quad v' - K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$;

для игрока 2 $\quad (-v') - (-K(\vec{\xi}, \vec{\eta})) = K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) - v'$.

[2]) Действительно, используя предыдущую сноску, а также (17:13:a) и (17:13:b), мы имеем

$$\alpha(\vec{\xi}) = v' - \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \max_{\vec{\eta}} \{v' - K(\vec{\xi}, \vec{\eta})\},$$

$$\beta(\vec{\eta}) = \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) - v' = \max\{K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) - v'\}.$$

Таким образом, каждая из этих функций выражает максимальные потери.

По определению

$$K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}') = \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}).$$

Таким образом, $\vec{\xi}^*$ и $\vec{\eta}'$ образуют седловую точку функции $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, и, следовательно, согласно (17:C:f) в п. 17.8.2 $\vec{\eta}'$ принадлежит $\overline{B}$, т. е. является оптимальной стратегией.

Однако открытым остается вопрос: все ли оптимальные стратегии являются перманентно оптимальными? Более того: существуют ли перманентно оптимальные стратегии вообще?

В общем случае ответ оказывается отрицательным. Так, например, в «орлянке», в игре «камень, мешок и ножницы» единственной оптимальной стратегией (для игрока 1, равно как и для игрока 2) является $\vec{\xi} = \vec{\eta} = \{1/2, 1/2\}$ или соответственно $\{1/3, 1/3, 1/3\}$ [1]). Если игрок 1 играет определенным образом, например выбирая всегда «решетку» или всегда «камень» [2]), то он проиграет, если противник будет выбирать соответственно «герб» [3]) или «мешок» [3]). Однако в этом случае стратегия противника не будет оптимальной; она не будет совпадать с $\{1/2, 1/2\}$ в одном случае и с $\{1/3, 1/3, 1/3\}$ в другом. Если противник играет оптимальную стратегию, то ошибки игрока не имеют значения [4]).

Далее мы приведем другой пример — в более тонком и сложном случае, касающемся покера и необходимости «блефа» (см. пп. 19.2 и 19.10.3).

Все сказанное можно резюмировать заметив, что, в то время как наши оптимальные стратегии совершенны с оборонительной точки зрения, они (в общем случае) не дают максимального выигрыша при (возможных) ошибках противника, т. е. они не рассчитаны на наступление.

Следует, однако, помнить, что наши рассуждения в п. 17.8 остаются в силе: теория наступления, в указанном смысле, без существенно новых идей невозможна. Читатель, который не склонен принять это, может еще раз рассмотреть положение дел в «орлянке» или в игре «камень, мешок и ножницы»; исключительная простота этих двух игр делает наиболее важные моменты особенно ясными.

Другим предостережением против переоценки этой точки зрения является следующее. Во многих случаях слово «наступательный» употребляется в повседневной речи не в том смысле, как мы только что употребляли; оно употребляется именно в том смысле, который полностью охватывается настоящей теорией. Это, как будет показано в п. 17.10.3, имеет место для всех игр с полной информацией,[5]) а также в случае таких типично «агрессивных» операций (обусловленных неполной информацией), как «блеф» в покере [6]).

**17.10.3.** Закончим этот параграф замечанием о том, что существует важный класс игр двух лиц с нулевой суммой, в которых существуют

---

[1]) См. п. 17.1. Любые другие вероятности приведут к потерям в случае «раскрытия». См. далее.

[2]) То есть $\vec{\xi} = \vec{\delta}' = \{1, 0\}$ или соответственно $\{1, 0, 0\}$.

[3]) То есть $\vec{\eta} = \vec{\delta}'' = \{0, 1\}$ или соответственно $\{0, 1, 0\}$.

[4]) То есть плохая стратегия «решетка» (или «камень») может быть побеждена только стратегией «герб» (или «мешок»), которая сама по себе является плохой стратегией.

[5]) Шахматы и трик-трак относятся к таким играм.

[6]) Предыдущие рассуждения относятся скорее к отсутствию «блефа». См. § 19.2 и п. 19.10.3.

перманентно оптимальные стратегии. Это игры с полной информацией, которые исследовались нами в § 15 и, в частности, в пп. 15.3.2, 15.6 и 15.7. Действительно, небольшое видоизменение доказательства полной определенности в частном достаточно для доказательства и того утверждения. Мы получим при этом перманентно оптимальные чистые стратегии. Однако не будем здесь вдаваться в подробности.

Поскольку игры с полной информацией всегда вполне определены в частном (см. сказанное выше), можно ожидать наличия более тесной связи между вполне определенными в частном играми и играми, в которых существуют перманентно оптимальные стратегии (для обоих игроков). Мы не будем дальше обсуждать эти вопросы, а отметим только некоторые существенные моменты.

(17:G:a) Можно показать, что если существуют перманентно оптимальные стратегии для обоих игроков, то игра вполне определена в частном.

(17:G:b) Можно показать, что обратное к (17:G:a) не имеет места.

(17:G:c) Некоторые утончения понятия полной определенности в частном могут указать на более тесные связи с существованием перманентно оптимальных стратегий.

### 17.11. Перемена ролей игроков. Симметрия

**17.11.1.** Рассмотрим значение симметрии или, в более общем случае, эффект, получаемый от перемены ролей игроков. Это будет естественным продолжением анализа п. 14.6.

Как там было отмечено, эта перемена ролей игроков ведет к замене функции $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ на $-\mathcal{K}(\tau_2, \tau_1)$. Формула (17:2) из п. 17.4.1 и п. 17.6 показывают, что это в свою очередь влечет замену $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ на $-K(\vec{\eta}, \vec{\xi})$. В терминах п. 16.4.2 матрица ($\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ см. п. 14.1.3) заменяется на отрицательно транспонированную к ней.

Таким образом, продолжается полная аналогия с рассуждениями § 14; мы снова получаем те же формальные результаты, заменяя $\tau_1$, $\tau_2$, $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ соответственно на $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ (см. пп. 17.4 и 17.8, где это впервые было проделано).

В п. 14.6 мы увидели, что замена $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ на $-\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ влечет замену $v_1$ и $v_2$ на $-v_2$ и $-v_1$. Дословное повторение этих рассуждений показывает, что в нашем случае замена $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ на $-K(\vec{\eta}, \vec{\xi})$ влечет за собой замену $v'_1$ и $v'_2$ на $-v'_2$ и $-v'_1$. Подведем итоги: перемена игроков местами влечет за собой замену $v_1$, $v_2$, $v'_1$, $v'_2$ на $-v_2$, $-v_1$, $-v'_2$, $-v'_1$.

Результат п. 14.6, установленный для случая полной определенности (в частном), заключался в том, что равенство $v = v_1 = v_2$ превращалось в $-v = -v_1 = -v_2$.

Теперь мы знаем, что полная определенность в общем имеет место всегда, так что $v' = v'_1 = v'_2$. Следовательно, это равенство переходит в $-v' = -v'_1 = -v'_2$.

Словесно содержание этого результата ясно. Поскольку нам удалось определить удовлетворительное понятие значения партии для Γ (для игрока 1) $v'$, то весьма естественно, что эта величина изменяет знак при перемене ролей игроков.

**17.11.2.** Мы можем также строго установить, когда игра Г является *симметричной*. Это будет в том случае, когда игроки 1 и 2 играют одну и ту же роль, т. е. когда игра Г совпадает с игрой, которая получается из нее в результате перемены ролей игроков 1 и 2. В соответствии с тем, что было сказано выше, это означает, что

$$\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) = -\mathscr{K}(\tau_2, \tau_1)$$

или, что то же самое,

$$\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = -\mathrm{K}(\vec{\eta}, \vec{\xi}).$$

Это свойство матрицы $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$ или билинейной формы $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ было впервые введено в п. 16.4.4 и было названо *кососимметричностью*.

Замечание 1. Для матрицы $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$ или для соответствующей билинейной формы $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ *симметричность* определяется следующим образом:

$$\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2) = \mathscr{K}(\tau_2, \tau_1)$$

или, что равносильно,

$$\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \mathrm{K}(\vec{\eta}, \vec{\xi}),$$

Следует заметить, что симметрия игры Г эквивалентна кососимметричности, а не симметричности матрицы выигрышей или билинейной формы.

Замечание 2. Кососимметричность означает, что отражение матрицы табл. 5 от ее главной диагонали (состоящей из элементов с индексами (1. 1), (2. 2) и т. д.) изменяет ее знак (симметричность в этом смысле означала бы, что такое отражение переводит матрицу в себя). В рассматриваемом случае матричная схема табл. 5 должна быть квадратной, т. е. $\beta_1 = \beta_2$. Это, однако, выполняется автоматически, так как мы предположили, что роли игроков 1 и 2 в игре Г одинаковы.

В этом случае $v_1$ и $v_2$ должны совпадать с $-v_2$ и $-v_1$, следовательно, $v_1 = -v_2$, а так как $v_1 \geqq v_2$, должно быть $v_1 \geqq 0$. Однако $v'$ должно совпадать с $-v'$, поэтому мы можем даже утверждать, что

$$v' = 0$$ [1].

Мы видим, таким образом, что значение каждой партии симметричной игры равно нулю.

Следует заметить, что значение $v'$ каждой партии игры Г может быть нулем и без того, чтобы игра Г была симметричной. Игра, для которой $v' = 0$, называется *безобидной*.

Это обстоятельство иллюстрируют примеры пп. 17.7.2, 14.7.3. Игра «камень, мешок и ножницы» симметрична (и, следовательно, безобидна); игра в «орлянку» безобидна, не будучи симметричной.

Замечание 3. Роли игроков в игре в «орлянку» различны. Игрок 1 стремится угадать, а 2 стремится избежать угадывания. Чувствуется, конечно, что такое различие несущественно и что безобидность игры вызвана незначительностью этой асимметрии. Эти рассуждения можно уточнить; однако, в данном случае мы этого делать не намерены. Более удачный пример безобидной игры без симметрии можно было бы дать в виде резко несимметричной игры, в которой успех и неуспех каждого из игроков подобраны столь разумно, что в результате получается безобидная игра, т. е. значение ее $v' = 0$.

Не во всех отношениях удачным примером такой игры может служить игра в кости. В этой игре игрок 1, называемый «игроком», бросает две кости, на каждой

[1]) Это, конечно, следует из того, что $v_1' = v_2'$. Без этого равенства, т. е. без общей теоремы (16:F) из п. 16.4.3, мы могли бы относительно $v_1'$ и $v_2'$ утверждать только то, что мы получили ранее для $v_1$ и $v_2$, а именно что $v_1' = -v_2'$, а так как $v_1' \geqq v_2'$, имеем $v_1' \geqq 0$.

из которых обозначены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Таким образом, результатом каждого бросания может оказаться любое из чисел 2, . . ., 12. Эти числа имеют вероятности, приведенные в табл. 6.

Таблица 6

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Сумма | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Случаи появления из 36 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| Вероятность | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Если «игрок» выбрасывает 7 или 11, то он выигрывает. Если он выбрасывает 2, 3 или 12, то он проигрывает. Если он выбрасывает что-либо другое (4, 5, 6 или 8, 9, 10), то игра повторяется до тех пор, пока он не выбрасывает того же числа, что на первом шаге (в этом случае он выигрывает), или пока не выбрасывает 7 (в этом случае он проигрывает). Игрок 2 («банк») на игру не влияет.

Несмотря на существенные различия правил, определяющих поведение игроков 1 и 2 («игрока» и «банка»), их шансы примерно равны. Простые вычисления, приводить которые мы здесь не будем, показывают, что «игрок» имеет 244 шанса из 495 против 251 шанса, которые имеет «банк». Поэтому значение партии для единичной ставки равно

$$\frac{244-251}{495}=-\frac{7}{495}=-1{,}414\,\%.$$

Таким образом, получается достаточно хорошее приближение к безобидности.

В симметричной игре множества $\overline{A}$ и $\overline{B}$ из (17:B:a), (17:B:b) в п. 17.8, очевидно, совпадают; так как $\overline{A}=\overline{B}$, то в (17:D) из п. 17.9 мы можем положить $\vec{\xi}=\vec{\eta}$. Переформулируем результат для этого случая.

(17:H) В симметричной игре $\vec{\xi}\in\overline{A}$ в том и только в том случае, когда для всех $\tau_2=1,\ldots,\beta_2$, для которых $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\mathcal{K}(\tau_1,\tau_2)\,\xi_{\tau_1}$ не достигает своего минимума (по $\tau_2$), имеет место $\xi_{\tau_2}=0$.

Используя терминологию заключительного замечания из п. 17.9, мы можем сказать, что $\vec{\xi}$ оптимальна против самой себя.

**17.11.3.** Результаты пп. 17.11.1 и 17.11.2 о том, что для любой симметричной игры $v'=0$, можно объединить с (17:C:d) в п.17.8. Тогда мы получим следующее.

(17:I) В симметричной игре каждый из игроков, играя надлежащим образом, может избежать потерь [1]) независимо от действий противника.

Математически это можно сформулировать следующим образом. Если матрица $\mathcal{K}(\tau_1,\tau_2)$ кососимметрична, то существует такой вектор $\vec{\xi}\in S_{\beta_1}$, что

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\mathcal{K}(\tau_1,\tau_2)\,\xi_{\tau_1}\geqq 0 \qquad \text{для } \tau_2=1,\ldots,\beta_2.$$

Это неравенство можно также получить и непосредственно, потому что оно совпадает с последним результатом (16:G) п. 16.4.4. Для того чтобы это показать, достаточно ввести там новые обозначения: заменить имеющиеся там $i$, $j$, $a(i,j)$ на наши $\tau_1$, $\tau_2$, $\mathcal{K}(\tau_1,\tau_2)$ и $\vec{w}$ на $\vec{\xi}$.

[1]) То есть обеспечить себе выигрыш $\geqq 0$.

Этим фактом можно даже обосновать всю нашу теорию, т. е. вывести из него теорему п. 17.6. Другими словами, полная определенность в общем для произвольной игры Г может быть выведена из таковой для симметричных игр. Доказательство этого представляет самостоятельный интерес, однако мы не будем его здесь рассматривать, поскольку рассуждения в п. 17.6 являются более прямыми.

Возможность защитить себя от потерь (в симметричной игре) имеется только благодаря применению смешанных стратегий $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ (см. конец п. 17.7). В случае, когда игроки ограничиваются выбором чистых стратегий $\tau_1$ и $\tau_2$ существует опасность раскрытия стратегии противником и связанных с этим потерь. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно вспомнить игру «камень, мешок и ножницы» (см. пп. 14.7 и 17.1.1). Мы еще раз встретимся с этим в п. 19.2.1 в связи с покером и необходимостью «блефа».

*Глава IV*

# ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ. ПРИМЕРЫ

## § 18. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИГРЫ

### 18.1. Простейшие игры

**18.1.1.** Наше общее обсуждение игры двух лиц с нулевой суммой закончено. Теперь мы перейдем к рассмотрению характерных примеров таких игр. Эти примеры лучше, чем какие бы то ни было общие абстрактные рассуждения, выявят истинную значимость различных компонент этой теории. Они покажут, в частности, как с точки зрения здравого смысла можно интерпретировать некоторые формальные шаги, предписываемые нашей теорией. Окажется, что можно строго формализовать основные аспекты таких «практических» и «психологических» явлений, которые будут упомянуты в пп. 19.2, 19.10 и 19.16 [1]).

**18.1.2.** Числа $\beta_1$, $\beta_2$ — т. е. количество возможностей, имеющихся у двух игроков в игре в нормальной форме,— дают естественную первую оценку степени сложности игры Г. Тот случай, когда одно из этих чисел (или оба) равно 1, можно не рассматривать. Это условие означало бы, что у рассматриваемого игрока вообще нет выбора, благодаря которому он мог бы влиять на ход игры [2]). Поэтому простейшими играми того класса, который представляет для нас интерес, являются игры, для которых

$$\beta_1 = \beta_2 = 2. \quad (18:1)$$

Таблица 7

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $\mathscr{K}(1, 1)$ | $\mathscr{K}(1, 2)$ |
| 2 | $\mathscr{K}(2, 1)$ | $\mathscr{K}(2, 2)$ |

В п. 14.7 мы видели, что игра в «орлянку» является игрой такого типа; ее матричная схема приведена в табл. 2 в 13.4.1. Другой пример такой игры дан там же в табл. 4.

Рассмотрим теперь игру наиболее общего вида, удовлетворяющую условию (18:1), т. е. игру, представленную в табл. 7. Это приложимо, например, к игре в «орлянку», если различным способам совпадения сторон монет не обязательно соответствует один и тот же выигрыш (или вообще выигрыш), а также различным способам несовпадения — один и тот же проигрыш (или вообще проигрыш) [3]). Мы намерены применительно к этому случаю обсудить результаты из п. 17.8, а именно значение игры Г и множества оптимальных стратегий $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Эти понятия были введены при доказательстве основных результатов в п. 17.8 (доказательстве, основанном на теореме из п. 17.6); но теперь мы хотим вычислить их снова

[1]) Мы это подчеркиваем из-за широко распространенного мнения, что такие вещи по самому существу непригодны для строгого (математического) изучения.

[2]) Таким образом, игра была бы, по существу, игрой одного лица, но, конечно, уже не игрой с нулевой суммой.

[3]) Сравнение табл. 2 и табл. 7 показывает, что в игре в «орлянку» $\mathscr{K}(1, 1) = \mathscr{K}(2, 2) = 1$ (выигрыш при совпадении); $\mathscr{K}(1, 2) = \mathscr{K}(2, 1) = -1$ (проигрыш в противном случае).

в явном виде для этого частного случая и тем самым еще дальше проникнуть в их назначение и возможности.

**18.1.3.** Для представленной в табл. 7 игры можно принять несколько тривиальных соглашений, которые существенно упрощают ее анализ.

Во-первых, совершенно безразлично, какой из двух выборов игрока 1 мы обозначим через $\tau_1 = 1$, а какой через $\tau_1 = 2$; мы можем их переставить, т. е. поменять местами две строки матрицы.

Во-вторых, также безразлично, какой из двух выборов игрока 2 мы обозначим через $\tau_2 = 1$, а какой через $\tau_2 = 2$; мы можем переставить и их, т. е. поменять местами два столбца матрицы.

Наконец, безразлично также, какого из двух игроков мы будем называть 1, а какого 2; мы можем переставить их, т. е. заменить $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$ на $-\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$ (см. пп. 14.6 и 17.11). Это равносильно тому, что меняются ролями строки и столбцы матрицы и, кроме того, изменяется знак каждого ее элемента.

Итак, мы имеем здесь $2 \times 2 \times 2 = 8$ возможных вариантов, каждый из которых описывает, по существу, одну и ту же игру.

## 18.2. Подробное количественное рассмотрение этих игр

**18.2.1.** Теперь мы переходим непосредственно к обсуждению. Оно будет состоять в рассмотрении нескольких альтернативных возможностей, «случаев», которые будут далее перечислены.

Эти случаи отличаются друг от друга различными возможностями, соответствующими положению максимума или минимума по обоим аргументам функции $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$; на первый взгляд такое разграничение могло бы показаться произвольным, но тот факт, что оно приводит к полному перечислению всех возможностей, оправдывает его.

Рассмотрим поэтому $\max\limits_{\tau_1, \tau_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$ и $\min\limits_{\tau_1, \tau_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$. Следует считать, что каждое из этих значений достигается хотя бы в одной точке, причем можно допустить, что они достигаются и более чем в одной точке [1]; но для нас это не изменяет положения дел. Начинаем теперь с определения различных случаев.

**18.2.2.** Случай (А): клетки таблицы можно выбрать так, чтобы $\max\limits_{\tau_1, \tau_2}$ и $\min\limits_{\tau_1, \tau_2}$ лежали в разных строках и в разных столбцах.

Изменяя нумерацию $\tau_1 = 1, 2$ точно так же, как и $\tau_2 = 1, 2$, мы можем первую из указанных клеток ( $\max\limits_{\tau_1, \tau_2}$ ) сделать клеткой (1, 1). Тогда второй клеткой ( $\min\limits_{\tau_1, \tau_2}$ ) должна быть клетка (2, 2). Следовательно, имеем

$$\mathscr{K}(1, 1) \begin{Bmatrix} \geqq \mathscr{K}(1, 2) \geqq \\ \geqq \mathscr{K}(2, 1) \geqq \end{Bmatrix} \mathscr{K}(2, 2). \tag{18:2}$$

Поэтому (1, 2) является седловой точкой [2].

Таким образом, в этом случае игра вполне определена и

$$v' = v = \mathscr{K}(1, 2). \tag{18:3}$$

---

[1] В игре в «орлянку» (см. сноску 3 на стр. 192) $\max\limits_{\tau_1, \tau_2}$ равен 1 и достигается на (1, 1) и (2, 2), в то время как $\min\limits_{\tau_1, \tau_2}$ равен $-1$ и достигается на (1, 2) и (2, 1).

[2] Вспомните п. 13.4.2. Заметим, что мы должны выбрать (1, 2), а не (2, 1).

**18.2.3.** Случай (B): описанный выше выбор невозможен.

Возьмем две интересующие нас клетки ( $\max_{\tau_1, \tau_2}$ и $\min_{\tau_1, \tau_2}$ ); тогда они будут лежать либо в одной и той же строке, либо в одном и том же столбце. Если имеет место первый случай, то можно поменять ролями игроков 1 и 2; поэтому всегда можно будет считать, что эти две клетки лежат в одном и том же столбце [1]).

Переставляя $\tau_1 = 1, 2$ (если это необходимо, одновременно с $\tau_2 = 1, 2$), мы опять можем сделать так, чтобы первой из указанных клеток ( $\max_{\tau_1, \tau_2}$ ) была бы (1, 1). Таким образом, номер интересующего нас столбца будет $\tau_2 = 1$. Тогда второй из указанных клеток ( $\min_{\tau_1, \tau_2}$ ) должна быть (2, 1) [2]).

Следовательно, мы имеем

(18:4) $$\mathcal{K}(1, 1) \begin{Bmatrix} \geqq \mathcal{K}(1, 2) \geqq \\ \geqq \mathcal{K}(2, 2) \geqq \end{Bmatrix} \mathcal{K}(2, 1).$$

Фактически случаи $\mathcal{K}(1, 1) = \mathcal{K}(1, 2)$ или $\mathcal{K}(2, 2) = \mathcal{K}(2, 1)$ исключаются, поскольку иначе для $\max_{\tau_1, \tau_2}$ и $\min_{\tau_1, \tau_2}$ был бы возможен альтернативный выбор (1, 2), (2, 1) или (1, 1), (2, 2) и мы попадали бы в условия случая (A) [3]).

Таким образом, мы можем усилить (18:4), именно:

(18:5) $$\mathcal{K}(1, 1) \begin{Bmatrix} > \mathcal{K}(1, 2) \geqq \\ \geqq \mathcal{K}(2, 2) > \end{Bmatrix} \mathcal{K}(2, 1).$$

Теперь мы должны произвести дальнейшее разделение.

**18.2.4.** Случай ($B_1$):

(18:6) $$\mathcal{K}(1, 2) \geqq \mathcal{K}(2, 2).$$

Тогда неравенства (18:5) можно усилить:

(18:7) $$\mathcal{K}(1, 1) > \mathcal{K}(1, 2) \geqq \mathcal{K}(2, 2) > \mathcal{K}(2, 1).$$

Поэтому (1, 2) снова оказывается седловой точкой.

Таким образом, и в этом случае игра тоже вполне определена, и опять

(18:8) $$v' = v = \mathcal{K}(1, 2).$$

**18.2.5.** Случай ($B_2$):

(18:9) $$\mathcal{K}(1, 2) < \mathcal{K}(2, 2).$$

---

[1]) Эта перестановка игроков изменяет знак каждого элемента матрицы (см. выше), поэтому она меняет местами $\max_{\tau_1, \tau_2}$ и $\min_{\tau_1, \tau_2}$. Но тем не менее они окажутся в одном и том же столбце.

[2]) Точнее, это могла бы быть клетка (1, 1). Но тогда для $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ значения $\max_{\tau_1, \tau_2}$ и $\min_{\tau_1, \tau_2}$ совпадают, т. е. функция $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ постоянна. Тогда мы можем использовать (2, 1) также для $\min_{\tau_1, \tau_2}$.

[3]) Как показывает пример игры в «орлянку», случай $\mathcal{K}(1, 1) = \mathcal{K}(2, 2)$ и $\mathcal{K}(1, 2) = \mathcal{K}(2, 1)$ возможен. См. сноску 3 на стр. 192 и сноску 1 на стр. 195.

Тогда неравенства (18:5) можно усилить:

(18:10) $$\mathscr{K}(1,\ 1) \geqq \mathscr{K}(2,\ 2) > \mathscr{K}(1,\ 2) \geqq \mathscr{K}(2,\ 1)$$ [1].

Эта игра не является вполне определенной [2].

Однако нетрудно найти оптимальные стратегии (т. е. $\vec{\xi}$ из $\overline{A}$ и $\vec{\eta}$ из $\overline{B}$), как удовлетворяющие характеристическому условию (17:D) из п. 17.9. Мы в состоянии сделать даже большее: можно выбрать $\vec{\eta}$ и $\vec{\xi}$ так, чтобы соответственно сумма $\sum_{\tau_2=1}^{2} \mathscr{K}(\tau_1,\ \tau_2)\,\eta_{\tau_2}$ сохраняла свое значение для всех $\tau_1$, а сумма $\sum_{\tau_1=1}^{2} \mathscr{K}(\tau_1,\ \tau_2)\,\xi_{\tau_1}$ — для всех $\tau_2$. Для этого необходимо, чтобы

(18:11) $$\begin{cases} \mathscr{K}(1,\ 1)\,\eta_1 + \mathscr{K}(1,\ 2)\,\eta_2 = \mathscr{K}(2,\ 1)\,\eta_1 + \mathscr{K}(2,\ 2)\,\eta_2, \\ \mathscr{K}(1,\ 1)\,\xi_1 + \mathscr{K}(2,\ 1)\,\xi_2 = \mathscr{K}(1,\ 2)\,\xi_1 + \mathscr{K}(2,\ 2)\,\xi_2. \end{cases}$$

Это означает, что

(18:12) $$\begin{cases} \xi_1 : \xi_2 = (\mathscr{K}(2,\ 2) - \mathscr{K}(2,\ 1)) : (\mathscr{K}(1,\ 1) - \mathscr{K}(1,\ 2)), \\ \eta_1 : \eta_2 = (\mathscr{K}(2,\ 2) - \mathscr{K}(1,\ 2)) : (\mathscr{K}(1,\ 1) - \mathscr{K}(2,\ 1)). \end{cases}$$

Эти отношения должны удовлетворять еще и требованиям

$$\xi_1 \geqq 0, \quad \xi_2 \geqq 0, \quad \xi_1 + \xi_2 = 1,$$
$$\eta_1 \geqq 0, \quad \eta_2 \geqq 0, \quad \eta_1 + \eta_2 = 1.$$

Этим требованием удовлетворить можно, поскольку приведенные отношения (т. е. правые части в (18:12)) положительны в силу (18:10). Мы имеем

$$\xi_1 = \frac{\mathscr{K}(2,\ 2) - \mathscr{K}(2,\ 1)}{\mathscr{K}(1,\ 1) + \mathscr{K}(2,\ 2) - \mathscr{K}(1,\ 2) - \mathscr{K}(2,\ 1)},$$
$$\xi_2 = \frac{\mathscr{K}(1,\ 1) - \mathscr{K}(1,\ 2)}{\mathscr{K}(1,\ 1) + \mathscr{K}(2,\ 2) - \mathscr{K}(1,\ 2) - \mathscr{K}(2,\ 1)}$$

и

$$\eta_1 = \frac{\mathscr{K}(2,\ 2) - \mathscr{K}(1,\ 2)}{\mathscr{K}(1,\ 1) + \mathscr{K}(2,\ 2) - \mathscr{K}(1,\ 2) - \mathscr{K}(2,\ 1)},$$
$$\eta_2 = \frac{\mathscr{K}(1,\ 1) - \mathscr{K}(2,\ 1)}{\mathscr{K}(1,\ 1) + \mathscr{K}(2,\ 2) - \mathscr{K}(1,\ 2) - \mathscr{K}(2,\ 1)}.$$

Можно показать даже, что эти векторы $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ единственны, т. е. множества $\overline{A}$, $\overline{B}$ не имеют других элементов.

Доказательство. Если бы вектор $\vec{\xi}$ или $\vec{\eta}$ отличался от найденного нами, то в силу характеристического условия (17:D) из п. 17.9 вектор $\vec{\eta}$ или соответственно вектор $\vec{\xi}$ должен был бы иметь одну равную нулю компоненту. Но тогда $\vec{\eta}$ или $\vec{\xi}$ должны были бы отличаться от

[1]) Этот случай фактически соответствует игре в «орлянку». См. сноски 3 на стр. 192 и 3 на стр. 194.

[2]) Ясно, что $v_1 = \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathscr{K}(\tau_1,\ \tau_2) = \mathscr{K}(1,\ 2)$, $v_2 = \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} \mathscr{K}(\tau_1,\ \tau_2) = \mathscr{K}(2,\ 2)$, и поэтому $v_1 < v_2$.

приведенных выше, поскольку у них обе компоненты положительны. Таким образом, отличаться от приведенных значений должны одновременно и $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$, но тогда оба они должны иметь по одной равной нулю компоненте. Для обоих другая компонента будет тогда равна 1, т. е. оба являются координатными векторами [1]). Следовательно, седловая точка функции $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, которую они представляют, совпадала бы с седловой точкой функции $\mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)$; ср. (17:E) из п. 17.9. Таким образом, игра была бы вполне определенной, но мы знаем, что в данном случае это не так.

Это завершает доказательство.

Теперь видно, что все четыре выражения в (18:11) равны одному и тому же значению, именно:

$$\frac{\mathscr{K}(1, 1)\mathscr{K}(2, 2)-\mathscr{K}(1, 2)\mathscr{K}(2, 1)}{\mathscr{K}(1, 1)+\mathscr{K}(2, 2)-\mathscr{K}(1, 2)-\mathscr{K}(2, 1)},$$

а в силу (17:5:a), (17:5:b) из п. 17.5.2 этим значением является v'. Таким образом, мы имеем

$$\text{(18:13)} \qquad \mathrm{v}' = \frac{\mathscr{K}(1, 1)\mathscr{K}(2, 2)-\mathscr{K}(1, 2)\mathscr{K}(2, 1)}{\mathscr{K}(1, 1)+\mathscr{K}(2, 2)-\mathscr{K}(1, 2)-\mathscr{K}(2, 1)}.$$

## 18.3. Качественное описание

**18.3.1.** Полученные в п. 18.2 формальные результаты можно резюмировать различными способами, которые сделают их более ясными. Начнем прежде всего со следующего критерия.

Клетки (1, 1), (2, 2) образуют одну *диагональ* матрицы в табл. 7. Клетки (1, 2), (2, 1) образуют другую *диагональ*.

Будем говорить, что два множества чисел $E$ и $F$ *отделены*, если либо каждый элемент множества $E$ больше любого элемента из $F$, либо каждый элемент из $E$ меньше любого элемента из $F$.

Рассмотрим теперь случаи (A), ($\mathrm{B}_1$), ($\mathrm{B}_2$) из п. 18.2. В первых двух случаях игра вполне определена, а элементы, расположенные на одной диагонали матрицы, не отделяются от элементов, расположенных на другой диагонали [2]). В последнем случае игра не является вполне определенной и элементы, образующие одну диагональ матрицы, отделяются от элементов, образующих другую диагональ [3]).

Таким образом, отделимость диагоналей необходима и достаточна для того, чтобы игра не была вполне определенной. Этот критерий основан на результатах, полученных в п. 18.2 благодаря соглашению в п. 18.1.3 Но описанные в п. 18.1.3 три соглашения не затрагивали ни полной определенности игры, ни отделимости диагоналей [4]). Следовательно, наш первый критерий всегда справедлив. Переформулируем его:

(18:A) Игра не является вполне определенной в том и только том случае, когда элементы одной диагонали матрицы отделяются от элементов другой диагонали.

---

[1]) {1, 0} или {0, 1}.

[2]) Случай (A): $\mathscr{K}(1, 1) \geqq \mathscr{K}(1, 2) \geqq \mathscr{K}(2, 2)$ в силу (18:2). Случай ($\mathrm{B}_1$): $\mathscr{K}(1, 1) > \mathscr{K}(1, 2) \geqq \mathscr{K}(2, 2)$ в силу (18:7).

[3]) Случай ($\mathrm{B}_2$): $\mathscr{K}(1, 1) \geqq \mathscr{K}(2, 2) > \mathscr{K}(1, 2) \geqq \mathscr{K}(2, 1)$ в силу (18:10).

[4]) Первое очевидно, поскольку эти соглашения касаются только обозначений, что для игры несущественно. Второе легко проверить.

**18.3.2.** В случае ($B_2$), т. е. когда игра не вполне определена, найденные нами (единственный) вектор $\vec{\xi}$ из $\overline{A}$ и (единственный) вектор $\vec{\eta}$ из $\overline{B}$ имеют обе ненулевые координаты. Это, так же как и утверждение о единственности, не зависит от соглашений, описанных в п. 18.1.3 [1]). Таким образом, мы имеем:

(18:В) Если игра не является вполне определенной, то существуют только одна оптимальная стратегия $\vec{\xi}$ (т. е. из $\overline{A}$) и только одна оптимальная стратегия $\vec{\eta}$ (т. е. из $\overline{B}$) и обе компоненты этих стратегий положительны.

Иными словами, оба игрока действительно должны использовать смешанные стратегии.

В силу (18:В) ни одна из компонент векторов $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ ($\vec{\xi}$ из $\overline{A}$, $\vec{\eta}$ из $\overline{B}$) не равна нулю. Поэтому критерий из п. 17.9 показывает, что утверждение, предшествующее выводу (18:11), — (который являлся тогда достаточным, но не был необходимым) теперь является необходимым (и достаточным). Поэтому условия (18:11) должны быть выполнены, и, следовательно, все полученные из них заключения справедливы. Это относится, в частности, к значениям $\xi_1$, $\xi_2$, $\eta_1$, $\eta_2$, полученным после (18:11), и к значению v$'$, даваемому формулой (18:13).

Таким образом, всякий раз, когда игра не является вполне определенной, применимы все эти формулы.

**18.3.3.** Сейчас мы сформулируем другой критерий. Будем говорить, что в матрице общего вида $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ (см. табл. 5 на стр. 126) при произвольных $\beta_1$ и $\beta_2$ строка (скажем, $\tau_1'$) или столбец (скажем, $\tau_2'$) *доминирует* соответственно другую строку (скажем, $\tau_1''$) или другой столбец (скажем, $\tau_2''$), если это справедливо для всех без исключения соответствующих элементов. Иными словами, если $\mathcal{K}(\tau_1', \tau_2) \geqq \mathcal{K}(\tau_1'', \tau_2)$ для всех $\tau_2$ или соответственно если $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2') \geqq \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2'')$ для всех $\tau_1$.

Это определение имеет простой смысл. Оно означает, что для игрока 1 выбор $\tau_1'$ не хуже выбора $\tau_1''$ или что для игрока 2 выбор $\tau_2'$ не лучше выбора $\tau_2''$, и в обоих случаях это справедливо независимо от действий противника [2]).

Вернемся теперь к нашей задаче ($\beta_1 = \beta_2 = 2$). Вновь рассмотрим случаи (А), ($B_1$), ($B_2$) из п. 18.2. В первых двух случаях имеется доминирующая строка или столбец [3]). В последнем случае нет ни того ни другого [4]).

Таким образом, тот факт, что какая-то строка (столбец) доминирует другую, является необходимым и достаточным условием полной определенности игры Г. Подобно нашему первому критерию, этот критерий основан на использовании в п. 18.2 сформулированных в п. 18.1.3 соглашений. И точно так же, как и в п. 18.2, эти соглашения не влияют ни на полную определенность, ни на доминирование строк или столбцов. Следовательно, и этот критерий также всегда справедлив. Переформулируем его.

---

[1]) Это также легко проверить.

[2]) Это, конечно, исключительный случай. Вообще, сравнительное достоинство возможных выборов будет зависеть от действий противника.

[3]) Случай (А): столбец 1 доминирует столбец 2 в силу (18:2). Случай ($B_1$): строка 1 доминирует строку 2 в силу (18:7).

[4]) Случай ($B_2$): как нетрудно проверить, неравенства (18:10) исключают все четыре возможности.

(18:C) Игра Г вполне определена в том и только том случае, когда некоторая строка (столбец) доминирует другую (другой).

18.3.4. В том, что условие (18:C) достаточно для полной определенности, нет ничего удивительного. Оно означает, что для одного из двух игроков одна из его чистых стратегий во всех случаях не хуже других (ср. выше). Таким образом, он знает, что делать ему, а его противник знает, что его ожидает. Это и соответствует полной определенности.

Проведенное рассуждение основано, конечно, на предположении о рациональном поведении другого игрока. Наше первоначальное обсуждение свободно от такого предположения. Замечания, сделанные в начале и в конце п. 15.8, применимы до некоторой степени и в этой более простой ситуации. Существенно здесь то, что на самом деле результат (18:C) является и необходимым условием. Иными словами, из того, что могло бы обеспечить полную определенность игры, нет ничего более тонкого, чем непосредственное доминирование строк или столбцов.

Следует помнить, что нами рассматривался самый простой случай: $\beta_1 = \beta_2 = 2$. В п. 18.5 мы увидим, какие следует добавить условия в тех случаях, когда $\beta_1$ и $\beta_2$ увеличиваются.

## 18.4. Обсуждение некоторых конкретных игр (обобщения игры в «орлянку»)

18.4.1. Рассмотрим некоторые применения результатов из пп. 18.2 и 18.3.

(a) Игра в «орлянку» в ее обычной форме с матрицей $\mathcal{K}$ (табл. 7) задается так, как это указано в табл. 2 (стр. 120). Нам известно, что значение этой игры

$$v' = 0$$

и (единственные) оптимальные стратегии

$$\vec{\xi} = \vec{\eta} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

(См. п. 17.1. Это получается сразу же из формул п. 18.2.)

18.4.2.(b) Игра в «орлянку», где выбор «решетки» дает двойной выигрыш. Таким образом, матрица табл. 7 отличается от матрицы табл. 2 тем, что у нее элемент (1, 1) в два раза больше (см. табл. 8). Диагонали здесь отделены (1 и 2 больше, чем —1); следовательно, оптимальные стратегии единственны и они будут смешанными (см. (18:A), (18:B)). Используя соответствующие формулы из случая ($B_2$) в п. 18.2.5, мы получаем значение

Таблица 8

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | —1 |
| 2 | —1 | 1 |

$$v' = \frac{1}{5}$$

и оптимальные стратегии

$$\vec{\xi} = \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}, \quad \vec{\eta} = \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}.$$

Заметим, что выигрыш при угадывании «решетки» увеличил значение игры для игрока 1, который пытается угадать. Кроме того, это обстоятельство заставляет его выбирать «решетку» менее часто, поскольку выигрыш делает этот выбор правдоподобным и, следовательно, опасным. Прямая угроза большой потери из-за выбора «решетки» влияет на игрока 2 анало-

гичным образом. Это рассуждение весьма правдоподобно, но недостаточно строго. Однако наши формулы, из которых этот результат был получен, достаточно строги.

**18.4.3.**(c) Игра в «орлянку», в которой совпадение «решеток» дает двойной выигрыш, а несовпадение при выборе «решетки» игроком 1 влечет тройной штраф. Таким образом, матрица табл. 7 модифицируется так, как показано в табл. 9.

Диагонали отделены (1 и 2 больше, чем —1, —3); следовательно, оптимальные стратегии единственны и оказываются смешанными (ср. с полученными выше результатами). В этом случае использованные ранее формулы приводят к значению

$$v' = -\frac{1}{7}$$

и к оптимальным стратегиям

$$\vec{\xi} = \left\{\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right\}, \quad \vec{\eta} = \left\{\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right\}.$$

Таблица 9

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | —3 |
| 2 | —1 | 1 |

Мы предоставляем читателю дать качественную интерпретацию этого результата в том же смысле, что и выше. Конструирование дальнейших примеров этого типа можно теперь осуществить без труда.

**18.4.4.**(d) В п. 18.1.2 мы видели, что рассмотренные нами различные варианты игры в «орлянку» являются простейшими примерами игр двух лиц с нулевой суммой. В силу этого обстоятельства они приобрели общую значимость, которая затем подтвердилась результатами в пп. 18.2 и 18.3: действительно, мы там обнаружили, что этот класс игр выявил уже на простейших формулах условия, при которых чередуются случаи полной и неполной определенности. В качестве дальнейшего дополнения в этом же духе мы укажем, что взаимосвязь этих игр с игрой в «орлянку» подчеркивает только один частный аспект. Другие игры, встречающиеся в совершенно ином оформлении, могут в действительности также принадлежать этому классу. Рассмотрим один пример такой игры.

Игра, которую мы сейчас рассмотрим, является эпизодом из приключений Шерлока Холмса [1, 2]).

Шерлок Холмс намерен отправиться из Лондона в Дувр и далее на континент, чтобы спастись от профессора Мориарти, который его преследует. Сев в поезд, он после отхода поезда заметил на платформе профессора Мориарти. Шерлок Холмс допускает — и предполагается, что в этом он совершенно прав, — что его противник, который увидел его, может взять специальный поезд и догнать его. Перед Шерлоком Холмсом альтернатива: или продолжать поездку в Дувр, или покинуть поезд в Кентербери,

---

[1]) Конан Дойль, Приключения Шерлока Холмса, Собр. соч., т. 2., изд-во «Правда», М., 1966, стр. 231—233.

[2]) Интересующая нас ситуация должна быть снова оценена, конечно, как пример одной из многих возможных в практической жизни конфликтных ситуаций. Она изложена, например, О. Моргенштерном в «Wirtschaftsprognosen», Vienna, 1928, стр. 98.

Автор, однако, не разделяет несколько пессимистическую точку зрения, высказанную там или в «Vollkommene Voraussicht und wirtschaftliches Gleichgewicht», *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 6 (1934).

Поэтому наше решение отвечает также на сомнения, высказанные К. Менгером в статье «Neuere Fortschritte in den exacten Wissenchiften. Einige neuere Fortschritte in der exacten Behandlung sozialwissenschaftlicher Problem», Vienna, 1936, стр. 117, 131.

единственной промежуточной станции. Его противник, который, как предполагается, достаточно умен, чтобы представить себе такие возможности, стоит перед тем же самым выбором. Оба противника должны выбрать место выхода из поезда, не зная о соответствующем решении, принимаемом каждым из них. Если в результате принятия решений они окажутся в конце концов на одной и той же платформе, то Шерлок Холмс может с достоверностью считать себя убитым Мориарти. Если Шерлок Холмс благополучно достигнет Дувра, то он может считать себя спасенным.

Каковы оптимальные стратегии, в частности, для Шерлока Холмса? Эта игра имеет, очевидно, определенное сходство с игрой в «орлянку»; профессора Мориарти можно принять за того игрока, который стремится угадать. Назовем его игроком 1, а Шерлока Холмса — игроком 2. Обозначим выбор выхода в Дувре через 1, а выбор выхода на промежуточной станции через 2. (Это относится как к $\tau_1$, так и к $\tau_2$.)

Рассмотрим теперь матрицу $\mathscr{H}$ в табл. 7. Клетки (1, 1) и (2, 2) соответствуют поимке профессором Мориарти Шерлока Холмса. Элементы матрицы, соответствующие этим выборам, должны быть, по вполне понятным причинам, очень большими, например 100. Клетка (2, 1) означает, что Шерлок Холмс благополучно попадает в Дувр, в то время как Мориарти останавливается в Кентербери. Это — поражение Мориарти; поскольку оно касается обоих соперников, этой ситуации должно соответствовать в матрице большое по абсолютной величине отрицательное число, но меньшее, чем упомянутое выше положительное число. Пусть, например, это отрицательное число есть —50. Клетка (1, 2) означает, что Шерлок Холмс ускользает от Мориарти на промежуточной станции, но не попадает на континент. Это лучше всего назвать ничьей и соответствующему элементу матрицы приписать значение 0.

Таблица 10

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 100 | 0 |
| 2 | —50 | 100 |

Матрица $\mathscr{H}$ изображена в табл. 10.

Как в рассмотренных ранее примерах (b) и (c), диагонали отделены (100 больше, чем 0 и чем — 50); следовательно, оптимальные стратегии снова единственны и являются смешанными. Использованные выше формулы дают значение (для Мориарти) игры

$$v' = 40$$

и оптимальные стратегии ($\vec{\xi}$ для Мориарти, $\vec{\eta}$ для Шерлока Холмса):

$$\vec{\xi} = \left\{\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right\}, \quad \vec{\eta} = \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}.$$

Таким образом, Мориарти должен с вероятностью 60% ехать в Дувр, в то время как Шерлок Холмс должен с вероятностью 60% сойти на промежуточной станции; оставшиеся 40% соответствуют в каждом случае другой возможности.

Замечание. В рассказе Конан Дойль, естественно, не рассматривает смешанные стратегии и вместо этого описывает фактическое развитие событий. Поэтому Шерлок Холмс выходит на промежуточной станции и победоносно провожает взглядом специальный поезд Мориарти, проследовавший в Дувр. Решение Конан Дойля является наилучшим при его ограничениях (только чистые стратегии), поскольку он предписал каждому сопернику то поведение, которое, как мы нашли, является наиболее

вероятным (т. е. он заменяет вероятность в 60% на достоверность). Это, однако, порождает некоторое заблуждение, будто этот процесс приводит к полной победе Шерлока Холмса, тогда как шансы (т. е. значение партии), как мы уже видели, благоприятствуют Мориарти. Из нашего результата для $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ вытекает, что Шерлок Холмс был уже с вероятностью 48% мертв, когда его поезд отошел от вокзала Виктории. См. в связи с этим высказывание в цитированной выше книге Моргенштерна (стр. 98) о том, что вся поездка была ненужной, поскольку проигрывающего можно определить с самого начала.

## 18.5. Рассмотрение несколько более сложных игр

**18.5.1.** Полученное в п. 17.8 общее решение игры двух лиц с нулевой суммой вводит определенные альтернативы и понятия, в частности наличия или отсутствия полной определенности, значения партии $v'$ и множеств оптимальных стратегий $\overline{A}$, $\overline{B}$. Для всех этих понятий мы получили в п. 18.2 достаточно простые явные характеристики и определения. Они оказались пригодными даже в п. 18.3 при переформулировке всех результатов.

Эта простота может привести даже к некоторым недоразумениям. Действительно, результаты в пп. 18.2 и 18.3 получены с помощью непосредственных и притом вполне элементарных вычислений. Комбинаторные критерии полной определенности (18.А), (18.С) в п. 18.3, по крайней мере в их окончательном виде, были также значительно более прямолинейными по сравнению с встречавшимися ранее. Это может вызвать сомнение в необходимости привлекать рассмотрения из п. 17.8 (и соответствующие результаты из п. 14.5 для случая полной определенности), особенно потому, что они основаны на математической теореме в п. 17.6, для которой был необходим анализ линейности и выпуклости в § 16. Если бы все это можно было заменить на рассуждения в стиле пп. 18.2, 18.3, то наши рассмотрения в §§ 16 и 17 были бы совершенно необоснованными [1]).

Но это не так. Как указывалось в конце п. 18.3, чрезвычайная простота процедур и результатов в пп. 18.2 и 18.3 является следствием того факта, что они приложимы только к очень простым играм двух лиц с нулевой суммой, именно к играм типа «орлянки», для которых $\beta_1 = \beta_2 = 2$. По-видимому, для общего случая более абстрактные построения из §§ 16 и 17 пока представляются необходимыми.

Для того чтобы правильно понять взаимосвязь этих вещей, мы на нескольких примерах покажем, что для больших значений $\beta$ утверждения из пп. 18.2, 18.3 уже не имеют места.

**18.5.2.** Для наших целей достаточно рассмотреть игры с $\beta_1 = \beta_2 = 3$. По существу они будут несколько напоминать игру в «орлянку» — бо́льшая общность получена только за счет введения третьей альтернативы.

Таким образом, оба игрока имеют альтернативы (т. е. значения для $\tau_1$, $\tau_2$) 1, 2, 3. Для читателя лучше всего подразумевать под выбором 1 «решетку», под выбором 2 —«герб» и под выбором 3 что-нибудь вроде «безымянный». Снова пытается угадать игрок 1. Если у одного из игроков «безымянный», то не имеет значения, что у другого — «герб» или «решетка»; существенно лишь одно: у другого тоже «безымянный» или же у него одна из первых двух возможностей.

Поэтому в данной игре матрица будет иметь вид, представленный в табл. 11.

[1]) Конечно, они не утратили бы строгости, но было бы совершенно необоснованным использование сложного математического аппарата для элементарной задачи.

Четыре первых элемента матрицы (т. е. первые два элемента в первых двух строках) соответствуют уже знакомому примеру игры в «орлянку» (см. табл. 2). Два элемента, равные $\alpha$, соответствуют случаю, когда игрок 1 выбирает «безымянный» и выбор игрока 2 не совпадает с выбором игрока 1. Два элемента, равные $\gamma$, соответствуют противоположной ситуации. Элемент, равный $\beta$, соответствует случаю, когда оба игрока выбирают «безымянный». Придавая соответствующие значения (положительное, отрицательное или нуль), мы можем каждой из этих ситуаций поставить в соответствие премию или штраф или же сделать ее безразличной.

Таблица 11

| $\tau_1 \backslash \tau_2$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | −1 | $\gamma$ |
| 2 | −1 | 1 | $\gamma$ |
| 3 | $\alpha$ | $\alpha$ | $\beta$ |

Мы получим все эти примеры, когда они нам понадобятся, конкретизируя нашу схему, т. е. выбирая соответствующим образом указанные выше $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

**18.5.3.** Наша задача состоит в том, чтобы показать, что ни один из результатов (18:A), (16:B), (18:C), вообще говоря, не верен.

По поводу (18:A). Этот критерий полной определенности относится к частному случаю $\beta_1 = \beta_2 = 2$. Для бо́льших значений $\beta_1$, $\beta_2$ две диагонали даже не будут исчерпывать матрицы, и, следовательно, положение дел только на диагоналях не может быть такой же характеристикой, как это было выше.

По поводу (18:B). Приведем пример игры, которая не является вполне определенной, но в которой тем не менее существует оптимальная стратегия одного из игроков, являющаяся чистой (конечно, для другого игрока это уже не так). Кроме того, особенность этого примера состоит в том, что у одного из игроков имеется несколько оптимальных стратегий, в то время как у другого — только одна.

Таблица 12

| $\tau_1 \backslash \tau_2$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | −1 | 0 |
| 2 | −1 | 1 | 0 |
| 3 | $\alpha$ | $\alpha$ | $-\delta$ |

Возьмем для игры, описываемой табл. 11, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ из табл. 12. Здесь $\alpha > 0$, $\delta > 0$. Для себя читатель определит, какие комбинации выбора «безымянный» соответствуют выигрышу или штрафу в указанном выше смысле.

Проанализируем эту игру, используя критерии из п. 17.8.

Для $\vec{\xi} = \{^1/_2,\ ^1/_2,\ 0\}$ всегда $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = 0$, т. е. при этой стратегии игрок 1 не может ничего потерять. Следовательно, $v' \geqq 0$. Для $\vec{\eta} = \vec{\delta}^3 = \{0, 0, 1\}$ всегда $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \leqq 0$[1], так что при этой стратегии не может ничего потерять игрок 2. Следовательно, $v' \leqq 0$. Таким образом, имеем

$$v' = 0.$$

Поэтому $\vec{\xi}$ является оптимальной стратегией в том и только том случае, когда $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \geqq 0$, а $\vec{\eta}$ является оптимальной стратегией в том и только

[1]) Действительно, в данном случае $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = -\delta\xi_3$.

том случае, когда [1]) $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \leq 0$. Легко видеть, что первое справедливо тогда и только тогда, когда

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{2}, \qquad \xi_3 = 0,$$

а второе — тогда и только тогда, когда

$$\eta_1 = \eta_2 \leq \frac{\delta}{2(\alpha+\delta)}, \qquad \eta_3 = 1 - 2\eta_1.$$

Таким образом, множество $\overline{A}$ оптимальных стратегий $\vec{\xi}$ состоит ровно из одного элемента, и этот элемент не является чистой стратегией. В то же время множество $\overline{B}$ оптимальных стратегий $\vec{\eta}$ содержит бесконечно много стратегий, одна из которых является чистой, именно $\vec{\eta} = \vec{\delta}^3 = \{0, 0, 1\}$.

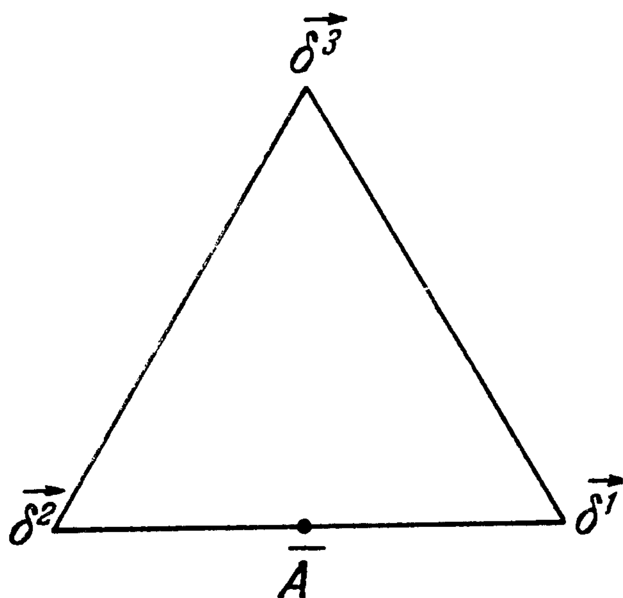



Рис. 22.

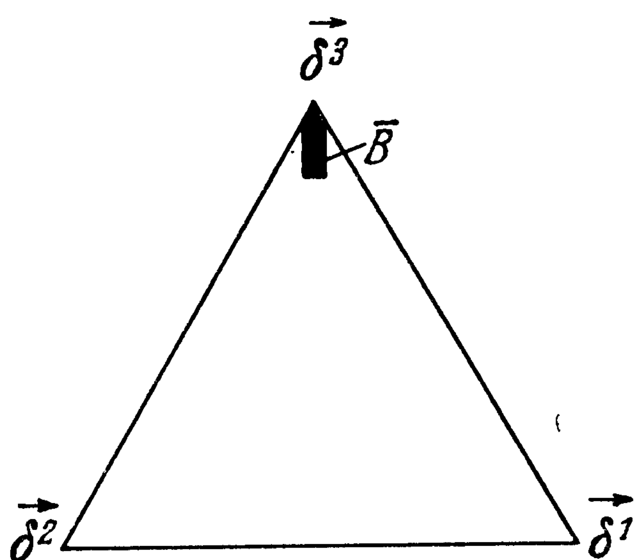



Рис. 23.

Множества $\overline{A}$ и $\overline{B}$ можно представить графически, используя графическое представление по аналогии с рис. 16 (см. рис. 22, 23).

По поводу (18:C). Приведем пример вполне определенной игры, в которой никакие две строки, а также никакие два столбца не доминируют друг друга. Фактически мы сделаем даже несколько больше.

**18.5.4.** Предположим пока, что числа $\beta_1$, $\beta_2$ произвольны. Сущность доминирования строк и столбцов была рассмотрена в конце п. 18.3. Как было показано, это означает, что у одного из игроков имеется простой и непосредственный повод отказаться от одной из своих возможностей ради другой, — и это сужает возможности в направлении, приводящем в конечном счете к полной определенности.

В частности, если строка $\tau_1''$ доминируется строкой $\tau_1'$, т. е. если $\mathcal{K}(\tau_1'', \tau_2) \leq \mathcal{K}(\tau_1', \tau_2)$ для всех $\tau_2$, то игроку 1 можно не рассматривать выбор $\tau_1''$, поскольку при любых обстоятельствах выбор $\tau_1'$ не хуже выбора $\tau_1''$. Если столбец $\tau_2''$ доминирует столбец $\tau_2'$, т. е. если $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2'') \geq \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2')$ для всех $\tau_1$, то игроку 2 можно не рассматривать выбор $\tau_2''$, поскольку при любых обстоятельствах выбор $\tau_1'$ для него не хуже выбора $\tau_2''$. (См. приведенное выше, в частности сноску 2 на стр. 197. Это рассмотрение, конечно, является чисто эвристическим, см. замечание на стр. 204.)

Теперь мы можем использовать более общее положение. Если строка $\tau_1''$ (т. е. чистая стратегия игрока 1, соответствующая строке $\tau_1''$) доминируется линейной комбинацией оставшихся строк $\tau_1' \neq \tau_1''$ (т. е. смешанной стратегией $\vec{\xi}$, в которой компонента $\xi_{\tau_1''} = 0$), то правдоподобно

[1]) Читателю предоставляется дать простую словесную интерпретацию этих утверждений.

предположить, что игроку 1 можно не рассматривать выбор $\tau_1''$, поскольку другие $\tau_1'$ при любых обстоятельствах будут не хуже.

Математически эта ситуация выражается так:

$$(18{:}14{:}a)\qquad \begin{cases} \mathscr{K}(\tau_1'', \tau_2) \leqq \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\,\xi_{\tau_1} \text{ для всех } \tau_2, \\ \vec{\xi} \in S_{\beta_1},\ \xi_{\tau_1''} = 0. \end{cases}$$

Для игрока 2 аналогичное положение дел возникает в том случае, когда столбец $\tau_2''$ (т. е. чистая стратегия игрока 2, соответствующая $\tau_2''$) доминирует линейную комбинацию оставшихся столбцов $\tau_2' \neq \tau_2''$ (т. е. смешанную стратегию $\vec{\eta}$ с компонентой $\eta_{\tau_2''} = 0$). Математически эта ситуация выражается так:

$$(18{:}14{:}b)\qquad \begin{cases} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2'') \geqq \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathscr{K}(\tau_1, \tau_2)\,\eta_{\tau_2} \text{ для всех } \tau_1, \\ \vec{\eta} \in S_{\beta_2},\ \eta_{\tau_2''} = 0. \end{cases}$$

Эти утверждения аналогичны приведенным выше.

Таким образом, игра, в которой имеют место (18:14:a) или (18:14:b), позволяет для одного из игроков быстро и естественно ограничить возможность выбора.

Замечание. Это, конечно, чисто эвристическая аргументация. Мы в ней и не нуждаемся, поскольку в нашем распоряжении имеется полное рассмотрение, проведенное в пп. 14.5 и 17.8. Однако может возникнуть иллюзия, что это рассуждение может заменить или по крайней мере упростить эти строгие доказательства. Пример, который мы собираемся привести в этом тексте, по-видимому, разбивает такие надежды.

Существует и другой путь, позволяющий получить эти результаты. Если имеет место (18:14:a) или (18:14:b), то комбинация этого с результатами из п. 17.8 может быть использована для получения информации о множествах оптимальных стратегий $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Здесь мы не собираемся этим заниматься.

**18.5.5.** Покажем теперь, что возможности применения утверждений (18:14:a) и (18:14:b) весьма ограничены. Мы построим вполне определенную игру, для которой не справедливо ни (18.14:a), ни (18:14:b).

Таблица 13

| $\tau_1 \backslash \tau_2$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | −1 | $-\alpha$ |
| 2 | −1 | 1 | $-\alpha$ |
| 3 | $\alpha$ | $\alpha$ | 0 |

Для этого вернемся к рассмотрению класса игр с матрицей, изображенной в табл. 11 ($\beta_1 = \beta_2 = 3$). Положим $0 < \alpha < 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -\alpha$ (см. табл. 13). Читатель может сам определить, какая комбинация выбора «безымянный» соответствует выигрышу или штрафу в указанном выше смысле.

Обсудим эту игру. Элемент (3, 3) является, очевидно, седловой точкой; поэтому игра вполне определенная и

$$v = v' = 0.$$

Нетрудно показать теперь (привлекая метод, использованный в п. 18.5.3), что как множество $\overline{A}$ всех оптимальных стратегий $\vec{\xi}$, так и множество $\overline{B}$ всех оптимальных стратегий $\vec{\eta}$ содержат ровно по одному элементу: чистую стратегию $\vec{\delta}^3 = \{0,\ 0,\ 1\}$.

С другой стороны, у читателя не вызовет затруднения проверка того, что здесь не имеют места ни (18:14:a) ни (18:14:b), т. е. что в матрице на табл. 13 ни одна из строк не доминируется линейной комбинацией двух других и ни один столбец не доминирует линейную комбинацию двух других.

### 18.6. Случай и неполная информация

**18.6.1.** Рассмотренные в предыдущих пунктах примеры прояснили тот факт, что роль случая — более точно, вероятности — в игре не всегда очевидна, поскольку она не вытекает непосредственно из правил игры. Правила игр с матрицами табл. 7 и табл. 11 никак не предусматривают случай: все без исключения ходы делаются игроками [1]). Тем не менее мы обнаружили, что большинство из этих игр не является вполне определенным, т. е. оптимальные стратегии в них являются смешанными стратегиями, включающими явное использование вероятностей.

С другой стороны, анализ игр с полной информацией показал, что эти игры всегда вполне определены, т. е. что игроки в них имеют оптимальные стратегии, которые являются чистыми стратегиями, и совсем не включают вероятность (см. § 15).

Таким образом, с точки зрения поведения игроков, т. е. с точки зрения используемых ими стратегий, существенно, является ли игра вполне определенной или нет, но несущественно, содержит ли она какие-либо случайные ходы.

Результаты § 15, относящиеся к играм, в которых имеется полная информация, показывают, что существует тесная связь между полной определенностью и правилами, которые регулируют информацию игроков. Для того чтобы сделать это совершенно ясным и, в частности, показать, что наличие случайных ходов несущественно, мы установим сейчас следующее. В каждой игре двух лиц с нулевой суммой любой случайный ход можно так заменить комбинацией личных ходов, что стратегические возможности игры не изменятся. Это будет необходимо допустить для правил, включающих неполную информацию игроков, но это является именно тем, что мы хотим сейчас показать: неполная информация включает (среди другого) все возможные последствия явных случайных ходов [2]).

**18.6.2.** Итак, рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой Г и в ней случайный ход $\mathscr{M}_\varkappa$ [3]). Перенумеруем, как обычно, все альтернативы $\sigma_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$ и примем, что их вероятности $p_\varkappa^{(1)}, \ldots, p_\varkappa^{(\alpha_\varkappa)}$ равны

---

[1]) Приведение всех игр к нормальной форме показывает даже большее. Каждая игра эквивалентна игре без случайных ходов, поскольку нормальная форма имеет дело только с личными ходами.

[2]) Прямой путь устранения случайных ходов состоит, конечно, во введении (чистых) стратегий и выбора посредника, как это описано в п. 11.1. Действительно, в п. 11.2.3 на последнем шаге приведения игры к нормальной форме мы исключили оставшиеся случайные ходы путем явного введения ожидаемых значений.

Сейчас, однако, мы предлагаем исключить случайные ходы, не разрушая столь радикально структуру игры. Мы заменим каждый случайный ход личными ходами (именно двумя ходами, как это будет показано) таким образом, что их роли при определении стратегий игроков будут всегда дифференцированы и индивидуальны. По-видимому, это детальное рассмотрение сделает более ясной структуру исследуемых вопросов, чем упомянутая выше краткая процедура.

[3]) Для нас сейчас безразлично, зависят или нет характеристики $\mathscr{M}_\varkappa$ от предыдущего развития партии.

$1/\alpha_\varkappa$ [1]). Заменим теперь $\mathcal{M}_\varkappa$ на два личных хода $\mathcal{M}'_\varkappa$, $\mathcal{M}''_\varkappa$ соответственно игроков 1 и 2. Пусть каждый из них имеет $\alpha_\varkappa$ альтернатив; соответствующие выборы обозначим через $\sigma'_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$ и $\sigma''_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$. Последовательность этих ходов безразлична, но мы потребуем, чтобы они производились без всякой информации относительно результатов каких бы то ни было ходов (в том числе и относительно другого хода $\mathcal{M}'_\varkappa$, $\mathcal{M}''_\varkappa$). Зададим функцию $\delta(\sigma', \sigma'')$ с помощью матричной схемы (см. табл. 14; $\delta(\sigma', \sigma'')$ — элемент матрицы [2])). Влияние $\mathcal{M}'_\varkappa$, $\mathcal{M}''_\varkappa$, т. е. влияние соответствующих личных выборов $\sigma'_\varkappa$, $\sigma''_\varkappa$, на исход игры точно такое же, как и $\mathcal{M}_\varkappa$ с соответствующим (случайным) выбором $\sigma_\varkappa = \delta(\sigma'_\varkappa, \sigma''_\varkappa)$. Обозначим эту новую игру через $\Gamma^*$. Мы утверждаем, что стратегические возможности игры $\Gamma^*$ совпадают со стратегическими возможностями игры $\Gamma$.

Таблица 14

| $\sigma'$ \ $\sigma''$ | 1 | 2 | ... | $\alpha_\varkappa-1$ | $\alpha_\varkappa$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\alpha_\varkappa$ | ... | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | ... | 4 | 3 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $\alpha_\varkappa-1$ | $\alpha_\varkappa-1$ | $\alpha_\varkappa-2$ | ... | 1 | $\alpha_\varkappa$ |
| $\alpha_\varkappa$ | $\alpha_\varkappa$ | $\alpha_\varkappa-1$ | ... | 2 | 1 |

**18.6.3.** Действительно, пусть игрок 1 в игре $\Gamma^*$ использует данную смешанную стратегию из игры $\Gamma$ с последующим уточнением относительно хода $\mathcal{M}'_\varkappa$ [3]), для того чтобы выбрать все $\sigma'_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$ с одними и теми же вероятностями $1/\alpha_\varkappa$. Тогда эта игра $\Gamma^*$ — с этой стратегией игрока 1 — будет, с точки зрения игрока 2, совпадать с игрой $\Gamma$. Это объясняется

[1]) Это не приводит к потере общности. Для того чтобы убедиться в этом, предположим, что интересующие нас вероятности суть произвольные рациональные дроби, например $r_1/t, \ldots, r_{\alpha_\varkappa}/t$ (числа $r_1, \ldots, r_{\alpha_\varkappa}$ и $t$ — целые). (Это действительно ограничение, но несущественное, поскольку любые вероятности можно с любой точностью аппроксимировать рациональными дробями.)

Теперь модифицируем случайный ход $\mathcal{M}_\varkappa$ так, что он будет иметь $r_1 + r_2 + \ldots + r_{\alpha_\varkappa} = t$ альтернатив (вместо $\alpha_\varkappa$), обозначаемых через $\sigma'_\varkappa = 1, \ldots, t$ (вместо $\sigma_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$), таким образом, каждое из первых $r_1$ значений $\sigma'_\varkappa$ влияет на игру точно так же, как и $\sigma_\varkappa = 1$, каждое из следующих $r_2$ значений $\sigma'_\varkappa$ — как $\sigma_\varkappa = 2$ и т. д. Поэтому все $\sigma'_\varkappa = 1, \ldots, t$ с равными вероятностями $1/t$ оказывают точно такой же эффект, как и $\sigma_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$ с исходными вероятностями $r_1/t, \ldots, r_{\alpha_\varkappa}/t$.

[2]) Арифметически

$$\delta(\sigma', \sigma'') = \begin{cases} \sigma' - \sigma'' + 1 & \text{для } \sigma' \geqq \sigma'', \\ \sigma' - \sigma'' + 1 + \alpha_\varkappa & \text{для } \sigma' < \sigma''. \end{cases}$$

Следовательно, $\delta(\sigma', \sigma'')$ всегда будет одним из чисел $1, \ldots, \alpha_\varkappa$.

[3]) $\mathcal{M}'_\varkappa$ — его личный ход, поэтому его стратегия в $\Gamma^*$ должна иметь в виду этот ход. Это было не нужно в условиях игры $\Gamma$, поскольку там $\mathcal{M}_\varkappa$ был случайным ходом.

тем, что любой выбор игрока 2 при $\mathscr{M}''_\varkappa$ (т. е. любое $\sigma''_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$) даст тот же самый результат, что и исходный случайный ход $\mathscr{M}_\varkappa$. Взглянув на табл. 14, мы увидим, что столбец $\sigma'' = \sigma''_\varkappa$ этой матрицы содержит каждое из чисел $\sigma = \delta(\sigma', \sigma'') = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$ ровно один раз, т. е. что функция $\delta(\sigma', \sigma'')$ принимает значения $1, \ldots, \alpha_\varkappa$ (стратегии игрока 1) с равными вероятностями $1/\alpha_\varkappa$ точно так же, как это сделал бы ход $\mathscr{M}_\varkappa$. Таким образом, с точки зрения игрока 1, игра Г* не хуже игры Г. Те же самые доводы, если при этом поменять ролями игроков 1 и 2, т. е. если поменять ролями строки и столбцы в матрице на табл. 14, показывают, что, с точки зрения игрока 2, игра Г* также не хуже игры Г.

Поскольку точки зрения двух игроков противоположны, это означает, что игры Г и Г* эквивалентны [1]).

### 18.7. Интерпретация этого результата

**18.7.1.** Последовательное применение ко всем случайным ходам игры Г операций, описанных в пп. 18.6.2, 18.6.3, позволит избавиться от них; тем самым заключительное утверждение из п. 18.6.1 доказано. Для того чтобы лучше понять сущность этого результата, приведем несколько практических примеров, иллюстрирующих это преобразование.

(A) Рассмотрим следующую совсем элементарную «игру случая». Два игрока при помощи случайного устройства с распределением 50% на 50% решают, кто платит другому одну единицу. Применение схемы из пп. 18.6.2 и 18.6.3 преобразует эту игру, состоящую ровно из одного случайного хода, в игру с двумя личными ходами. Взглянув на матрицу табл. 14 при $\alpha_\varkappa = 2$, мы придем к выводу, что она совпадает с матрицей табл. 2, если значения $\delta(\sigma', \sigma'')$, равные 1, 2, заменить на фактические выигрыши. Вспоминая пп. 14.7.2, 14.7.3, мы видим (ход рассуждений достаточно прозрачен), что наша игра является игрой в «орлянку».

Таким образом, игра в «орлянку» является естественной схемой получения вероятностей 1/2, 1/2 в случае личных ходов и неполной информации. (Вспомним п. 17.1!)

(B) Модифицируем пример (A) так, чтобы допустить возможность «ничьей». Два игрока с помощью случайного устройства, дающего исходы с вероятностями $33\frac{1}{3}$%, $33\frac{1}{3}$%, $33\frac{1}{3}$%, решают, кто будет платить другому одну единицу или же никто никому совсем ничего не заплатит. Снова применяем схему из пп. 18.6.2, 18.6.3. Теперь матрица табл. 14 с $\alpha_\varkappa = 3$ совпадает с матрицей табл. 3 после замены в ней значений 1, 2, 3, принимаемых функцией $\delta(\sigma', \sigma'')$, на фактические выигрыши 0, 1, —1. Воспользовавшись пп. 14.7.2, 14.7.3, мы видим, что это есть игра «камень, мешок и ножницы».

Таким образом, игра «камень, мешок и ножницы» является естественной схемой получения вероятностей 1/3, 1/3, 1/3 в случае личных ходов и неполной информации. (Вспомним п. 17.4!)

**18.7.2.** (C) Функцию $\delta(\sigma', \sigma'')$ в табл. 14 можно заменить другой функцией, и даже области $\sigma'_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$ и $\sigma''_\varkappa = 1, \ldots, \alpha_\varkappa$ можно заменить на другие области $\sigma'_\varkappa = 1, \ldots, \alpha'_\varkappa$ и $\sigma''_\varkappa = 1, \ldots, \alpha''_\varkappa$, лишь бы было

---

[1]) Мы предоставляем читателю привести эти рассуждения в соответствие с точными формализованными рассуждениями в § 11 и пп. 17.2, 17.8. Это не представляет затруднений, но несколько длинно. Мы надеемся, что проведенные выше неформальные аргументы подчеркивают существенные особенности рассматриваемого явления более простым и ясным путем.

выполнено следующее условие. Каждый столбец матрицы табл. 14 содержит каждое число 1, . . ., $\alpha_\varkappa$ одно и то же число раз [1]), и каждая строка содержит каждое из чисел 1, . . ., $\alpha_\varkappa$ одно и то же число раз [2]). Действительно, в рассуждениях в п. 18.6.2 использовались только эти два свойства функции $\delta(\sigma'_\varkappa, \sigma''_\varkappa)$ (и $\alpha'_\varkappa$, $\alpha''_\varkappa$).

Нетрудно видеть, что предосторожность, заключающаяся в «подснятии» колоды карт перед сдачей, попадает в эту категорию. Когда одна из 52 карт должна быть выбрана случайным образом с вероятностью 1/52, это обычно обеспечивается тасованием колоды. В этом и заключается случайность хода, но если игрок, тасующий колоду, шулер, то он может «передернуть», что и будет его «личным» ходом. Для защиты от этого другому игроку разрешается указать в перетасованной колоде место, с которого рассматриваемая колода должна быть «подснята». Эта комбинация двух ходов — даже если они личные — эквивалентна случайному ходу, который имелся в виду первоначально. Отсутствие информации, конечно, является необходимым условием эффективности этой схемы.

Здесь $\alpha_\varkappa = 52$, $\alpha'_\varkappa = 52!$ равно числу возможных расположений карт в колоде, $\alpha''_\varkappa = 52$ — количество способов «подснятия». Мы предоставляем читателю возможность самостоятельно восстановить детали и выбрать в этой ситуации $\delta(\sigma'_\varkappa, \sigma''_\varkappa)$ [3]).

## § 19. ПОКЕР И БЛЕФ

### 19.1. Описание покера

**19.1.1.** Неоднократно подчеркивалось, что случай $\beta_1 = \beta_2 = 2$, рассмотренный в п. 18.3 и более детально в п. 18.4, охватывает лишь самые простые игры двух лиц с нулевой суммой. Затем в п. 18.5 мы привели несколько более сложных примеров, возникающих при рассмотрении общего случая игры двух лиц с нулевой суммой, но для лучшего понимания наших общих результатов целесообразно, по-видимому, обсудить детально еще одну частную игру более сложного типа. Это тем более желательно, что для игр с $\beta_1 = \beta_2 = 2$ выборы $\tau_1$, $\tau_2$, называемые (чистыми) стратегиями, едва ли заслуживают это имя: естественнее было бы называть их «ходами». Действительно, в этих чрезвычайно простых играх вряд ли могло бы проявиться какое-либо различие между позиционной и нормальной формами, и поэтому тождественность ходов и стратегий (характеризующих игру в нормальной форме), в этих играх не пропадает. Мы будем теперь рассматривать игру в позиционной форме, в которой игрок имеет несколько ходов, так что переход к нормальной форме и к стратегиям станет уже достаточно содержательной операцией.

**19.1.2.** Игра, которую мы собираемся рассмотреть,— это покер.

Замечание. Рассмотрение в общем виде вопросов, связанных с покером, и математическое обсуждение вариантов осуществлено Дж. фон Нейманом в 1926—28 гг., но до сих пор не опубликовано. Этот круг вопросов освещен в последующих пунктах (см. общее упоминание в «Zur Theorie der Gesellschaftsspiele», *Math. Ann.*, **100** (1928)). Это относится, в частности, к симметричному варианту в пп. 19.4—19.10, к вариантам

---

[1]) Именно $\alpha'_\varkappa/\alpha_\varkappa$ раз; поэтому $\alpha'_\varkappa$ должно делиться на $\alpha_\varkappa$.

[2]) Именно $\alpha''_\varkappa/\alpha_\varkappa$ раз; поэтому $\alpha''_\varkappa$ должно делиться на $\alpha_\varkappa$.

[3]) Мы предполагаем, что тасование используется для последующего выбора только одной карты. Если сдается более одной карты, то «подснятие» не будет абсолютно надежным средством. Шулер может подтасовать колоду таким образом, что одно «подснятие» не расстроит его планы и информация о такой колоде даст шулеру незаконное преимущество.

(A) и (B) из пп. 19.11—19.13 и ко всей интерпретации блефа, который преобладает во всех этих обсуждениях. Несимметричный вариант (C) из пп. 19.14—19.16 рассматривался в 1942 г. специально для этой книги. В работе Э. Бореля и Ж. Вилля, упомянутой в замечании на стр. 177, также рассматривается покер (Vol. IV, «Applications aux Jeux de Hasard», Chap. V: «Le Jeu de Poker»). Эти работы очень поучительны, но основное внимание уделено в них оценке вероятностей применительно к покеру. Эта оценка произведена более или менее эвристическим путем без систематического использования каких бы то ни было основ общей теории игр.

Чисто стратегическая разновидность покера («La Relance» — «повышение») анализируется на стр. 91—97 упомянутой работы. Ее можно рассматривать также как упрощенный вариант покера, подобный двум вариантам, рассмотренным в пп. 19.4—19.10 и пп. 19.14—19.16. В действительности он тесно связан с последним.

Читателю, который захочет сравнить эти два варианта, будут полезны следующие указания:

(I) Наши «ставки» $a$, $b$ соответствуют $1+\alpha$, 1 из указанной работы.

(II) Различие между нашим вариантом из пп. 19.4—19.10 и вариантом Бореля и Вилля состоит в следующем. Если игрок 1 начинает с низкой ставки, то наш вариант приводит к сравниванию карт, в то время как в упомянутом варианте игрок безусловно теряет низкую ставку. Это значит, что мы трактуем начальную низкую ставку как «уравнивание» (см. обсуждение в начале п. 19.14 и, в частности, сноску 1 на стр. 233), в то время как в указанном варианте это трактуется как пасование. Мы считаем, что наша трактовка лучше описывает эту фазу реального покера и, в частности, это необходимо для правильного анализа и интерпретации блефа. По поводу технических деталей см. сноску 1 на стр. 240.

Настоящий покер является слишком сложной игрой и не поддается исчерпывающему анализу; поэтому нам придется ограничиться некоторыми упрощенными модификациями, при этом некоторые из упрощений действительно весьма существенны [1]). Тем не менее основная идея покера и свойства его решений в нашей упрощенной форме, по-видимому, сохраняются. Поэтому окажется возможным при помощи результатов, полученных в уже разработанной теории, обосновать общие выводы и дать их интерпретацию.

Заметим, прежде всего, что в обычном покере участвует произвольное число игроков [2]); поскольку, однако, мы сейчас рассматриваем игры двух лиц с нулевой суммой, количество игроков мы примем равным двум.

Игра в покер начинается с раздачи из колоды [3]) каждому игроку по 5 карт. Возможные комбинации по пяти карт, а их всего [4]) 2 598 960, называются «раскладами». Эти расклады линейно упорядочиваются, т. е. указывается исчерпывающее правило, определяющее, какой расклад является самым старшим среди всех, какой — вторым, третьим, ... — от самого старшего к самому младшему [5]). Покер играется в различных вариантах, которые распадаются на два класса: «короткая» и «длинная» игры. В короткой игре расклад игрока, получаемый им с самого начала, остается неизменным в течение всей партии. В длинных играх у игрока имеется несколько способов изменить весь свой расклад или его часть; в некоторых вариантах игры игрок может проделывать это несколько

[1]) См., однако, п. 19.11 и конец п. 19.16.

[2]) Оптимальным (в смысле, который мы не будем пытаться интерпретировать) числом участников покера является 4 или 5.

[3]) Обычно колода состоит из 52 карт, но при небольшом числе участников используется уменьшенная колода (обычно из 32 или из 28 карт).

[4]) Это справедливо для полной колоды. Читатель, знакомый с элементами комбинаторики, заметит, что это число равно числу сочетаний из 52 по 5:

$$\binom{52}{5}=\frac{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=2\,598\,960.$$

[5]) Это описание содержит такие общеизвестные технические термины, как «флеш рояль», «стрит», «каре на королях», «фул» и т. п. Здесь мы не собираемся обсуждать эту терминологию.

раз в течение одной партии. Поскольку мы намерены обсудить простейшую форму покера, мы ограничимся рассмотрением короткой игры.

В этом случае несущественно различие раскладов как таковых, т. е. как комбинаций карт. Обозначим через $S$ число возможных раскладов (для случая полной колоды, как отмечалось, $S = 2\,598\,960$). С таким же успехом мы могли бы говорить, что каждый игрок вместо комбинации карт получает число $s = 1, \ldots, S$. Эта идея состоит в том, что значению $s = S$ ставится в соответствие самый старший расклад, значению $s = S - 1$ — следующий за ним и т. д.; наконец, значению $s = 1$ ставится в соответствие самый младший расклад. Условие честной игры предполагает равновероятность всех возможных раскладов. Поэтому выбор числа $s$ мы должны интерпретировать как случайный ход, причем вероятность каждого из возможных значений $s = 1, \ldots, S$ равна $1/S$. Таким образом, игра начинается двумя случайными ходами [1]): извлечением числа $s$ для каждого из игроков 1 и 2. Эти числа мы обозначим через $s_1$ и $s_2$.

**19.1.3.** Следующая фаза покера в общем случае состоит в том, что игроки «ставят». Смысл этого состоит в том, что после ставки одного из игроков, которая состоит из некоторой суммы денег, другой игрок имеет возможность пасовать, раскрыться или повысить. Если игрок пасует, то это означает, что он согласен заплатить без каких бы то ни было условий определенную сумму из своей предыдущей ставки (которая необходимо должна быть меньше, чем последняя ставка). В этом случае несущественно, какие расклады имеют игроки. Эти расклады даже не раскрываются. Раскрытие приводит к тому, что расклады сравниваются и игрок со старшим раскладом получает сумму в размере последней ставки. Повышение означает, что партнер заменяет последнюю ставку на бóльшую и игроки меняются ролями, т. е. игрок, ранее объявивший ставку, сам выбирает между пасом, раскрытием и повышением [2]).

## 19.2. Блеф

**19.2.1.** Существо игры состоит в том, что игрок с достаточно хорошим раскладом, поскольку у него достаточно оснований надеяться на выигрыш, склонен к назначению большой ставки и к многочисленным повышениям. Поэтому противник игрока, назначившего большую ставку или повысившего, может на основании увиденного предположить, что у его партнера хороший расклад. Это может побудить его к пасованию. Однако, поскольку в случае паса расклады не сравниваются, даже игрок с младшим раскладом может в этом случае выиграть у противника с более высоким раскладом, создав (обманчивое) впечатление старшего расклада при помощи высокой ставки или повышения, побуждая, таким образом, своего партнера пасовать.

Такой прием называется «блефом». Все опытные игроки несомненно пользуются этим приемом. Можно оспаривать реальность той мотивировки блефа, которую мы привели. Однако он допускает и иную интерпретацию. Именно если известно, что данный игрок назначает высокую ставку только в том случае, когда у него хорошие карты, то в таких случаях его партнеру

---

[1]) Фактически в покере второй игрок получает свой расклад из колоды, из которой уже извлечен расклад первого игрока. Мы не будем учитывать этого, точно так же как мы не учитываем и ряд других несущественных усложнений покера.

[2]) Обычно эта схема усложняется необходимостью сначала сделать безусловные платежи, «начальные ставки» — в некоторых вариантах для первого повышающего игрока, в других же — для всех желающих принять участие в игре; кроме того, в некоторых вариантах требуются дополнительные платежи за право преимущественного выбора и т. д. Все это мы не рассматриваем.

естественно пасовать. Поэтому этот игрок не сможет добиться высоких ставок или многочисленных повышений даже в тех случаях, когда имеющийся у него высокий расклад обеспечивает ему при этом выигрыш. Следовательно, в его интересах создать неопределенность в мнении своего партнера относительно таких возможностей. Это значит, что он стремится заставить партнера поверить в то, что он иногда назначает высокую ставку и при слабых картах.

Подведем итоги. Можно указать два возможных основания для «блефа». Во-первых, желание создать (обманчивое) впечатление высокого расклада при (фактическом) низком и, во-вторых, желание создать (обманчивое) впечатление низкого расклада при (фактическом) высоком. Оба эти случая являются примерами подмены фактической информации на противоположную (см. п. 6.4.3), т. е. примерами введения противника в заблуждение. Следует заметить, однако, что первый тип блефа оказывается наиболее эффективным в том случае, когда он «проходит», т. е. когда противник спасует, поскольку именно это обеспечивает получение желаемого выигрыша; наоборот, второй тип блефа оказывается наиболее эффективным тогда, когда он «не проходит», т. е. когда противник требует раскрыться, поскольку это внушает противнику искаженную информацию.

З а м е ч а н и е. Здесь нас можно было бы обвинить в забвении ранее сформулированных основных принципов. В проведенном рассуждении предполагается наличие ряда партий (так что возможно статистическое наблюдение за привычками противника); тем самым оно имеет явно выраженный динамический характер. С другой стороны, мы постоянно заявляли, что наши рассуждения должны быть применимы и к одной изолированной партии, и что они тем самым являются строго статическими.

Мы отсылаем читателя к п. 17.3, где это кажущееся противоречие тщательно исследуется. Приведенное там рассуждение полностью справедливо также и в данном случае и должно оправдать нашу процедуру. Здесь мы только добавим, что наша непоследовательность — использование многих партий и динамической терминологии — является чисто словесной. Формально мы могли бы сделать наши рассуждения более сжатыми и более близкими к способу обсуждения различных вещей в повседневной речи. Но в п. 17.3 было тщательно разобрано, каким образом все эти оспариваемые картины можно заменить на строго статическую задачу нахождения оптимальной стратегии.

**19.2.2.** Возможность такого косвенного и явно иррационального мотивирования ставок имеет еще и другое последствие. Такие ставки всегда являются рискованными, и поэтому может оказаться целесообразным сделать их еще более рискованными путем применения соответствующих контрмер. Это ограничит использование их партнером. Но такие контрмеры как таковые также являются косвенно мотивированными ходами.

Мы уделили так много внимания этим эвристическим рассуждениям потому, что в нашей точной теории все эти запутанные мотивировки могут быть разъяснены. В пп. 19.10, 19.15.3 и 19.16.2 будет показано, каким образом можно количественно оценить ситуации, возникающие в связи с блефом, и каким образом мотивы связываются с такими основными стратегическими особенностями игры, как обладание инициативой и т. д.

### 19.3. Описание покера (продолжение)

**19.3.1.** Вернемся теперь к техническим правилам покера. Для того чтобы избежать бесконечных повышений, обычно их число ограничивается [1]). Для того чтобы избежать нереально высоких ставок — с едва предвидимым иррациональным влиянием на противника,—существуют

[1]) Это и есть правило остановки из п. 7.2.3.

также ограничения на максимальные размеры ставок и повышений. Обычно накладывают также ограничения, исключающие слишком мелкие повышения; мы будем последовательно указывать, что послужило поводом для введения этих ограничений (см. конец п. 19.13). Ограничения на размер ставок и повышений мы выразим в простейшей из возможных форм. Мы будем предполагать, что заранее даны такие два числа $a$ и $b$, для которых

$$a > b > 0,$$

и что для каждой ставки имеется только две возможности: ставка может быть либо «высокой», и в этом случае она равна $a$, либо «низкой», и в этом случае она равна $b$. Меняя отношение $\frac{a}{b}$, которое, очевидно, является здесь единственным существенным соотношением, мы можем сделать игру азартной, если отношение $\frac{a}{b}$ существенно больше единицы, или относительно спокойной, если отношение $\frac{a}{b}$ лишь немного больше единицы.

Ограниченность числа ставок и повышений будет использована сейчас для упрощения всей схемы. В реальном покере один из игроков начинает с начальной ставки; затем игроки чередуют свои ходы.

Преимущества или недостатки того обстоятельства, что инициатива находится у одного из игроков, который зато должен начинать первым, сами по себе представляют интересную задачу. В пп. 19.14, 19.15 мы обсудим одну (несимметричную) разновидность покера, в которой это обстоятельство учитывается. Сначала, однако, нам не хотелось бы слишком усложнять исследуемый вопрос. Иными словами, на некоторое время нам хотелось бы избежать рассмотрения всех отклонений от симметричности, для того чтобы выявить наиболее характерные особенности покера в их наиболее чистом и простом виде. Поэтому мы будем предполагать, что начальные ставки делают оба игрока одновременно и ни один не знает о выборе другого. Только после того, как оба игрока назначат начальные ставки, они узнают, чья ставка выше или ниже.

**19.3.2.** Дальнейшее упрощение состоит в том, что игроки могут либо пасовать, либо раскрыться, т. е. исключается повышение. В самом деле, повышение является лишь более сложным и интенсивным выражением тенденции, содержащейся уже в высокой начальной ставке. Поскольку мы хотим по возможности упростить исследование, мы будем избегать рассмотрения нескольких путей проявления одной и той же тенденции. (См., однако, (C) в пп. 19.11, 19.14 и 19.15.)

В соответствии со сказанным сформулируем следующие условия. Рассмотрим момент, когда оба игрока информированы о сделанных ставках. Если при этом обе ставки оказываются либо высокими, либо низкими, то расклады сравниваются и игрок с более сильным раскладом получает от партнера соответственно $a$ или $b$. Если расклады игроков равны, то расплата не производится. Если же одна из ставок оказывается высокой, а другая низкой, то игрок с низкой ставкой может либо пасовать, либо раскрыться. Пасование означает, что он платит своему партнеру сумму в размере низкой ставки (без какого бы то ни было сравнения раскладов). «Раскрытие» означает, что он изменяет свою низкую ставку на высокую, и эта ситуация рассматривается как такая, в которой оба игрока с самого начала назначили высокие ставки.

## 19.4. Точная формулировка правил

**19.4.** Теперь мы можем подвести итоги предыдущего описания нашего упрощенного покера, точно сформулировав принятые правила.

Сначала каждый игрок в результате случайного хода получает свой расклад, являющийся числом $s = 1, \ldots, S$; каждое из этих чисел имеет одну и ту же вероятность $1/S$. Расклады игроков 1 и 2 мы обозначим соответственно через $s_1$, $s_2$.

Затем каждый игрок выбирает при своем личном ходе либо $a$, либо $b$ (высокую или низкую ставку). Каждый игрок производит выбор (ставку), ознакомившись со своим раскладом и не зная ничего ни о раскладе, ни о выборе (ставке) своего противника.

Наконец, каждому игроку становится известным выбор другого, но не его расклад. (Каждому игроку по-прежнему известны свои расклад и выбор). Если оказывается, что одна ставка высокая, а другая низкая, то игрок с низкой ставкой может либо раскрыться, либо пасовать.

Это и есть партия. По окончании партии выплаты производятся следующим образом. Если ставки обоих игроков высокие или ставка одного высокая, а ставка другого низкая, но сопровождается раскрытием, то при $s_1 \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} s_2$ игрок 2 выплачивает игроку 1 соответственно сумму $\begin{matrix}a\\0\\-a\end{matrix}$. Если ставки обоих игроков «низкие», то при $s_1 \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} s_2$ игрок 2 выплачивает игроку 1 соответственно сумму $\begin{matrix}b\\0\\-b\end{matrix}$. Если ставка одного игрока высокая, а ставка другого низкая и сопровождается пасованием, причем с высшей ставкой оказывается игрок $\begin{matrix}1\\2\end{matrix}$, то игрок 2 выплачивает игроку 1 сумму $\begin{matrix}b\\-b\end{matrix}$.

Замечание. Ради формальной корректности это построение следовало бы еще привести в соответствие с моделями из §§ 6 и 7 в гл. II. Таким образом, упомянутые выше первые случайные ходы (имеющие дело с раскладами) следовало бы назвать ходами 1 и 2, последующие два хода (ставки) — ходами 3 и 4 и последний личный ход (пасование или раскрытие) — ходом 5.

В случае хода 5 как игрок, личным ходом которого он является, так и количество возможностей зависят от предыдущего хода игры, как это описано в пп. 7.1.2 и 9.1.5. (Если ставки обоих игроков одновременно высокие или низкие, то количество возможностей равно 1 и не имеет значения, какому игроку мы припишем этот пустой личный ход. Если же ставка одного игрока высокая, а другого низкая, то личный ход делает назначивший низкую ставку.)

Последовательное использование упомянутых обозначений заставило бы писать $\sigma_1$, $\sigma_2$ для $s_1$, $s_2$; $\sigma_3$, $\sigma_4$ для высокой или низкой ставки, $\sigma_5$ для пасования или раскрытия. Мы предоставляем читателю сгладить все эти различия.

## 19.5. Описание стратегий

**19.5.1.** Всякая (чистая) стратегия в этой игре состоит, очевидно, в следующем. Для каждого расклада $s = 1, \ldots, S$ указывается, какая будет назначена ставка, высокая или низкая, и в последнем случае делается дополнительное заявление относительно последующего течения игры: если с этой низкой ставкой сочетается высокая ставка противника, то игрок может раскрыться или пасовать. Проще всего записать это с помощью числового индекса $i_s = 1, 2, 3$; $i_s = 1$ соответствует высокой ставке; $i_s = 2$ соответствует низкой ставке с последующим раскрытием (если таковое происходит); $i_s = 3$ соответствует низкой ставке с последующим

пасованием (если таковое происходит). Таким образом, стратегия заключается в задании для каждого $s = 1, \ldots, S$ значения индекса $i_s$, т. е. в задании последовательности $i_1, \ldots, i_S$.

Сказанное относится к обоим игрокам 1 и 2. Поэтому описанную выше стратегию мы будем обозначать соответственно через

$$\Sigma_1(i_1, \ldots, i_S) \quad \text{или} \quad \Sigma_2(j_1, \ldots, j_S).$$

Таким образом, у каждого игрока имеется одно и то же число стратегий: столько, сколько существует последовательностей $i_1, \ldots, i_S$, т. е. $3^S$. Используя старые обозначения из п. 11.2.2, имеем

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = 3^S.$$

Если бы мы хотели придерживаться введенных выше прежних строгих обозначений, то нам следовало бы перенумеровать теперь эти последовательности $i_1, \ldots, i_S$ при помощи $\tau_1 = 1, \ldots, \beta$ и затем (чистые) стратегии игроков 1 и 2 обозначить соответственно через $\Sigma_1^{\tau_1}$, $\Sigma_2^{\tau_2}$. Но мы предпочитаем применять наши новые обозначения.

Теперь мы должны записать выигрыш, получаемый игроком 1, если игроки используют стратегии $\Sigma_1(i_1, \ldots, i_S)$ и $\Sigma_2(j_1, \ldots, j_S)$. Этим выигрышем является элемент матрицы $\mathcal{K}(i_1, \ldots, i_S | j_1, \ldots, j_S)$ [1].

Таблица 15. $\mathcal{L}_+(i, j)$

| i \ j | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $a$ | $a$ | $b$ |
| 2 | $a$ | $b$ | $b$ |
| 3 | $-b$ | $b$ | $b$ |

Таблица 16. $\mathcal{L}_0(i, j)$

| i \ j | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $b$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | $-b$ | 0 | 0 |

Таблица 17. $\mathcal{L}_-(i, j)$

| i \ j | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $-a$ | $-a$ | $b$ |
| 2 | $-a$ | $-b$ | $-b$ |
| 3 | $-b$ | $-b$ | $-b$ |

Если игроки фактически получили расклады $s_1$ и $s_2$, то выигрыш, получаемый игроком 1, можно записать (используя сформулированные выше правила) следующим образом. Этот выигрыш равен $\mathcal{L}_{\operatorname{sign}(s_1-s_2)}(i_{s_1}, j_{s_2})$, где $\operatorname{sign}(s_1 - s_2)$ — знак [2] числа $s_1 - s_2$, и три функции

$$\mathcal{L}_+(i, j), \quad \mathcal{L}_0(i, j), \quad \mathcal{L}_-(i, j), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

можно задать с помощью матриц [3], приведенных в табл. 15—17.

---

[1]) Индексом строки является вся последовательность $i_1, \ldots, i_S$, а индексом столбца — вся последовательность $j_1, \ldots, j_S$. В наших старых обозначениях мы имели бы стратегии $\Sigma_1^{\tau_1}$, $\Sigma_2^{\tau_2}$ и элемент матрицы $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$.

[2]) Этот знак есть $\begin{smallmatrix}+\\0\\-\end{smallmatrix}$ соответственно для $s_1 \gtreqless s_2$. Эта функция арифметически показывает, какая ставка старше.

[3]) Читателю полезно сравнить эти матрицы с нашим словесным описанием правил и проверить их соответствие.

Другим обстоятельством, на которое следует обратить внимание, является симметричность игры, соответствующая тождествам

$$\mathcal{L}_+(i, j) \equiv -\mathcal{L}_-(j, i), \qquad \mathcal{L}_0(i, j) \equiv -\mathcal{L}_0(j, i).$$

Числа $s_1$, $s_2$ появляются в результате случайных ходов, как это описано выше. Поэтому [1])

$$\mathscr{K}(i_1, \ldots, i_S \mid j_1, \ldots, j_S) = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, s_2=1}^{S} \mathscr{L}_{\text{sign}(s_1-s_2)}(i_{s_1}, j_{s_2}).$$

**19.5.2.** Перейдем теперь к смешанным стратегиям в смысле п.17.2. Они являются векторами $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, принадлежащими множеству $S_\beta$. Имея в виду используемые сейчас обозначения, мы должны задать компоненты этих векторов также по-новому. Мы должны писать $\xi_{i_1,\ldots,i_S}$, $\eta_{j_1,\ldots,j_S}$ вместо $\xi_{\tau_1}$, $\eta_{\tau_2}$.

Напишем формулу (17:2) из п.17.4.1, оценивающую ожидаемый выигрыш игрока 1:

$$\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{i_1,\ldots,i_S,\, j_1,\ldots,j_S} \mathscr{K}(i_1, \ldots, i_S \mid j_1, \ldots, j_S)\, \xi_{i_1,\ldots,i_S}\eta_{j_1,\ldots,j_S} =$$

$$= \frac{1}{S^2} \sum_{i_1,\ldots,i_S,\, j_1,\ldots,j_S} \sum_{s_1, s_2} \mathscr{L}_{\text{sign}(s_1-s_2)}(i_{s_1}, i_{s_2})\, \xi_{i_1,\ldots,i_S}\eta_{j_1,\ldots,j_S}.$$

Изменим здесь порядок суммирования, тогда

$$\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, s_2} \sum_{i_1,\ldots,i_S,\, j_1,\ldots,j_S} \mathscr{L}_{\text{sign}(s_1-s_2)}(i_{s_1}, i_{s_2})\, \xi_{i_1,\ldots,i_S}\eta_{j_1,\ldots,j_S}.$$

Если теперь положить

(19:1) $$\rho_i^{s_1} = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_S,\ \text{исключая } i_{s_1} \\ i_{s_1}=i}} \xi_{i_1,\ldots,i_S},$$

(19:2) $$\sigma_j^{s_2} = \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_S,\ \text{исключая } j_{s_2} \\ j_{s_2}=j}} \eta_{j_1,\ldots,j_S},$$

то наше равенство можно переписать в виде

(19:3) $$\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, s_2} \sum_{i, j} \mathscr{L}_{\text{sign}(s_1-s_2)}(i, j)\, \rho_i^{s_1}\sigma_j^{s_2}.$$

Целесообразно пояснить смысл равенств (19:1) — (19:3).

Равенство (19:1) показывает, что $\rho_i^{s_1}$ есть вероятность того, что игрок 1, использующий смешанную стратегию $\vec{\xi}$, выберет $i$, имея расклад $s_1$; равенство (19:2) показывает, что $\sigma_j^{s_2}$ есть вероятность того, что игрок 2, использующий смешанную стратегию $\vec{\eta}$, выберет $j$, имея [2]) расклад $s_2$.

---

[1]) Читатель может проверить, что тождество

$$\mathscr{K}(i_1, \ldots, i_S \mid j_1, \ldots, j_S) = -\mathscr{K}(j_1, \ldots, j_S \mid i_1, \ldots, i_S)$$

является следствием соотношений в конце сноски 3 на стр. 214, т. е. матрица

$$\mathscr{K}(i_1, \ldots, i_S \mid j_1, \ldots, j_S)$$

является кососимметрической, что еще раз подчеркивает симметричность игры.

[2]) Из п. 19.4 нам известно, что $i$ или $j = 1$ соответствует «высокой» ставке, $i = 2, 3$ соответствует низкой ставке с последующим раскрытием или пасованием.

Теперь интуитивно ясно, что ожидаемое значение К $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ зависит только от этих вероятностей $\rho_i^{s_1}$, $\sigma_j^{s_2}$ и не зависит от отдельных вероятностей $\xi_{i_1}, \ldots, {}_{j_S}$, $\eta_{j_1}, \ldots, {}_{j_S}$.

Замечание. Это означает, что две различные смешанные (чистые) стратегии могут с точки зрения фактического эффекта быть одинаковыми.

Для иллюстрации этого рассмотрим простой пример. Пусть $S = 2$, т. е. имеются только высокий и низкий расклады. Рассмотрим $i = 2, 3$ как один случай, т. е. пусть имеется только высокая и низкая ставки. Тогда будут существовать четыре возможные (чистые) стратегии, которым мы дадим специальные имена.

«Отважная»: при каждом раскладе высокая ставка.

«Осторожная»: при каждом раскладе низкая ставка.

«Нормальная»: высокая ставка при высоком раскладе и низкая при низком.

«Блеф»: высокая ставка при низком раскладе и низкая при высоком.

Тогда (50-50)-смесь отважной и осторожной стратегий эквивалентна (50-50)-смеси нормальной стратегии и блефа, поскольку в каждом из этих случаев игрок будет, в соответствии с исходом случайного испытания, назначать 50-50 высокую или низкую ставку при любом раскладе.

Тем не менее в принятых нами обозначениях эти смешанные стратегии оказываются различными, т. е. они оказываются различными векторами $\vec{\xi}$.

Это означает, конечно, что наши обозначения, будучи полностью подходящими в общем случае, оказываются для многих конкретных игр избыточными. Это частое явление при математических рассмотрениях, преследующих общие цели. Пока мы разрабатывали общую теорию, у нас не было причин принимать во внимание эту избыточность. Но сейчас, при рассмотрении конкретной игры, мы от нее избавимся.

Легко видеть, как непосредственно интерпретируется формула (19:3). Для этого достаточно вспомнить смысл функции $\mathcal{L}_{\mathrm{sign}\,(s_1-s_2)}(i, j)$ и интерпретацию величин $\rho_i^{s_1}$, $\sigma_j^{s_2}$.

**19.5.3.** Понятно, что как по своему смыслу, так и в силу формальных определений (19:1), (19:2) числа $\rho_i^{s_1}$, $\sigma_j^{s_2}$ удовлетворяют условиям

$$\text{все } \rho_i^{s_1} \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{3} \rho_i^{s_1} = 1, \tag{19:4}$$

$$\text{все } \sigma_j^{s_2} \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^{s_2} = 1. \tag{19:5}$$

С другой стороны, любые $\rho_i^{s_1}$, $\sigma_j^{s_2}$, удовлетворяющие этим условиям, можно получить из соответствующих $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ по формулам (19:1), (19:2). Это понятно как математически [1]), так и интуитивно. Любая система таких чисел $\rho_i^{s_1}$, $\sigma_j^{s_2}$ является набором вероятностей, определяющих возможный способ поведения. Поэтому они должны соответствовать некоторой смешанной стратегии.

Соотношения (19:4) и (19:5) дают возможность составлять трехмерные векторы

$$\vec{\rho}^{s_1} = \{\rho_1^{s_1}, \rho_2^{s_1}, \rho_3^{s_1}\}, \qquad \vec{\sigma}^{s_2} = \{\sigma_1^{s_2}, \sigma_2^{s_2}, \sigma_3^{s_2}\}.$$

Тогда условия (19:4), (19:5) утверждают, что все $\vec{\rho}^{s_1}$, $\vec{\sigma}^{s_2}$ принадлежат $S_3$.

Это показывает, каких больших упрощений мы добились благодаря введению этих векторов. Именно вектор $\vec{\xi}$ (или $\vec{\eta}$) принадлежал $S_\beta$,

---

[1]) Положим, например, $\xi_{i_1}, \ldots, {}_{i_S} = \rho_{i_1}^1 \ldots \rho_{i_S}^S$, $\eta_{j_1}, \ldots, {}_{j_S} = \sigma_{j_1}^1 \ldots \sigma_{j_S}^S$ и проверим, что (17:1:a) и (17:1:b) из п. 17.2.1 являются следствием условий (19:4), (19:5).

т. е. зависел от $\beta - 1 = 3^S - 1$ числовых параметров; $\vec{\rho}^{s_1}$ (или $\vec{\sigma}^{s_2}$) составляют множество, состоящее из $S$ векторов в $S_3$, т. е. каждый из них зависит от двух числовых констант. Число $3^S - 1$ много больше числа $2S$ даже при умеренных [1]) $S$.

## 19.6. Формулировка задачи

**19.6.** Поскольку мы имеем дело с симметричной игрой, мы можем использовать характеристику оптимальных (смешанных) стратегий, т. е. характеристику $\vec{\xi} \in \bar{A}$, указанную в (17:Н) из п. 17.11.2. Она состоит в следующем: стратегия $\vec{\xi}$ должна быть оптимальной против самой себя, т. е. предполагается, что $\min\limits_{\vec{\eta}} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ должен достигаться при $\vec{\eta} = \vec{\xi}$.

Далее, в п. 19.5 мы видели, что функция $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ фактически зависит от $\vec{\rho}^{s_1}, \vec{\sigma}^{s_2}$. Поэтому можно переписать ее в виде $\mathrm{K}(\vec{\rho}^1, \ldots, \vec{\rho}^S \mid \vec{\sigma}^1, \ldots, \vec{\sigma}^S)$. Тогда формула (19:3) из п. 19.5.2 утверждает (мы несколько изменили порядок суммирования), что

$$(19:6) \qquad \mathrm{K}(\vec{\rho}^1, \ldots, \vec{\rho}^S \mid \vec{\sigma}^1, \ldots, \vec{\sigma}^S) = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, i} \sum_{s_2, j} \mathscr{L}_{\mathrm{sign}(s_1 - s_2)}(i, j) \rho_i^{s_1} \sigma_j^{s_2},$$

и $\vec{\rho}^1, \ldots, \vec{\rho}^S$ для оптимальной стратегии характеризуется тем, что

$$\min_{\vec{\sigma}^1, \ldots, \vec{\sigma}^S} \mathrm{K}(\vec{\rho}^1, \ldots, \vec{\rho}^S \mid \vec{\sigma}^1, \ldots, \vec{\sigma}^S)$$

достигается при $\vec{\sigma}^1 = \vec{\rho}^1, \ldots, \vec{\sigma}^S = \vec{\rho}^S$. Можно найти и явные условия для этого, используя, по существу, тот же метод, который был применен к аналогичной задаче в п. 17.9.1; мы сжато изложим его.

Минимум по $(\vec{\sigma}^1, \ldots, \vec{\sigma}^S)$ функции (19:6) равен минимуму, взятому отдельно по каждой из переменных $\vec{\sigma}^1, \ldots, \vec{\sigma}^S$. Рассмотрим поэтому некоторую переменную $\vec{\sigma}^{s_2}$. Единственное ограничение, которому она удовлетворяет, состоит в принадлежности ее к $S_3$, т. е.

$$\text{все } \sigma_j^{s_2} \geqq 0, \qquad \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^{s_2} = 1.$$

Функция (19:6) линейна по этим трем компонентам $\sigma_1^{s_2}, \sigma_2^{s_2}, \sigma_3^{s_2}$. Следовательно, минимум по $\vec{\sigma}^{s_2}$ будет находиться там, где обратятся в нуль все те компоненты $\sigma_j^{s_2}$, коэффициенты которых (по $j$, см. ниже) не достигают наименьшего возможного значения.

Обозначая через $\frac{1}{S}\gamma_j^{s_2}$ коэффициент при $\sigma_j^{s_2}$, равный

$$\frac{1}{S^2} \sum_{s_1, i} \mathscr{L}_{\mathrm{sign}(s_1 - s_2)}(i, j) \rho_i^{s_1},$$

мы из (19:6) получаем

$$(19:7) \qquad \mathrm{K}(\vec{\rho}^1, \ldots, \vec{\rho}^S \mid \vec{\sigma}^1, \ldots, \vec{\sigma}^S) = \frac{1}{S} \sum_{s_2, j} \gamma_j^{s_2} \sigma_j^{s_2}.$$

---

[1]) В действительности $S$ равно приблизительно $2{,}5 \cdot 10^6$ (см. сноску 4 на стр. 209); поэтому оба числа $3^S - 1$ и $2S$ большие, но первое из них несравненно больше.

Тогда условием минимума (по $\vec{\sigma}^{s_2}$) будет:

(19:8) Для каждой пары $s_2$, $j$, для которой $\gamma_j^{s_2}$ не достигает минимума (по $j$ [1])), должно быть $\sigma_j^{s_2} = 0$.

Следовательно, характеристика оптимальной стратегии — минимизация при $\vec{\sigma}^1 = \vec{\rho}^1, \ldots, \vec{\sigma}^S = \vec{\rho}^S$ — состоит в следующем:

(19:A) $\vec{\rho}^1, \ldots, \vec{\rho}^S$ описывают оптимальную стратегию, т. е. $\vec{\xi} \in \overline{A}$, в том и только том случае, если для каждой пары $s_2$, $j$, для которой $\gamma_j^{s_2}$ не достигает минимума (по $j$ [1])), имеем $\sigma_j^{s_2} = 0$.

На основе матричных схем табл. 15—17 выпишем, наконец, явные выражения для $\gamma_j^{s_2}$:

(19:9:a)
$$\gamma_1^{s_2} = \frac{1}{S}\left\{\sum_{s_1=1}^{s_2-1}(-a\rho_1^{s_1} - a\rho_2^{s_1} - b\rho_3^{s_1}) - b\rho_3^{s_2} + \sum_{s_1=s_2+1}^{S}(a\rho_1^{s_1} + a\rho_2^{s_1} - b\rho_3^{s_1})\right\},$$

(19:9:b)
$$\gamma_2^{s_2} = \frac{1}{S}\left\{\sum_{s_1=1}^{s_2-1}(-a\rho_1^{s_1} - b\rho_2^{s_1} - b\rho_3^{s_1}) + \sum_{s_1=s_2+1}^{S}(a\rho_1^{s_1} + b\rho_2^{s_1} + b\rho_3^{s_1})\right\},$$

(19:9:c)
$$\gamma_3^{s_2} = \frac{1}{S}\left\{\sum_{s_1=1}^{s_2-1}(b\rho_1^{s_1} - b\rho_2^{s_1} - b\rho_3^{s_1}) + b\rho_1^{s_2} + \sum_{s_1=s_2+1}^{S}(b\rho_1^{s_1} + b\rho_2^{s_1} + b\rho_3^{s_1})\right\}.$$

## 19.7. Переход от дискретной задачи к непрерывной

**19.7.1.** Критерий (19:A) из п. 19.6 вместе с формулами (19:7), (19:9:a), (19:9:b) и (19:9:c) можно использовать для нахождения всех оптимальных стратегий [2]). Эти рассуждения носят несколько утомительный комбинаторный характер и содержат анализ ряда возможностей. Получающиеся при этом результаты качественно сходны с результатами, получаемыми далее при несколько измененных предположениях. Различие между ними касается лишь некоторых деликатных вопросов, которые можно назвать «тонкой структурой» стратегии. Более подробно мы остановимся на этом в п. 19.12.

Нас сейчас интересуют главным образом основные характеристики решения, а не эти вопросы «тонкой структуры». Сначала обратим внимание на дискретную структуру последовательности возможных раскладов.

---

[1]) Имеется в виду минимум по $j$, а не по $s_2$, $j$!

[2]) Это нахождение было уже проделано одним из нас и будет опубликовано в другом месте.

Если мы попытаемся изобразить старшинство всех возможных раскладов на шкале от 0% до 100% или лучше в виде дробей от 0 до 1, то самый младший из возможных раскладов, 1, будет соответствовать нулю, а самый старший из них будет соответствовать единице. Поэтому расклад $s$ $(=1, \ldots, S)$ следует заменить на величину $z=\frac{s-1}{S-1}$, принадлежащую этой шкале. Итак, мы получаем табл. 18.

Таблица 18

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Возможные расклады | Старая шкала | $s=$ | 1 | 2 | 3 | .... | $S-1$ | $S$ |
| | Новая шкала | $z=$ | 0 | $\frac{1}{S-1}$ | $\frac{2}{S-1}$ | .... | $\frac{S-2}{S-1}$ | 1 |

Таким образом, хотя значения $z$ заполняют интервал

(19:10) $$0 \leqq z \leqq 1$$

весьма плотно [1]), но все-таки они составляют дискретную последовательность. Это и есть упомянутая выше дискретная структура. Перейдем теперь от этого случая к непрерывному.

Будем предполагать, что случайный ход, выбирающий расклад $s$ (т. е. число $z$), может воспроизвести любое $z$ из интервала (19:10). Предположим, что вероятность любой части интервала (19:10) равна длине этой части, т. е. что величина $z$ распределена [2]) на интервале (19:10) равномерно. Обозначим расклады игроков 1 и 2 соответственно через $z_1$ и $z_2$.

**19.7.2.** Это изменение влечет за собой замену векторов $\vec{\rho}^{s_1}$, $\vec{\sigma}^{s_2}$ $(s_1, s_2 = 1, \ldots, S)$ на векторы $\vec{\rho}^{z_1}$, $\vec{\sigma}^{z_2}$ $(0 \leqq z_1, z_2 \leqq 1)$; при этом, конечно, они по-прежнему являются вероятностными векторами (той же природы, что и раньше, т. е. принадлежат $S_3$). Поэтому компоненты (вероятности) $\rho_i^{s_1}, \sigma_j^{s_2}$ $(s_1, s_2=1, \ldots, S;\ i, j=1, 2, 3)$ переходят в компоненты $\rho_i^{z_1}$, $\sigma_j^{z_2}$ $(0 \leqq z_1, z_2 \leqq 1;\ i, j=1, 2, 3)$. Аналогично величины $\gamma_j^{s_2}$ (в формулах (19:9:a), (19:9:b), (19:9:c) из п. 19.6) переходят в $\gamma_j^{z_2}$.

Перепишем теперь выражения для K и $\gamma_j^{s}$ в формулах (19:7), (19:9:a), (19:9:b), (19:9:c) из п. 19.6. Ясно, что все суммы

$$\frac{1}{S}\sum_{s_1=1}^{S}, \quad \frac{1}{S}\sum_{s_2=1}^{S}$$

надо заменить интегралами

$$\int_0^1 \ldots dz_1, \quad \int_0^1 \ldots dz_2,$$

[1]) Напомним (ср. сноску 4 на стр. 219), что $S$ есть примерно 2,5 миллиона.
[2]) Это так называемая геометрическая вероятность.

а суммы

$$\frac{1}{S}\sum_{s_1=1}^{s_2-1}, \quad \frac{1}{S}\sum_{s_1=s_2+1}^{S}$$

— интегралами

$$\int_0^{z_2} \dots dz_1, \quad \int_{z_2}^{1} \dots dz_1,$$

в то время как отдельные слагаемые, стоящие в скобках с коэффициентом $1/S$, можно опустить [1, 2]. Понятно, что формулы для K и $\gamma_j^s$ (т. е., $\gamma_j^z$) превращаются в

(19:7*) $$K = \sum_j \int_0^1 \gamma_j^{z_2} \sigma_j^{z_2} dz_2,$$

(19:9:a*) $$\gamma_1^{z_2} = \int_0^{z_2} (-a\rho_1^{z_1} - a\rho_2^{z_1} - b\rho_3^{z_1})\, dz_1 + \int_{z_2}^{1} (a\rho_1^{z_1} + a\rho_2^{z_1} - b\rho_3^{z_1})\, dz_1,$$

(19:9:b*) $$\gamma_2^{z_2} = \int_0^{z_2} (-a\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1} - b\rho_3^{z_1})\, dz_1 + \int_{z_2}^{1} (a\rho_1^{z_1} + b\rho_2^{z_1} + b\rho_3^{z_1})\, dz_1,$$

(19:9:c*) $$\gamma_3^{z_2} = \int_0^{z_2} (b\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1} - b\rho_3^{z_1})\, dz_1 + \int_{z_2}^{1} (b\rho_1^{z_1} + b\rho_2^{z_1} + b\rho_3^{z_1})\, dz_1,$$

а характеристика (19:A) из п. 19.6 переходит в следующую:

(19:B) Векторы $\vec{\rho}^{\,z}$ $(0 \leqq z \leqq 1)$ (все они принадлежат $S_3$) описывают оптимальную стратегию в том и только том случае, когда справедливо утверждение:

Для каждой пары $z$, $j$, для которой $\gamma_j^z$ не достигает минимума (по $j$ [3])), должно быть $\rho_j^z = 0$.

Замечание. Формулы (19:7*), (19:9:a*), (19:9:b*), (19:9:c*) и этот критерий можно было бы получить также и непосредственно из рассмотрения «непрерывного» случая с $\vec{\rho}^{\,z_1}$, $\vec{\sigma}^{\,z_2}$ вместо $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, с которых мы начинали. Мы предпочли более длинную и явную процедуру, вытекающую из пп. 19.4—19.7, чтобы сделать строгость и полноту нашего подхода очевидной. Хорошим упражнением для читателя будет осуществить более короткое и непосредственное рассмотрение этого случая.

Соблазнительно построить теорию игр, в которой систематически и непосредственно встречаются такие непрерывные параметры, т. е. с общностью, достаточной для приложимости этой теории к случаям, подобным только что рассмотренному, и без использования процессов предельного перехода от дискретных игр.

Интересный шаг в этом направлении сделан Виллем в работе, указанной в замечании на стр. 177 (см. стр.110—113 упомянутой работы). Однако сделанные там предположения о непрерывности являются, по-видимому, слишком жесткими для многих приложений и, в частности, для рассматриваемого здесь.

---

[1]) Конкретно мы имеем в виду средние члены — $b\rho_3^{s_2}$ и $b\rho_1^{s_2}$ в (19:9:a) и (19:9:c).

[2]) Эти члены соответствуют случаю $s_1 = s_2$, или, в новых обозначениях, $z_1 = z_2$. Но, поскольку $z_1$, $z_2$ — непрерывные случайные величины, вероятность их случайного совпадения равна 0.

При математическом описании этого процесса можно сказать, что мы теперь осуществляем предельный переход при $S \to \infty$.

[3]) Мы подразумеваем по $j$, но не по $z$, $j$!

## 19.8. Математическое построение решения

**19.8.1.** Приступим теперь к построению оптимальных стратегий $\vec{\rho}^z$, т. е. решения, определяемого условием (19:B) из п. 19.7.

Предположим сначала, что всегда $\rho_2^z > 0$ [1]). Для такого $z$ необходимо $\min\limits_j \gamma_j^z = \gamma_2^z$; следовательно, $\gamma_1^z \geqq \gamma_2^z$, т. е.

$$\gamma_2^z - \gamma_1^z \leqq 0.$$

Подстановка сюда выражений из (9:9:a*), (19:9:b*) дает

$$(a-b)\left(\int_0^z \rho_2^{z_1} dz_1 - \int_z^1 \rho_2^{z_1} dz_1\right) + 2b \int_z^1 \rho_3^{z_1} dz_1 \leqq 0. \tag{19:11}$$

Обозначим, далее, через $z^0$ верхний предел тех $z$, для которых $\rho_2^z > 0$ [2]). Тогда в силу непрерывности неравенство (19:11) справедливо также и для $z = z^0$. Поскольку для $z_1 > z^0$ не может иметь места неравенство $\rho_2^{z_1} > 0$ (по предположению), интеграл $\int_{z^0}^1 \rho_2^{z_1} dz_1$ в (19:11) равен нулю. Поэтому можно поставить перед ним знак «+» вместо знака «—», тогда из (19:11) мы получаем

$$(a-b)\int_0^1 \rho_2^{z_1} dz_1 + 2b \int_{z^0}^1 \rho_3^{z_1} dz_1 \leqq 0.$$

Но по предположению $\rho_2^{z_1}$ всегда $\geqq 0$ и иногда $>0$; следовательно, первое слагаемое всегда [3, 4]) $> 0$. Понятно, что второе слагаемое $\geqq 0$. Таким образом, получено противоречие, т. е. мы показали, что [5])

$$\rho_2^z \equiv 0. \tag{19:12}$$

**19.8.2.** Исключив $j = 2$, проанализируем теперь связь между $j = 1$ и $j = 3$. Поскольку $\rho_2^z = 0$, должно быть $\rho_1^z + \rho_3^z = 1$, т. е.

$$\rho_3^z = 1 - \rho_1^z, \tag{19:13}$$

и, следовательно,

$$0 \leqq \rho_1^z \leqq 1. \tag{19:14}$$

---

[1]) То есть что рассматриваемая оптимальная стратегия осуществляется при $j = 2$, т. е. при низкой ставке с последующим (предполагаемым) раскрытием при определенных условиях.

[2]) То есть наибольшее $z^0$, для которого справедливо неравенство $\rho_2^z > 0$ при $z$, сколь угодно близких к $z^0$ (мы не требуем выполнения неравенства $\rho_2^z > 0$ для всех $z < z^0$). Такое $z^0$ заведомо существует, если существует $z$, для которого $\rho_2^z > 0$.

[3]) Конечно, $a - b > 0$.

[4]) Нет необходимости, по-видимому, прибегать к детальным и точным положениям теории интегрирования, меры и т. д. Мы предполагаем, что наши функции достаточно гладки, и поэтому положительная функция имеет положительный интеграл и т. д. Не составляет труда дать строгое обоснование, если воспользоваться упомянутыми выше математическими теориями.

[5]) Читателю следует переформулировать это словесно. Мы исключили низкие ставки с последующим (предполагаемым) раскрытием посредством анализа условий для гипотетического верхнего предела раскладов, для которых они могли бы быть сделаны, и показали, что для случаев, по крайней мере близких к таким, предпочтительнее сразу высокая ставка. Это обусловлено, конечно, нашим упрощением, которое запрещает «переторговывание».

Далее, на интервале $0 \leqq z \leqq 1$ могут существовать подинтервалы, для которых всегда $\rho_1^z \equiv 0$ или всегда $\rho_1^z \equiv 1$ [1]). Всякое $z$, не принадлежащее ни одному из подинтервалов такого типа, т. е. вблизи которого справедливо как $\rho_1^{z'} \neq 0$, так и $\rho_1^{z'} \neq 1$, мы будем называть промежуточными. Поскольку из $\rho_1^{z'} \neq 0$ или из $\rho_1^{z'} \neq 1$ (т. е. из $\rho_3^{z'} \neq 0$) вытекает, что $\min_j \gamma_j^{z'} = \gamma_1^{z'}$ или $\gamma_3^{z'}$ соответственно, мы видим, что вблизи любого промежуточного $z$ выполняется как неравенство $\gamma_1^{z'} \leqq \gamma_3^{z'}$, так и неравенство $\gamma_1^{z'} \geqq \gamma_3^{z'}$. Следовательно, для таких $z$ в силу непрерывности мы имеем [2]) $\gamma_1^z = \gamma_3^z$, т. е.

$$\gamma_3^z - \gamma_1^z = 0.$$

Подставляя (19:9:a*), (19:9:c*) и вспоминая (19:12), (19:13), мы получаем

$$(a+b)\int_0^z \rho_1^{z_1}\,dz_1 - (a-b)\int_z^1 \rho_1^{z_1}\,dz_1 + 2b\int_z^1 (1-\rho_1^{z_1})\,dz_1 = 0,$$

т. е.

$$(a+b)\left(\int_0^z \rho_1^{z_1}\,dz_1 - \int_z^1 \rho_1^{z_1}\,dz_1\right) + 2b(1-z) = 0. \tag{19:15}$$

Рассмотрим теперь два промежуточных $z'$, $z''$. Подставляя в (19:15) $z = z'$ и $z = z''$ и вычитая, мы получим

$$2(a+b)\int_{z'}^{z''} \rho_1^{z_1}\,dz_1 - 2b(z''-z') = 0;$$

отсюда

$$\frac{1}{z''-z'}\int_{z'}^{z''} \rho_1^{z_1}\,dz_1 = \frac{b}{a+b}. \tag{19:16}$$

Словесно это означает, что между двумя промежуточными $z'$ и $z''$ среднее значение $\rho_1^z$ равно $\frac{b}{a+b}$.

Далее, ни одно из тождеств $\rho_1^z \equiv 0$ и $\rho_1^z \equiv 1$ не может выполняться на всем интервале

$$z' \leqq z \leqq z'',$$

поскольку среднее значение было бы тогда равно 0 или 1. Следовательно, этот интервал должен содержать еще хотя бы одно промежуточное $z$, т. е. между любыми двумя промежуточными $z$ лежит хотя бы одно третье промежуточное $z$. Повторение этих рассуждений показывает, что между двумя промежуточными $\bar{z}'$ и $\bar{z}''$ другие промежуточные $z$ лежат всюду плотно. Поэтому $\bar{z}'$ и $\bar{z}''$, для которых выполняется (19:16), лежат всюду плотно между $z'$ и $z''$. Но тогда в силу непрерывности соотношение (19:16) должно иметь место для всех $\bar{z}'$, $\bar{z}''$ [3]) между $z'$ и $z''$. Это не оставляет иной возможности, кроме как утверждать, что $\rho_1^z = \frac{b}{a+b}$ всюду между $z'$ и $z''$.

---

[1]) То есть когда стратегия предписывает игроку делать всегда высокую ставку либо всегда делать низкую ставку (с последующим пасованием).

[2]) Величины $\gamma_i^z$ определяются интегралами (19:9:a*), (19:9:b*), (19:9:c*); поэтому они заведомо непрерывны.

[3]) Интеграл в (19:16), конечно, непрерывен.

З а м е ч а н и е. Очевидно, при этом допускаются изолированные исключения, составляющие область $z$ меры 0, т. е. область общей нулевой вероятности (например, конечное число фиксированных значений $z$). Они не влияют на интегралы. Легко провести точное математическое рассуждение, но, по-видимому, оно здесь не требуется (см. сноску 4 на стр. 221). Таким образом, наиболее простым будет, по-видимому, предположение, что $\rho_1^z = \frac{b}{a+b}$ в интервале $\bar{z}' \leqq z \leqq \bar{z}''$, без каких бы то ни было исключений.

Это следует иметь в виду при рассмотрении формул на следующих страницах, где, с одной стороны, имеется интервал $\bar{z}' \leqq z \leqq \bar{z}''$ и, с другой стороны, интервалы $0 \leqq z < \bar{z}'$ и $\bar{z}'' < z \leqq 1$. Иначе говоря, точки, $\bar{z}'$ и $\bar{z}''$ отнесены к первому из названных интервалов. Это, конечно, не является существенным: две фиксированные изолированные точки — в данном случае $\bar{z}'$ и $\bar{z}''$ — можно рассмотреть произвольным образом (см. выше).

Читатель должен заметить, однако, что, в то время как при сравнении между собой значений $z$ нет существенных различий между случаями $<$ и $\leqq$, для $\gamma_j^z$ дело обстоит иначе. Мы видели, что из неравенства $\gamma_1^z > \gamma_3^z$ вытекало $\rho_1^z = 0$. Однако из неравенства $\gamma_1^z \geqq \gamma_3^z$ аналогичных заключений сделать нельзя. (Ср. также обсуждение рис. 25 и рис. 28, 29.)

**19.8.3.** Далее, если промежуточные $z$ существуют, то существуют также наименьшее и наибольшее среди них; обозначим их через $\bar{z}'$, $\bar{z}''$. Мы имеем:

$$\rho_1^z = \frac{b}{a+b} \quad \text{всюду в} \quad \bar{z}' \leqq z \leqq \bar{z}''. \tag{19:17}$$

Если промежуточных $z$ нет, то должно быть $\rho_1^z \equiv 0$ (для всех $z$) или $\rho_1^z \equiv 1$ (для всех $z$). Легко видеть, что ни одно из них не является решением [1]). Поэтому промежуточные $z$ заведомо существуют, а с ними существуют и $\bar{z}'$, $\bar{z}''$, так что формула (19:17) справедлива.

**19.8.4.** Левая часть в (19:15) равна $\gamma_3^z - \gamma_1^z$ при всех $z$; следовательно, для $z = 1$ мы имеем

$$\gamma_3^1 - \gamma_1^1 = (a+b) \int_0^1 \rho_1^{z_1}\, dz_1 > 0$$

(поскольку случай $\rho_1^{z_1} \equiv 0$ исключен). В силу непрерывности неравенство $\gamma_3^z - \gamma_1^z > 0$ или $\gamma_1^z < \gamma_3^z$ остается справедливым даже при значениях $z$, близких к 1. Тогда для этих $z$ будет $\rho_3^z = 0$, т. е. $\rho_1^z = 1$. Таким образом, из (19:17) с необходимостью вытекает, что $\bar{z}'' < 1$. Далее, пусть в интервале $\bar{z}'' \leqq z \leqq 1$ не существует промежуточных $z$; тогда во всем этом интервале мы имеем $\rho_1^z \equiv 0$ или же $\rho_1^z \equiv 1$. Первую из этих возможностей наши предыдущие результаты исключают. Следовательно,

$$\rho_1^z \equiv 1 \quad \text{всюду в} \quad \bar{z}'' \leqq z \leqq 1. \tag{19:18}$$

**19.8.5.** Рассмотрим, наконец, нижнюю границу $\bar{z}'$ в (19:17). Если $\bar{z}' > 0$, то мы имеем интервал $0 \leqq z \leqq \bar{z}'$. Этот интервал не содержит

---

[1]) Иначе говоря, ни высокая ставка, ни низкая ставка (с последующим пасованием) не будут при всех условиях оптимальными стратегиями.

М а т е м а т и ч е с к о е д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\rho_1^z = 0$. Находим: $\gamma_1^0 = -b$, $\gamma_3^0 = +b$; следовательно, $\gamma_1^0 < \gamma_3^0$, что противоречит $\rho_3^z = 1 \neq 0$. Пусть $\rho_1^z = 1$. Находим: $\gamma_1^0 = a, \gamma_3^0 = b$; следовательно, $\gamma_3^0 < \gamma_1^0$, что противоречит $\rho_1^z = 1 \neq 0$.

промежуточных $z$; следовательно, мы имеем в интервале $0 \leq z \leq \bar{z}'$ либо всюду $\rho_1^z \equiv 0$, либо всюду $\rho_1^z \equiv 1$. Первая производная от $\gamma_3^z - \gamma_1^z$, т. е. от левой части (19:15), равна, очевидно, $2(a+b)\rho_1^z - 2b$. Поэтому в интервале $0 \leq z < \bar{z}'$ эта производная равна $2(a+b)\cdot 0 - 2b = -2b < 0$, если $\rho_1^z \equiv 0$, и $2(a+b)\cdot 1 - 2b = 2a > 0$, если $\rho_1^z \equiv 1$; таким образом, разность $\gamma_3^z - \gamma_1^z$ в интервале $0 \leq z < \bar{z}'$ или монотонно убывает, или монотонно возрастает. Поскольку на правом конце (промежуточная точка $\bar{z}'$) ее значение равно нулю, мы имеем соответственно $\gamma_3^z - \gamma_1^z > 0$ или $< 0$, т. е. соответственно $\gamma_1^z < \gamma_3^z$ или $\gamma_1^z > \gamma_3^z$ всюду на интервале $0 \leq z < \bar{z}'$. Тогда из первого неравенства мы заключаем, что в интервале $0 \leq z < \bar{z}'$ должно быть $\rho_3^z \equiv 0$, $\rho_1^z \equiv 1$, а из последнего, что $\rho_1^z \equiv 0$. Но вначале мы предположили, что на этом интервале соответственно $\rho_1^z \equiv 0$ или $\rho_1^z \equiv 1$. Таким образом, в каждом из случаев получено противоречие.

Следовательно,

$$\bar{z}' = 0. \tag{19:19}$$

**19.8.6.** Теперь для определения $\bar{z}''$ воспользуемся тождеством (19:15), подставив туда промежуточное $z = \bar{z}' = 0$. Мы получаем

$$-(a+b)\int_0^1 \rho_1^{z_1}\,dz_1 + 2b = 0,$$

$$\int_0^1 \rho_1^{z_1}\,dz_1 = \frac{2b}{a+b}.$$

Но (19:17), (19:18), (19:19) дают

$$\int_0^1 \rho_1^{z_1}\,dz_1 = \bar{z}''\frac{b}{a+b} + (1-\bar{z}'')\cdot 1 = 1 - \frac{a}{a+b}\bar{z}''.$$

Таким образом, мы имеем

$$1 - \frac{a}{a+b}\bar{z}'' = \frac{2b}{a+b},$$

$$\frac{a}{a+b}\bar{z}'' = 1 - \frac{2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b},$$

т. е.

$$\bar{z}'' = \frac{a-b}{a}. \tag{19:20}$$

Воспользовавшись (19:17), (19:18), (19:19), (19:20), получаем

$$\rho_1^z = \begin{cases} \dfrac{b}{a+b} & \text{для } 0 \leq z \leq \dfrac{a-b}{a}, \\ 1 & \text{для } \dfrac{a-b}{a} < z \leq 1. \end{cases} \tag{19:21}$$

Вместе с (19:12), (19:13) это полностью описывает стратегию.

## 19.9. Детальный анализ решения

**19.9.1.** Полученные в п. 19.8 результаты показывают, что для рассматриваемой формы покера существует одна и только одна оптимальная стратегия [1]). Она описывается формулами (19:21), (19:12), (19:13) из п. 19.8. Мы изобразили эту стратегию графически, что облегчит последующее ее обсуждение. (См. рис. 24. Фактические пропорции этого чертежа соответствуют отношению $a/b \sim 3$.)

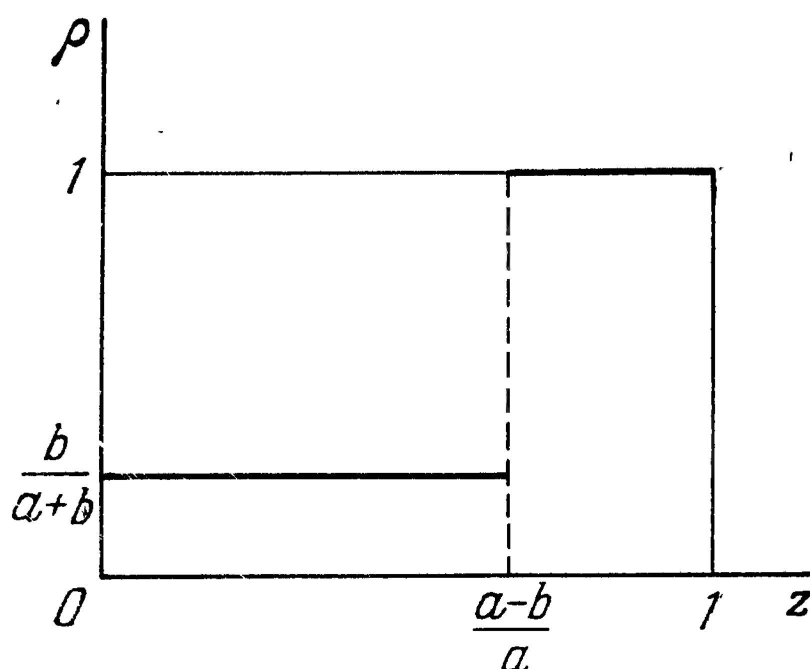


Рис. 24.

Сплошная линия описывает кривую $\rho = \rho_1^z$. Таким образом, высота этой линии над линией $\rho = 0$ равна вероятности высокой ставки $\rho_1^z$; превышение линии $\rho = 1$ над сплошной линией равно вероятности низкой ставки (с обязательным последующим пасованием): $\rho_3^z = 1 - \rho_1^z$.

**19.9.2.** Формулы (19:9:a*), (19:9:b*), (19:9:c*) из п. 19.7 позволяют вычислить теперь коэффициенты $\gamma_j^z$. Вместо формул мы дадим графическую интерпретацию, предоставляя читателю элементарную проверку. (См. рис. 25. Фактические пропорции остались здесь теми же, что и на рис. 24, т. е. $a/b \sim 3$.) Сплошная линия соответствует кривой $\gamma = \gamma_1^z$, точечная линия — кривой $\gamma = \gamma_2^z$, а пунктирная линия — кривой $\gamma = \gamma_3^z$. На рисунке видно, что сплошная и пунктирная линии (т. е. $\gamma_1^z$ и $\gamma_3^z$) совпадают на интервале $0 \leqq z \leqq (a - b)/a$, а линии точечная и пунктирная (т. е. $\gamma_2^z$ и $\gamma_3^z$) — на интервале $(a - b)/a \leqq z \leqq 1$. Каждая из трех кривых составлена из двух отрезков, с общим концом в точке $z = \frac{a-b}{a}$. Фактические значения величин $\gamma_j^z$ в критических точках $z = 0$, $(a - b)/a$, $1$ можно увидеть на рисунке [2]).

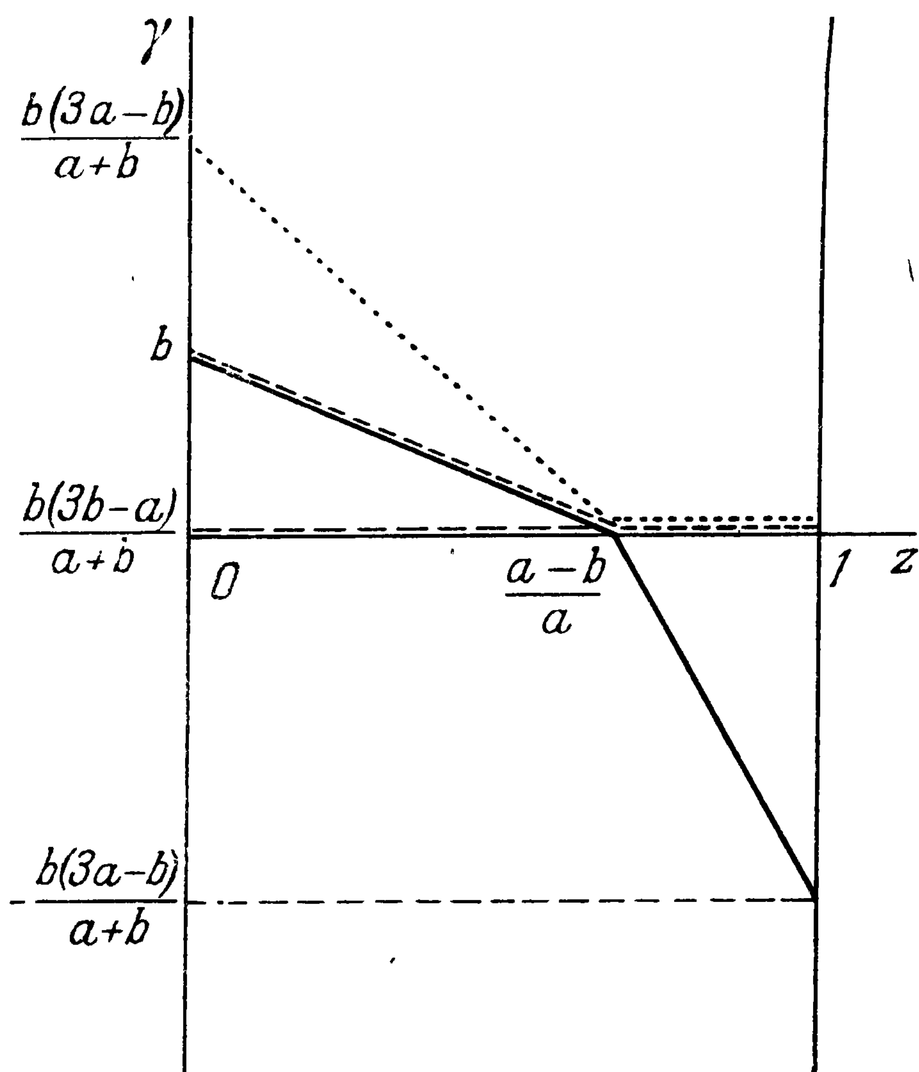


Рис. 25.

**19.9.3.** Сравнение рис. 24 и 25 показывает, что наша стратегия действительно является оптимальной, т. е. что она удовлетворяет условию (19:B) из п. 19.7. В самом деле, на интервале $0 \leqq z \leqq (a - b)/a$, где выполняются оба неравенства $\rho_1^z \neq 0$, $\rho_3^z \neq 0$, как кривая $\gamma_1^z$, так и

---

[1]) Фактически мы доказали только следующее утверждение. Никакая стратегия, отличная от стратегии, определенной в п. 19.8, не может быть оптимальной. То, что эта стратегия на самом деле является оптимальной, можно было бы заключить из существования (по крайней мере) одной оптимальной стратегии, хотя наш переход к «непрерывному» случаю и может вызвать некоторое сомнение. Далее мы убедимся в том, что рассматриваемая нами стратегия является оптимальной, т. е. что она удовлетворяет условию (19:B) из п. 19.7.

[2]) Проверку этих результатов мы предоставляем читателю.

кривая $\gamma_3^z$ являются нижними, т. е. их ординаты равны $\min_j \gamma_j^z$. На интервале $(a-b)/a < z \leqq 1$, где только $\rho_1^z \neq 0$, только одна кривая $\gamma_1^z$ оказывается нижней, т. е. ее ординаты равны $\min_j \gamma_j^z$. (Поведение $\gamma_2^z$ несущественно, поскольку всегда $\rho_2^z = 0$.)

Формула (19:7*) из п. 19.7 позволяет вычислить также значение партии К. Очевидно, К $= 0$. Именно этого значения и следовало ожидать, поскольку игра симметрична.

## 19.10. Интерпретация решения

**19.10.1.** Хотя результаты из пп. 19.8 и 19.9 являются математически завершенными, они, однако, требуют некоторых комментариев и интерпретации, изложением которых мы сейчас и займемся.

Во-первых, изображение оптимальной стратегии, представленное на рис. 24, показывает, что для достаточно высокого расклада оказывается $\rho_1^z = 1$, т. е. игрок должен назначать обязательно высокую ставку. Этот случай соответствует раскладам $z > \frac{a-b}{b}$. Для младших раскладов, однако, $\rho_1^z = \frac{b}{a+b}$, $\rho_3^z = 1 - \rho_1^z = \frac{a}{a+b}$, так что как $\rho_1^z$, так и $\rho_3^z$ отличны от нуля, т. е. игроку следует назначать беспорядочно высокие и низкие ставки (с определенными вероятностями). Этот случай соответствует раскладам $z \leqq \frac{a}{a-b}$. Высокие ставки (в этом случае) будут более редкими, чем низкие; действительно, $\frac{\rho_3^z}{\rho_1^z} = \frac{a}{b}$, а $a > b$. Эта последняя формула показывает также, что последний тип высоких ставок становится все более редким, если размер высокой ставки (по сравнению с низкой) возрастает.

Теперь эти высокие ставки при младших раскладах, которые делаются беспорядочно (с определенными вероятностями) и которые становятся все более редкими с ростом цены высокой ставки, получают очевидную интерпретацию: они являются блефом в обычном покере.

Благодаря большим упрощениям, которые мы приняли при нашем анализе покера, блеф вошел в самом зачаточном виде, но тем не менее признаки его несомненны. Игроку целесообразно всегда назначать высокую ставку при старшем раскладе ($z > (a-b)/a$) и, как правило, назначать низкую ставку (с вероятностью $a/(a+b)$) при младшем раскладе ($z < (a-b)/a$); вместе с тем иногда надо беспорядочно блефовать $\left(\text{с вероятностью } \frac{b}{a+b}\right)$.

**19.10.2.** Во-вторых, условия в зоне блефа, $0 \leqq z \leqq \frac{a-b}{a}$, также проливают некоторый свет на другие факты — на такие последствия отхода от оптимальной стратегии, как «перманентная оптимальность», «защита», «нападение», как это рассматривалось в пп. 17.10.1, 17.10.2.

Предположим, что игрок 2 отклоняется от своей оптимальной стратегии, т. е. использует вероятности $\sigma_1^z$, которые могут отличаться от чисел $\rho_j^z$, полученных выше. Кроме того, предположим, что игрок 1 тем не менее продолжает использовать вероятности $\rho_j^z$, т. е. применяет оптимальную стратегию. Тогда мы можем воспользоваться формулами (19:9:a*), (19:9:b*), (19:9:c*) из п. 19.7 для определения чисел $\gamma_j^z$, графически пред-

ставленных на рис. 25, и с помощью (19:7*) из п. 19.7 вычислить выигрыш в игре для игрока 1:

(19:22) $$K = \sum_j \int_0^1 \gamma_j^z \sigma_j^z \, dz.$$

Поэтому используемые игроком 2 вероятности $\sigma_j^z$ будут оптимальны против используемых игроком 1 вероятностей $\rho_j^z$, если будет выполнено условие, аналогичное условию (19:8) из п. 19.6:

(19:C) Для каждой пары $z$, $j$, для которой $\gamma_j^z$ не достигает минимума (по $j$ [1])), имеем $\sigma_j^z = 0$.

Иными словами, условие (19:C) необходимо и достаточно для того, чтобы вероятности $\sigma_j^z$ были настолько хороши против $\rho_j^z$, насколько вероятности $\rho_j^z$ хороши против самих себя, т. е. дают $K = 0$. В противном случае вероятности $\sigma_j^z$ плохи, т. е. дают $K > 0$. Иными словами:

(19:D) *Ошибка*, т. е. стратегия $\sigma_j^z$, отличающаяся от оптимальной стратегии $\rho_j^z$, *не* приведет к потерям, когда противник придерживается оптимальной стратегии, в том и только том случае, когда величины $\sigma_j^z$ удовлетворяют приведенному выше условию (19:C).

Теперь достаточно мельком взглянуть на рис. 25, чтобы понять, что условие (19:C) означает, что $\sigma_2^z = \sigma_3^z = 0$ для $z > (a-b)/a$, но только $\sigma_2^z = 0$ для $z \leqq (a-b)/a$ [2]). Иными словами, условие (19:C) предписывает назначать высокую ставку и не делать ничего иного для старших раскладов $\left(z > \frac{a-b}{a}\right)$; оно запрещает низкую ставку с последующим пасованием для всех раскладов, но его оказывается недостаточно для задания отношения вероятностей высоких и низких ставок (с последующим пасованием) для младших раскладов, т. е. в зоне блефа $\left(\text{при } z \leqq \frac{a-b}{a}\right)$.

**19.10.3.** Таким образом, любое отклонение от оптимальной стратегии, допускающее нечто большее, чем некорректный блеф, приводит к немедленным потерям. Этого достаточно для партнера, придерживающегося оптимальной стратегии. Некорректный блеф не приводит к потерям против партнера, использующего оптимальную стратегию; но партнер может причинить потери путем надлежащего собственного отклонения от оптимальной стратегии. Итак, важность блефа состоит не в фактической партии, разыгрываемой против оптимально действующего игрока, но в той защите, которую он дает против отклонений партнера от оптимальной стратегии. Это согласуется с замечаниями, сделанными в конце п. 19.2, и, в частности, с предложенной там второй интерпретацией блефа [3]). Действительно, элемент неопределенности, создаваемой блефом, является именно тем типом ограничений на стратегию противника, о котором мы там упоминали и который анализировался в конце п. 19.2.

---

[1]) Мы имеем в виду минимум по $j$, а не по $z$, $j$!

[2]) В действительности можно было допустить даже $\sigma_2^z \neq 0$ для одной точки $z = \frac{a-b}{a}$. Но вероятность этого изолированного значения $z$ равна нулю, и его можно не рассматривать. См. замечание на стр. 223.

[3]) Все сказанное справедливо для рассматриваемой здесь формы покера. Другие точки зрения см. в п. 19.16.

Результаты, полученные нами при изучении блефа, находятся в полном согласии с заключениями из п. 17.10.2. Мы видим, что для этого варианта покера единственная оптимальная стратегия не всегда будет перманентно оптимальной; следовательно, в этом случае не существует перманентно оптимальной стратегии. (См. начало п. 17.10.2, в частности доказательство на стр. 186.) Блеф оказывается защитной мерой в том смысле, как это обсуждалось во второй половине п. 17.10.2.

**19.10.4.** В-третьих, рассмотрим, наконец, отмеченные выше наступательные шаги, т. е. отклонения от оптимальной стратегии, с помощью которых игрок может извлечь пользу из отклонений противника от корректного блефа.

Поменяем игроков ролями. Пусть игрок 1 блефует некорректно, т. е. использует вероятности $\rho_j^z$, отличающиеся от указанных на рис. 24. Поскольку рассматривается некорректный блеф, мы пока предположим, что

$$\rho_2^z = 0 \quad \text{для всех } z,$$

$$\left.\begin{array}{l}\rho_1^z = 1,\\ \rho_3^z = 0\end{array}\right\} \quad \text{для всех } z > \frac{a-b}{a}.$$

Теперь нас интересуют только последствия неравенств

$$\text{(19:23)} \qquad \rho_1^z \gtrless \frac{b}{a+b} \quad \text{для некоторого } z = z_0 < \frac{a-b}{a} \text{ [1]}.$$

Левая часть равенства (19:15) из п. 19.8 остается пока в силе как выражение для $\gamma_3^z - \gamma_1^z$. Рассмотрим теперь некоторое $z < z_0$. Тогда знак $\gtrless$ в (19:23) не влияет на

$$\int_0^z \rho_1^{z_1}\, dz_1,$$

но он увеличивает (уменьшает)

$$\int_z^1 \rho_1^z\, dz_1;$$

следовательно, он уменьшает (соответственно увеличивает) левую часть равенства (19:15), т. е. $\gamma_3^z - \gamma_1^z$. Поскольку разность $\gamma_3^z - \gamma_1^z$ осталась бы равной 0, если бы не изменение (19:23) (см. рис. 25), теперь эта разность $\lessgtr 0$. Поэтому $\gamma_3^z \lessgtr \gamma_1^z$. Рассмотрим, далее, некоторое $z$ из интервала

$$z_0 < z \leqq \frac{a-b}{a}.$$

Знак $\gtrless$ в (19:23) увеличивает (уменьшает) $\int_0^z \rho_1^{z_1}\, dz_1$ и не влияет на $\int_z^1 \rho_1^{z_1}\, dz_1$;

[1] На самом деле нам это необходимо более чем для одного $z$ (см. замечание на стр. 223). Простейшее допущение состоит в том, что эти неравенства выполняются в небольшой окрестности интересующей нас точки $z_0$.

Не представляло бы труда рассмотреть все это строго в смысле замечания на стр. 223 и сноски 4 на стр. 221. Мы отказываемся здесь от этого по изложенным там причинам.

следовательно, он увеличивает (соответственно уменьшает) левую часть равенства (19:15), т. е. $\gamma_3^z - \gamma_1^z$. Поскольку разность $\gamma_3^z - \gamma_1^z$ осталась бы равной нулю, если бы не изменение (19:23) (см. рис. 25), теперь эта разность $\gtrless 0$. Таким образом, $\gamma_3^z \gtrless \gamma_1^z$. Подведем итоги:

(19:E) Изменение знака $\gtrless$ в (19:23) приводит к неравенствам

$$\gamma_3^z \lesseqgtr \gamma_1^z \quad \text{для} \quad z < z_0,$$

$$\gamma_3^z \gtrless \gamma_1^z \quad \text{для} \quad z_0 < z \leqq \frac{a-b}{a}.$$

Следовательно, партнер может выиграть, т. е. уменьшить K в (19:22), за счет использования величин $\sigma_j^z$, которые отличаются от найденных $\rho_j^z$. Для $z < z_0$ следует увеличить $\begin{matrix}\sigma_3^z\\ \sigma_1^z\end{matrix}$ за счет $\begin{matrix}\sigma_1^z\\ \sigma_3^z\end{matrix}$, т. е. уменьшая (увеличивая) $\sigma_1^z$ от значения $\rho_1^z, = \frac{b}{a+b}$ до крайнего значения $\begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}$. А для $z_0 < z \leqq \frac{a-b}{a}$ следует увеличить $\begin{matrix}\sigma_1^z\\ \sigma_3^z\end{matrix}$ за счет $\begin{matrix}\sigma_3^z\\ \sigma_1^z\end{matrix}$, т. е. увеличивая (уменьшая) $\sigma_1^z$ от значения $\rho_1^z$, $\frac{b}{a+b}$ до крайнего значения $\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}$. Иными словами:

(19:F) Если партнер блефует слишком часто (редко) при некотором раскладе $z_0$, то его можно наказать следующим отклонением от оптимальной стратегии: блефовать реже (чаще) при раскладах более слабых, чем $z_0$, и чаще (реже) при раскладах более сильных, чем $z_0$.

Таким образом, следует копировать ошибки партнера при раскладах более сильных, чем $z_0$, и поступать противоположным образом при более слабых раскладах.

Мы привели точное описание того, как откорректировать блефование, для того, чтобы защититься от слишком часто или слишком редко блефующего партнера, и описание непосредственных выводов. Эти соображения можно было бы получить и иначе, но мы не собираемся этим заниматься.

## 19.11. Более общие формы покера

**19.11.** Несмотря на то, что проведенное только что обсуждение пролило в достаточной мере свет на структуру стратегий и возможности покера, однако оно вообще оказалось возможным только благодаря существенному упрощению правил этой игры. Эти упрощения были введены и сформулированы в пп. 19.1, 19.3 и 19.7. Для правильного понимания этой игры нам следует теперь затратить усилия, чтобы от этих упрощений избавиться.

Сказанное отнюдь не означает, что все исключенные нами причудливые усложнения этой игры (см. п. 19.1) должны быть обязательно восстановлены [1]), но было бы весьма полезно вновь рассмотреть некоторые простые и важные особенности этой игры, которые до сих пор опускались. В частности, имеется в виду следующее:

(A) Расклады должны быть дискретными, а не непрерывными (см. п. 19.7).

(B) Следует допустить ставки более чем двух уровней (см. п. 19.3).

[1]) Мы не собираемся рассматривать что-либо отличное от игры двух лиц!

(С) Каждому игроку надо предоставить возможность многократно делать ставки; следовало бы также рассмотреть случай, когда игроки делают ставки по очереди, а не одновременно (см. п. 19.3).

Задача, в которой учитываются одновременно все эти требования (А), (В) и (С) и требуется найти оптимальные стратегии, не решена. Поэтому сейчас мы должны удовлетвориться раздельным добавлением требований (А), (В), (С).

Для (А) и (В) известны полные решения, в то время как для (С) полученные результаты очень незначительны. Подробное рассмотрение всех этих математических построений завело бы нас слишком далеко, поэтому мы сжато приведем эти результаты для (А), (В), (С).

## 19.12. Дискретные расклады

**19.12.1.** Рассмотрим сначала (А), т. е. вернемся к дискретной шкале раскладов $s = 1, \ldots, S$, которая была введена в конце п. 19.1.2 и использована в пп. 19.4—19.7. В этом случае решение во многом похоже на решение, описанное на рис. 24.

Вообще, $\rho_2^s = 0$ и существует такое $s^0$, что $\rho_1^s = 1$ для $s > s^0$, в то время как $\rho_1^s \neq 0$ для $s < s^0$. Кроме того, если мы изменим шкалу $z$ (см. табл. 18), то величина $(s^0 - 1)/(S - 1)$ будет очень близка к $(a - b)/a$ [1]). Далее, точно так же как на рис. 24, мы имеем зону блефа, а выше нее зону высоких ставок.

Но числа $\rho_1^s$ для $s < s^0$, т. е. в зоне блефа, не все равны или хотя бы близки к $b/(a + b)$ на рис. 24 [2]). Они отклоняются от этого значения на величины, зависящие от некоторых арифметических особенностей числа $S$, но не стремящиеся к нулю при $S \to \infty$. Однако, средние значения $\rho_1^s$ стремятся к $\frac{b}{a+b}$ [3]). Иными словами:

Оптимальная стратегия дискретной игры очень похожа на оптимальную стратегию непрерывной игры. Это справедливо для всех деталей, что касается разбиения на две зоны (зону блефа и зону высоких ставок); то же относится к положениям и размерам этих зон и к явлениям, происходящим в зоне высоких ставок. Однако в зоне блефа это применимо только к формулировкам «в среднем» (относительно нескольких раскладов примерно равной силы). Точные процедуры для отдельных раскладов могут сильно отличаться от приведенных на рис. 24 и зависят от арифметических особенностей чисел $s$ и $S$ (по отношению к $a/b$) [4]).

**19.12.2.** Таким образом, стратегия, соответствующая стратегии на рис. 24 для $s < s^0$, т. е. стратегия $\rho_1^s \equiv \frac{b}{a+b}$ для всех $s < s^0$, не является оптимальной и отличается от нее значительно. Тем не менее можно показать, что максимальные потери, которые можно понести, играя эту «среднюю» стратегию, невелики. Более точно, они стремятся к нулю при $S \to \infty$ [5]).

---

[1]) Точнее говоря, $(s^0 - 1)/(S - 1) \to (a - b)/a$ при $S \to \infty$.

[2]) То есть числа $\rho_1^s$ не стремятся к $b/(a + b)$ при $S \to \infty$, как бы ни изменялось $s$.

[3]) Фактически $^1/_2\,(\rho_1^s + \rho_1^{s+1}) = b/(a + b)$ для большинства $s < s^0$.

[4]) Таким образом, если говорить о рис. 24, левая часть графика не будет прямой линией $\left(\rho = \frac{b}{a+b} \text{ в } 0 \leqq z \leqq \frac{a-b}{a}\right)$, но она будет колебаться около нее как около среднего.

[5]) Фактически эта сходимость имеет порядок $1/S$. Напомним, что в реальном покере $S$ имеет порядок 2,5 миллиона (см. сноску 4 на стр. 209).

Итак, мы видим, что в дискретной игре корректное использование блефа является очень сложным и деликатным делом, которое предоставляет весьма небольшие преимущества блефующему игроку.

Возможно, что это явление типичное и встречается в более сложных реальных играх. Оно показывает, сколь осторожным следует быть при формулировке предположений или утверждений, затрагивающих непрерывность в этой теории [1]). Но практическая значимость — т. е. размер выигрыша или проигрыша — по-видимому, не велика, и все это, вероятно, является «белым пятном» даже для самых опытных игроков.

## 19.13. $m$ возможных ставок

**19.13.1.** Рассмотрим второй случай, (B), т. е. предположим, что расклады по-прежнему непрерывны, но допускается назначение ставок более чем двумя способами. Иными словами, мы заменяем две ставки

$$a > b\ (> 0)$$

на ряд, скажем, из $m$ ставок

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_{m-1} > a_m \quad (> 0).$$

В этом случае решение также напоминает решение, описываемое на рис. 24 [2]). Существует такое [3]) $z^0$, что для $z > z^0$ игроку не следует делать ничего, кроме назначения самых высоких ставок, в то время как при $z < z^0$ ему следует случайным образом с определенными вероятностями варьировать ставки (назначать различные ставки, всегда включая самую большую $a_1$). Какие ставки и с какими вероятностями следует делать, определяется значением $z$.

Замечание. Если ставки, которые он должен назначить, суть $a_1, a_p, a_q, \ldots, a_n$ $(1 < p < q < \ldots < n)$, то можно показать, что вероятности, с которыми эти ставки следует назначать, должны быть соответственно равны

$$\frac{1}{ca_1}, \frac{1}{ca_p}, \frac{1}{ca_q}, \ldots, \frac{1}{ca_n} \qquad \left(c = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_p} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Иными словами, вероятность каждой ставки, которая может быть назначена, должна быть обратно пропорциональна ее величине.

Какие именно $a_p, a_q, \ldots, a_m$ следует выбирать на самом деле при данном $z$, определяется более сложным критерием, который мы не будем здесь рассматривать.

Заметим, что величина $c$ необходима только для того, чтобы сумма всех вероятностей была равна 1. Читатель может сам проверить, что вероятности на рис. 24 равны этим значениям.

Итак, мы имеем зону блефа и выше нее зону высоких ставок — фактически же только зону наивысших ставок,— именно так, как на рис. 24. Но блеф — в его собственной зоне $z \leqq z^0$ — имеет более сложную и изменяющуюся структуру, чем на рис. 24.

Мы не будем вдаваться в детальный анализ этой структуры, хотя это и представляет определенный интерес. Однако одну из ее особенностей мы упомянем.

---

[1]) В связи с этим напомним проблему, сформулированную во второй части замечания на стр. 220.

[2]) На самом деле это верно только при некотором дополнительном ограничении, запрещающем раскрытие при более высокой ставке. Иными словами, предполагается, что каждый игрок сразу делает свою последнюю наивысшую ставку и пасует (соглашаясь с последствиями), если ставка противника превзойдет его собственную.

[3]) Аналог величины $z = \dfrac{a-b}{a}$ на рис. 24.

**19.13.2.** Пусть даны два числа

$$a > b > 0.$$

Возьмем их в качестве высшей и низшей ставок:

$$a_1 = a, \quad a_m = b.$$

Далее, пусть $m \to \infty$ и выберем оставшиеся ставки $a_2, \ldots, a_{m-1}$ так, чтобы они заполняли интервал

$$b \leqq x \leqq a \tag{19:24}$$

с неограниченно возрастающей плотностью (см. приведенные ниже в сноске 1 на этой стр. два примера). Если теперь описанная выше оптимальная стратегия стремится к пределу, т. е. к асимптотической стратегии при $m \to \infty$, то предельную стратегию можно интерпретировать как оптимальную стратегию для игры, в которой размеры ставок лежат между верхней и нижней границами ($a$ и $b$) и могут быть любыми числами между ними (т. е. в (19:24)). Тем самым снимается упомянутое в начале п. 19.3 требование минимального интервала между ставками.

Теперь этого нет. Например, мы можем вставить между $a_1 = a$ и $a_m = b$ числа $a_2, \ldots, a_{m-1}$ как в арифметической, так и в геометрической прогрессии [1]). В обоих случаях при $m \to \infty$ получаются некоторые асимптотические стратегии, но эти две стратегии отличаются многими существенными деталями.

Если мы рассмотрим игру, в которой все ставки (19:24) допустимы и в этом смысле являются равноправными, то в этом случае возможно непосредственное нахождение оптимальных стратегий. При этом оказывается, что оптимальными будут не только обе упомянутые выше стратегии, но и многие другие.

Это показывает, к каким осложнениям можно прийти, отказавшись от минимального интервала между ставками. Именно оптимальная стратегия предельного случая не может служить приближением для оптимальных стратегий всех близких случаев с конечным числом ставок. Тем самым еще раз подчеркивается значимость заключительных замечаний в п. 19.12.

## 19.14. Чередующиеся ставки

**19.14.1.** Рассмотрим третий, последний случай, (C). Единственный полученный пока результат в этом направлении состоит в том, что мы можем заменить одновременные ставки обоих игроков на две последовательные, т. е. договориться, что сначала назначает ставку игрок 1, а затем игрок 2.

Таким образом, формулированные в п. 19.4 правила модифицируются следующим образом.

---

[1]) В первом случае они определяются по формуле

$$a_p = \frac{1}{m-1}\left((m-p)\,a + (p-1)\,b\right) \quad \text{для} \quad p = 1, 2, \ldots, m-1, m,$$

во втором случае—по формуле

$$a_p = \sqrt[m-1]{a^{m-p} b^{p-1}} \quad \text{для} \quad p = 1, 2, \ldots, m-1, m.$$

Сначала каждый игрок в результате случайного хода получает свой расклад $s = 1, \ldots, S$; каждое из этих чисел имеет одну и ту же вероятность $1/S$. Обозначим расклады игроков 1 и 2 соответственно через $s_1$ и $s_2$.

После этого [1]) игрок 1 своим личным ходом выбирает либо $a$, либо $b$, т. е. высокую или низкую ставку [2]). Он осуществляет это только на основе собственного расклада, ничего при этом не зная о раскладе партнера. Если его ставка низкая, то игра закончена. Если его ставка высокая, то игрок 2 личным ходом выбирает [3]) либо $a$, либо $b$, т. е. высокую или низкую ставку. Он осуществляет это только на основе собственного расклада и выбора противника, ничего не зная при этом о раскладе партнера.

В этом состоит партия игры. По ее окончании расплата производится следующим образом. Если ставка игрока 1 низкая, то при $s_1 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} s_2$ игрок 1 получает от игрока 2 соответственно $\begin{matrix} b \\ 0 \\ -b \end{matrix}$. Если ставки обоих игроков высокие, то при $s_1 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} s_2$ игрок 1 получает от игрока 2 соответственно $\begin{matrix} a \\ 0 \\ -a \end{matrix}$. Если ставка 1 высокая, а ставка игрока 2 низкая, то игрок 1 получает [4]) от игрока 2 только $b$.

**19.14.2.** Рассмотрение чистых и смешанных стратегий теперь можно провести, по существу, точно так же, как это было сделано для исходного варианта покера в п. 19.5.

Укажем основные направления этого рассмотрения, что будет вполне понятно для читателя, если он вспомнит сказанное в пп. 19.4—19.7.

Чистая стратегия в этой игре состоит, очевидно, в следующем. Для каждого расклада $s = 1, \ldots, S$ указывается назначаемая ставка: высокая или низкая. Проще всего это описать с помощью числового индекса: $i_s = 1, 2$, причем $i_s = 1$ соответствует высокой ставке, а $i_s = 2$ — низкой. Таким образом, стратегия игрока состоит в задании таких индексов $i_s$ для каждого $s = 1, \ldots, S$, т. е. в задании последовательности $i_1, \ldots, i_S$.

Это относится к каждому из игроков 1 и 2; поэтому описанную выше стратегию мы будем обозначать через $\Sigma_1(i_1, \ldots, i_S)$ или соответственно через $\Sigma_2(j_1, \ldots, j_S)$. Таким образом, количество стратегий у игроков одинаково — их столько же, сколько последовательностей $i_1, \ldots, i_S$, т. е. число их равно $2^S$. В обозначениях из п. 11.2.2 мы имеем

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = 2^S.$$

(Подчеркнем, что рассматриваемая игра не симметрична!)

Теперь мы должны записать выигрыш, получаемый игроком 1, если игроки используют стратегии $\Sigma_1(i_1, \ldots, i_S)$, $\Sigma_2(j_1, \ldots, j_S)$ соответственно. Он определяется элементом матрицы $\mathscr{K}(i_1, \ldots, i_S \mid j_1, \ldots, j_S)$. Если расклады игроков будут $s_1$ и $s_2$, то выигрыш игрока 1 можно записать, используя сформулированные выше правила, следующим образом. Он равен $\mathscr{L}_{\operatorname{sign}(s_1-s_2)}(i_{s_1}, j_{s_2})$, где $\operatorname{sign}(s_1 - s_2)$ — знак числа $s_1 - s_2$, а три функции

$$\mathscr{L}_+(i, j), \quad \mathscr{L}_0(i, j), \quad \mathscr{L}_-(i, j)$$

---

[1]) Мы продолжаем с этого места, как если бы игрок 2 уже сделал низкую ставку, а игрок 1 выбирал бы, что ему делать: раскрывать или повышать. На этом этапе мы рассматриваем пасование.

[2]) То есть повышает или раскрывается (см. сноску [1])).

[3]) То есть раскрывается или пасует.

[4]) При интерпретации этих правил вспомним приведенные выше сноски. Формально говоря, следовало бы вспомнить и замечание на стр. 213.

можно задать с помощью матриц, представленных в табл. 19—21.

Таблица 19

| $i \backslash j$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $a$ | $b$ |
| 2 | $b$ | $b$ |

Таблица 20

| $i \backslash j$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | $b$ |
| 2 | 0 | 0 |

Таблица 21

| $i \backslash j$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $-a$ | $b$ |
| 2 | $-b$ | $-b$ |

Величины $s_1$, $s_2$ являются результатом описанных выше случайных ходов. Следовательно,

$$\mathcal{K}(i_1, \ldots, i_S \mid j_1, \ldots, j_S) = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, s_2 = 1}^{S} \mathcal{L}_{\operatorname{sign}(s_1 - s_2)}(i_{s_1}, i_{s_2}).$$

**19.14.3.** Перейдем теперь к смешанным стратегиям в смысле п. 17.2. Ими являются векторы $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, принадлежащие $S_\beta$. Мы должны обозначить компоненты этих векторов подобно тому, как это было сделано для чистых стратегий. Вместо $\xi_{\tau_1}$, $\eta_{\tau_2}$ мы должны писать $\xi_{i_1, \ldots, i_S}$, $\eta_{i_1, \ldots, i_S}$.

Выпишем функцию (17:2) из п. 17.4.1, определяющую ожидаемый выигрыш игрока 1. Мы имеем

$$\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_S \\ j_1, \ldots, j_S}} \mathcal{K}(i_1, \ldots, i_S \mid j_1, \ldots, j_S)\, \xi_{i_1, \ldots, i_S} \eta_{j_1, \ldots, j_S} =$$

$$= \frac{1}{S^2} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_S, \\ j_1, \ldots, j_S}} \sum_{s_1, s_2} \mathcal{L}_{\operatorname{sign}(s_1 - s_2)}(i_{s_1}, j_{s_2})\, \xi_{i_1, \ldots, i_S} \eta_{j_1, \ldots, j_S}.$$

Целесообразно изменить порядок суммирования и написать

$$\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, s_2} \sum_{i_1, \ldots, i_S, j_1, \ldots, j_S} \mathcal{L}_{\operatorname{sign}(s_1 - s_2)}(i_{s_1}, j_{s_2})\, \xi_{i_1, \ldots, i_S} \eta_{j_1, \ldots, j_S}.$$

Если мы теперь положим

(19:25) $$\rho_i^{s_1} = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_S, \\ \text{исключая } i_{s_1}}} \xi_{i_1, \ldots, i_S}$$

и

(19:26) $$\sigma_j^{s_2} = \sum_{\substack{j_1, \ldots, j_S, \\ \text{исключая } j_{s_2}}} \eta_{j_1, \ldots, j_S},$$

то приведенное выше равенство примет вид

(19:27) $$\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, s_2} \sum_{i, j} \mathcal{L}_{\operatorname{sign}(s_1 - s_2)}(i, j)\, \rho_i^{s_1} \sigma_j^{s_2}.$$

**19.14.4.** Все сказанное в точности соответствует проделанному в п. 19.5.2. Как и там, формула (19:25) показывает, что $\rho_i^{s_1}$ есть вероятность того, что игрок 1, использующий смешанную стратегию $\vec{\xi}$, выберет $i$, имея расклад $s_1$, а формула (19:26) показывает, что $\sigma_j^{s_2}$ есть вероятность того, что игрок 2, использующий смешанную стратегию $\vec{\eta}$, выберет $j$, имея расклад $s_2$. Снова интуитивно ясно, что ожидаемое значение K $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ зависит только от этих вероятностей, а не непосредственно от определяющих их вероятностей $\xi_{i_1, \ldots, i_S}$, $\eta_{j_1, \ldots, j_S}$. Равенство (19:27) выражает именно этот факт, и на основе этого его можно было бы получить непосредственно.

Понятно также, что величины $\rho_i^{s_1}$, $\sigma_j^{s_2}$, как по своему смыслу, так и в силу их формальных определений из (19:25), (19:26) удовлетворяют условиям

$$\text{(19:28)} \qquad \text{все } \rho_i^{s_1} \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{2} \rho_i^{s_1} = 1$$

и

$$\text{(19:29)} \qquad \text{все } \sigma_j^{s_2} \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{2} \sigma_j^{s_2} = 1$$

и что произвольные $\rho_i^{s_1}$, $\sigma_j^{s_2}$, удовлетворяющие этим условиям, можно получить из надлежащих $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ по формулам (19:25) и (19:26). (См. соответствующий шаг в п. 19.5.3 и, в частности, сноску 1 на стр. 216.) Благодаря этому можно ввести двумерные векторы

$$\vec{\rho}^{s_1} = \{\rho_1^{s_1}, \rho_2^{s_1}\}, \quad \vec{\sigma}^{s_2} = \{\sigma_1^{s_2}, \sigma_2^{s_2}\}.$$

Тогда условия (19:28) и (19:29) выражают именно тот факт, что все $\vec{\rho}^{s_1}$, $\vec{\sigma}^{s_2}$ принадлежат $S_2$.

Итак, вектор $\vec{\xi}$ (или $\vec{\eta}$) принадлежит $S_3$, т. е. зависит от $\beta - 1 = 2^S - 1$ параметров; $\vec{\rho}^{s_1}$ (или $\sigma_j^{s_2}$) составляют множество из $S$ векторов из $S_2$ (т. е. каждый вектор зависит от одного числового параметра); следовательно, для задания этого множества нужно ровно $S$ числовых констант. Таким образом, $2^S - 1$ мы свели к $S$. (См. конец п. 19.5.3).

**19.14.5.** Перепишем теперь (19:27) в соответствии с п. 19.6:

$$\text{(19:30)} \qquad \mathrm{K}(\vec{\rho}^1, \ldots, \vec{\rho}^S \mid \vec{\sigma}^1, \ldots, \vec{\sigma}^S) = \frac{1}{S} \sum_{s_2, j} \gamma_j^{s_2} \sigma_j^{s_2}$$

с коэффициентами

$$\frac{1}{S} \gamma_j^{s_2} = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, i} \mathscr{L}_{\operatorname{sign}(s_1 - s_2)}(i, j)\, \rho_i^{s_1}$$

или, используя матричные схемы табл. 19—21,

$$\text{(19:31:a)} \qquad \gamma_1^{s_2} = \frac{1}{S} \left\{ \sum_{s_1=1}^{s_2-1} (-a\rho_1^{s_1} - b\rho_2^{s_1}) + \sum_{s_1=s_2+1}^{S} (a\rho_1^{s_1} + b\rho_2^{s_1}) \right\},$$

$$\text{(19:31:b)} \qquad \gamma_2^{s_2} = \frac{1}{S} \left\{ \sum_{s_1=1}^{s_2-1} (b\rho_1^{s_1} - b\rho_2^{s_1}) + b\rho_1^{s_2} + \sum_{s_1=s_2+1}^{S} (b\rho_1^{s_1} + b\rho_2^{s_1}) \right\}.$$

Поскольку эта игра уже не симметрична, нам нужны такие модификации формул, в которых роли двух игроков меняются. Это следующие формулы:

$$\text{(19:32)} \qquad \mathrm{K}(\vec{\rho}^1, \ldots, \vec{\rho}^S \mid \vec{\sigma}^1, \ldots, \vec{\sigma}^S) = \frac{1}{S} \sum_{s_1, i} \delta_i^{s_1} \rho_i^{s_1},$$

с коэффициентами

$$\frac{1}{S} \delta_i^{s_1} = \frac{1}{S^2} \sum_{s_2, j} \mathscr{L}_{\mathrm{sign}\,(s_1 - s_2)}(i, j)\, \sigma_j^{s_2}$$

или, если использовать матричные схемы табл. 20—21,

$$\text{(19:33:a)} \qquad \delta_1^{s_1} = \frac{1}{S} \left\{ \sum_{s_2=1}^{s_1-1} (a\sigma_1^{s_2} + b\sigma_2^{s_2}) + b\sigma_2^{s_1} + \sum_{s_2=s_1+1}^{S} (-a\sigma_1^{s_2} + b\sigma_2^{s_2}) \right\},$$

$$\text{(19:33:b)} \qquad \delta_2^{s_2} = \frac{1}{S} \left\{ \sum_{s_2=1}^{s_1-1} (b\sigma_1^{s_2} + b\sigma_2^{s_2}) + \sum_{s_2=s_1+1}^{S} (-b\sigma_1^{s_2} - b\sigma_2^{s_2}) \right\}.$$

Далее, критерии того, что стратегии оптимальны, остаются, по существу, теми же, что и в п. 19.6. Это значит, что, благодаря асимметричности рассматриваемого сейчас варианта, наш критерий будет получен из общего критерия (17:D) в п. 17.9, точно так же, как можно было бы из симметричного критерия в конце п. 17.11.2 получить критерий в п. 19.6.

(19:G) Векторы $\vec{\rho}^1, \ldots, \vec{\rho}^S$ и $\vec{\sigma}^1, \ldots, \vec{\sigma}^S$ (все они принадлежат $S_2$) описывают оптимальную стратегию в том и только том случае, когда справедливо следующее:

Для каждой пары $s_2$, $j$, для которой $\gamma_j^{s_2}$ не достигает минимума (по $j$ [1])), имеем $\sigma_j^{s_2} = 0$. Для каждой пары $s_1$, $i$, для которой $\delta_i^{s_1}$ не достигает максимума (по $i$ [1])), имеем $\rho_i^{s_1} = 0$.

**19.14.6.** Заменим теперь дискретные расклады $s_1$, $s_2$ на непрерывные в смысле п. 19.7. (См., в частности, табл. 18.) Это приводит, как было описано в п. 19.7, к замене векторов $\vec{\rho}^{s_1}$, $\vec{\sigma}^{s_2}$ ($s_1, s_2 = 1, \ldots, S$) на векторы $\vec{\rho}^{z_1}$, $\vec{\sigma}^{z_2}$ ($0 \leqq z_1, z_2 \leqq 1$), которые по-прежнему являются вероятностными векторами той же самой природы, т. е. принадлежат $S_2$. Так вместо компонент $\rho_i^{s_1}$, $\sigma_j^{s_2}$ появляются компоненты $\rho_i^{z_i}$ $\sigma_j^{z_2}$. Аналогично величины $\delta_i^{s_1}$, $\gamma_j^{s_2}$ переходят в $\delta_i^{z_1}$, $\gamma_j^{z_2}$. Суммы в наших формулах (19:30), (19:31:a), (19:31:b) и (19:32), (19:33:a), (19:33:b) переходят в интегралы, подобно тому как это было с (19:7*), (19:9:a*), (19:9:b*), (19:9:c*) в п. 19.7. Итак, мы получаем

$$\text{(19:30*)} \qquad \mathrm{K} = \sum_j \int_0^1 \gamma_j^{z_2} \sigma_j^{z_2}\, dz_2,$$

$$\text{(19:31:a*)} \qquad \gamma_1^{z_2} = \int_0^{z_2} (-a\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1})\, dz_1 + \int_{z_2}^1 (a\rho_1^{z_1} + b\rho_2^{z_1})\, dz_1,$$

$$\text{(19:31:b*)} \qquad \gamma_2^{z_2} = \int_0^{z_2} (b\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1})\, dz_1 + \int_z^1 (b\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1})\, dz_1$$

---

[1]) Имеется в виду по $j$ ($i$), но не по $s_2$, $j$ ($s_1$, $i$)!

и

(19:32*)
$$\mathrm{K} = \sum_i \int_0^1 \delta_i^{z_1} \rho_i^{z_1}\, dz_1,$$

(19:33:a*)
$$\delta_1^{z_1} = \int_0^{z_1} (a\sigma_1^{z_2} + b\sigma_2^{z_2})\, dz_2 + \int_{z_1}^1 (-a\sigma_1^{z_2} + b\sigma_2^{z_2})\, dz_2,$$

(19:33:b*)
$$\delta_2^{z_1} = \int_0^{z_1} (b\sigma_1^{z_2} + b\sigma_2^{z_2})\, dz_2 + \int_{z_1}^1 (-b\sigma_1^{z_2} - b\sigma_2^{z_2})\, dz_2.$$

Соответственно преобразуется теперь и наш критерий для оптимальных стратегий. (Подобно тому как был осуществлен переход от дискретного критерия в п. 19.6 к непрерывному критерию в п. 19.7.) Мы получаем:

(19:H) Векторы $\vec{\rho}^{z_1}$ и $\vec{\sigma}^{z_2}$ ($0 \leqq z_1, z_2 \leqq 1$), принадлежащие $S_2$, описывают оптимальную стратегию в том и только том случае, если:

Для всех $z_2$, $j$, для которых $\gamma_j^{z_2}$ не достигает минимума (по $j$ [1])), будет $\sigma_j^{z_2} = 0$. Для всех $z_1$, $i$, для которых $\delta_i^{z_1}$ не достигает максимума (по $i$ [1])), будет $\rho_i^{z_1} = 0$.

## 19.15. Математическое описание всех решений

**19.15.1.** Нахождение оптимальных стратегий $\vec{\rho}^z$ и $\vec{\sigma}^z$, т. е. решений, определяемых неявным условием, установленным в конце п. 19.14, может быть осуществлено полностью. Математические методы, которые позволяют это сделать, аналогичны тем, которые были использованы для нахождения в п. 19.8 оптимальных стратегий в нашем исходном варианте покера,

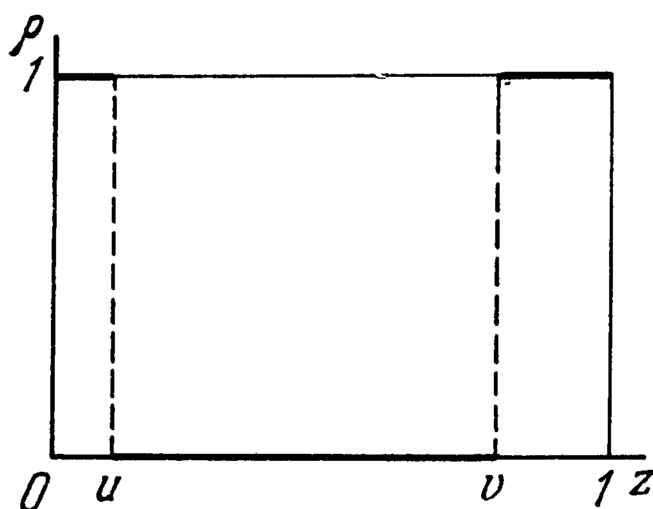


Рис. 26.

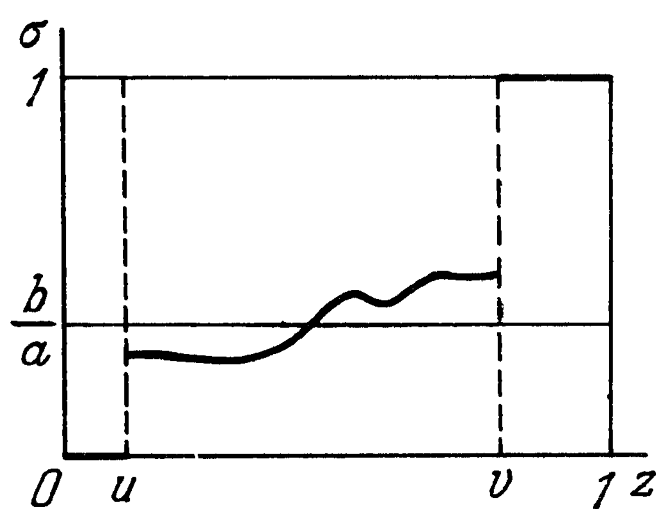


Рис. 27.

т. е. решений, задаваемых неявным условием, сформулированным в конце п. 19.7.

Мы не будем приводить здесь математического рассмотрения, но опишем оптимальные стратегии $\vec{\rho}^z$ и $\vec{\sigma}^z$, которые оно дает.

Существует одна и только одна оптимальная стратегия $\vec{\rho}^z$, в то время как оптимальные стратегии $\vec{\sigma}^z$ образуют обширное семейство. См. рис. 26, 27. Фактические пропорции этих рисунков соответствуют случаю $a/b \sim 3$. Здесь

$$u = \frac{(a-b)\,b}{a\,(a+3b)}, \quad v = \frac{a^2+2ab-b^2}{a\,(a+3b)}.$$

[1]) Имеется в виду по $j$ ($i$), а не по $z_2$, $j$ ($z_1$, $i$)!

Сплошные линии изображают соответственно кривые $\rho = \rho_1^z$ и $\sigma = \sigma_1^z$. Таким образом, превышение ординат сплошной линии над линией $\rho = 0$ $(\sigma = 0)$ равно вероятности высокой ставки $\rho_1^z$ $(\sigma_1^z)$, а превышение ординат линии $\rho = 1$ $(\sigma = 1)$ над сплошной линией равно вероятности низкой ставки $\rho_2^z = 1 - \rho_1^z$ $(\sigma_2^z = 1 - \sigma_1^z)$. Неправильная часть кривой $\sigma = \sigma_1^z$ (см. рис. 27) в интервале $u \leqq z \leqq v$ представляет сложность оптимальных стратегий $\vec{\sigma}^z$. Действительно, эта часть кривой $\sigma = \sigma_1^z$ удовлетворяет следующим (необходимым и достаточным) условиям:

$$\frac{1}{v-z_0}\int_{z_0}^{v} \sigma_1^z\,dz \begin{cases} =\dfrac{b}{a}, & \text{если} \quad z_0 = u, \\ \geqq \dfrac{b}{a}, & \text{если} \quad u < z_0 < v. \end{cases}$$

Это означает, что между $u$ и $v$ среднее значение $\sigma_1^z$ равно $b/a$, а на правом конце каждого такого интервала среднее значение $\sigma_1^z \geqq b/a$.

Таким образом, как $\vec{\rho}^z$, так и $\vec{\sigma}^z$ соответствуют трем различным типам поведений на этих трех интервалах[1]).

Первый: $0 \leqq z < u$. Второй: $u \leqq z \leqq v$. Третий: $v < z \leqq 1$. Длины этих интервалов соответственно равны $u$, $v - u$ и $1 - v$, а довольно сложные выражения для $u$ и $v$ лучше всего запомнить с помощью следующих легко проверяемых пропорций:

$$\frac{u}{1-u} = \frac{a-b}{a+b},$$

$$\frac{v-u}{1-u} = \frac{a}{b}.$$

**19.15.2.** Формулы (19:31:a*), (19:31:b*) и (19:33:a*), (19:33:b*) позволяют теперь вычислить коэффициенты $\gamma_j^z$, $\delta_j^z$. Вместо формул (как и в п. 19.9 на рис. 25) мы дадим графическое представление, оставляя элементарную проверку читателю. Для проверки, являются ли $\vec{\rho}^z$, $\vec{\sigma}^z$ оптимальными стратегиями, нужны только разности $\delta_1^z - \delta_2^z$, $\gamma_2^z - \gamma_1^z$. Действительно, критерий в конце п. 19.14 можно переформулировать следующим образом.

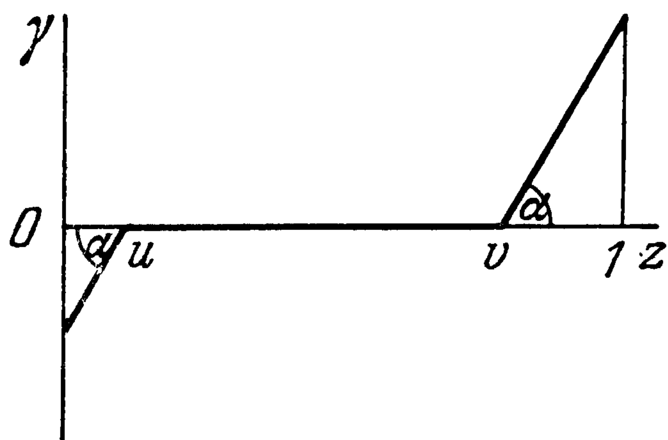



Рис. 28.

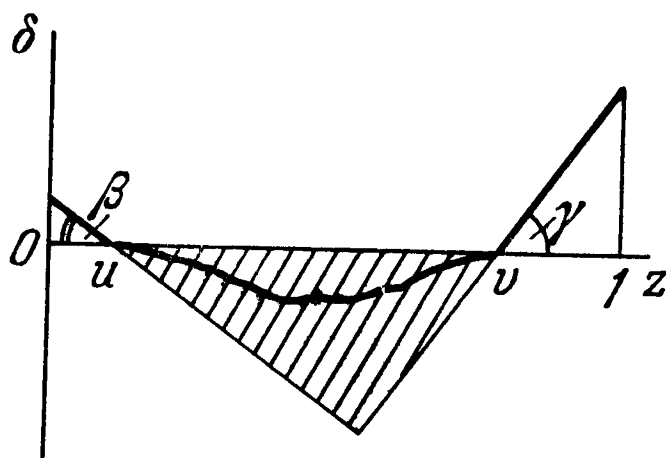



Рис. 29.

Как только разность $>0$, должно быть $\rho_2^z = 0$ или соответственно $\sigma_2^z = 0$, и как только разность $<0$, то $\rho_1^z = 0$ или соответственно $\sigma_1^z = 0$. Поэтому мы приводим графики этих разностей. (См. рис. 28, 29. Фактические пропорции этих рисунков соответствуют пропорциям рис. 26, 28, т. е. $a/b \sim 3$. Здесь $\operatorname{tg}\alpha = 2a$, $\operatorname{tg}\beta = 2b$, $\operatorname{tg}\gamma = 2(a - b)$.)

Линия на рис. 28 изображает кривую $\gamma = \gamma_2^z - \gamma_1^z$, а линия на рис. 29 изображает кривую $\delta = \delta_1^z - \delta_2^z$. Нерегулярная часть кривой $\delta = \delta_1^z - \delta_2^z$

[1]) О граничных точках этих интервалов см. замечание на стр. 223.

(см. рис. 29) на интервале $u \leqq z \leqq v$ соответствует аналогичной нерегулярной части кривой $\sigma = \sigma_1^z$ (на рис. 27) на том же самом интервале, т. е. характеризует сложность оптимальных стратегий $\vec{\sigma}_1^z$. Ограничение, наложенное на часть исследуемой кривой $\sigma = \sigma_1^z$ (см. обсуждение после рис. 27), означает, что эта часть кривой $\delta = \delta_1^z - \delta_2^z$ должна лежать в заштрихованном треугольнике (см. рис. 29).

**19.15.3.** Сравнение рис. 26 с рис. 28 и рис. 27 с рис. 29 показывает, что наши стратегии действительно являются оптимальными, т. е. они удовлетворяют (19:H). Мы предоставляем читателю проверить это, аналогично тому как это было сделано при сравнении рис. 24 и рис. 25 в п. 19.9.

Из рис. (19:30*) или (19:32*) в п. 19.14.6 можно получить также и значение K. Оно таково [1]):

$$K = bu = \frac{(a-b)\,b^2}{a\,(a+3b)}.$$

Таким образом, игрок 1 имеет положительное ожидаемое значение партии — преимущество, являющееся правдоподобным следствием обладания инициативой [2]).

## 19.16. Интерпретация решений. Заключение

**19.16.1.** Точно так же как в п. 19.10 обсуждались результаты, полученные в пп. 19.8, 19.9, следовало бы обсудить и результаты, полученные в п. 19.15. Мы не хотим этого делать в полном объеме и поэтому сделаем лишь несколько замечаний.

Мы видели, что на рис. 26 и 27 появляются три зоны вместо двух зон на рис. 24. На всех этих рисунках (т. е. для обоих игроков) наивысшая зона (крайняя справа) соответствует только высоким ставкам. Однако поведение в других зонах не столь единообразно.

Для игрока 2 (рис. 27) средняя зона описывает тот тип блефа, который мы имели в самой низкой зоне на рис. 24 — случайным образом чередуются высокая и низкая ставки при одном и том же раскладе. Но соответствующие этим ставкам вероятности выбираются хотя и не произвольно, но и не однозначно, как на рис. 24 [3]). Существует низшая зона (на рис. 27), в которой игрок 2 всегда должен ставить мало, т. е. зона, где его расклад слишком плох для смешанного поведения.

Кроме того, в средней зоне игрока 2 величины $\gamma_j^z$ как на рис. 25, так и на рис. 28 так же несущественны, как и разность $\gamma_2^z - \gamma_1^z = 0$ на рис. 25. Таким образом, мотивы поведения в этой зоне столь же косвенны, как и те, которые обсуждались в последней части п. 19.10. Действительно, эти высокие ставки являются более действенной защитой от блефа, чем

[1]) Для количественной ориентировки: если $a/b = 3$, что соответствует отношению, при котором построены все наши рисунки, то $u = 1/9$, $v = 7/9$, $K = b/9$.

[2]) При $a/b \sim 3$ оно равно примерно $b/9$ (см. сноску выше), т. е. около 11% от низкой ставки.

[3]) См. обсуждение после рис. 27. Действительно, эти требования могут встретиться только при $\sigma_1^z = 0$ и 1; например, $\sigma_1^z = 0$ для меньшей дроби $\frac{a-b}{a}$ и $\sigma_1^z = 1$ для большей дроби $b/a$ для среднего интервала.

Существование такого решения (т. е. никогда $\sigma_1^z \neq 0$ или 1, а в силу рис. 26 также никогда $\rho_1^z \neq 0$ или 1) означает, конечно, что этот вариант является вполне определенным. Но рассуждение на этой основе (т. е. с чистыми стратегиями) не позволяет построить решений, подобных фактически построенному на рис. 27.

просто блеф. Поскольку этой ставкой игрока 2 игра заканчивается, для последующих действий действительно нет никаких причин, в то время как блефу партнера необходимо противопоставить высокие ставки, вынуждая его тем самым к раскрытию.

Для игрока 1 (рис. 26) эта ситуация не такова. В высшей зоне он должен назначать высокие ставки, и ничего более; в средней зоне он должен назначать низкие ставки, и только. Эти высокие ставки на самых плохих раскладах — в то время как на средних раскладах делаются низкие ставки — являются агрессивным блефом в своем наиболее чистом виде. Значения $\delta_i^z$ совсем не безразличны в этой зоне блефа (т. е. в низшей зоне): $\delta_1^z - \delta_2^z > 0$ на рис. 29, т. е. любое отступление от блефа в этих условиях приводит к немедленным потерям.

**19.16.2.** Итак, в нашем новом варианте покера можно различать два типа блефа: чисто агрессивный, используемый игроком, который владеет инициативой, и защитный (состоящий в том, чтобы время от времени раскрывать противника, подозреваемого в блефе, даже имея на руках скромные карты), используемый игроком, который ставит вторым. Наш исходный вариант, где инициатива поделена между двумя игроками — потому что они ставят одновременно,— содержит процедуру, которую теперь можно было бы назвать смесью этих двух поведений [1]).

Все это дает ценное эвристическое указание, как следует подходить к реальному покеру — с последовательностью (попеременных) ставок и повышений. Математическая задача сложна, но, по-видимому, использован еще не весь доступный аппарат. Это будет сделано в других наших работах.

---

[1]) Рассмотренный Э. Борелем вариант покера, упоминавшийся в замечании на стр. 208, порождает процедуру, имеющую некоторое сходство с нашей. Используя нашу терминологию, ход рассуждений Э. Бореля можно описать следующим образом.

Максимин (максимум для игрока 1, минимум для игрока 2) определяется как для чистых, так и для смешанных стратегий. Они идентичны, т. е. этот вариант является вполне определенным. Получающиеся при этом оптимальные стратегии несколько напоминают наши стратегии на рис. 27. Поэтому характеристики блефа не проявляются столь отчетливо, как на наших рис. 24 и 26. См. аналогичные рассуждения в приведенном выше тексте.

*Глава V*

# ИГРЫ ТРЕХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

## § 20. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ОБЗОР

### 20.1. Общие соображения

**20.1.1.** Поскольку теория игр двух лиц с нулевой суммой уже завершена, мы сделаем следующий шаг по пути, намеченному в п. 12.4: построим теорию игр трех лиц с нулевой суммой. Это потребует совершенно новых точек зрения. Типы игр, обсуждавшихся до сих пор, также имели свои собственные характерные проблемы. Мы видели, что игра с одним игроком характеризовалась появлением задачи максимизации, а игра двух лиц с нулевой суммой — четко выраженной противоположностью интересов, которая уже не могла быть описана задачей максимизации. И так же, как переход от игры с одним игроком к игре двух лиц с нулевой суммой изменил чисто максимизационный характер проблемы, так переход от игры двух лиц с нулевой суммой к игре трех лиц с нулевой суммой уничтожает отчетливую противоположность интересов.

**20.1.2.** В самом деле, очевидно, что взаимоотношения между двумя игроками в игре трех лиц с нулевой суммой могут быть разнообразны. В игре двух лиц с нулевой суммой все, что выигрывает один игрок, необходимо проигрывает другой, и наоборот. Поэтому такой игре всегда присущ абсолютный антагонизм интересов. В игре трех лиц с нулевой суммой некоторый конкретный ход игрока, который простоты ради предполагается несомненно выгодным для него, может быть невыгодным для обоих других игроков. Но он может быть также выгодным для одного из противников и (тем более) невыгодным для другого [1]). Таким образом, у некоторых игроков время от времени могут быть совпадающие интересы, и можно догадаться, что понадобится более сложная теория даже для того, чтобы решить, является ли это совпадение интересов полным, частичным и т. д. С другой стороны, в игре должна существовать противоположность интересов (это игра с нулевой суммой), и, таким образом, теория должна будет распутывать сложные ситуации, которые могут встретиться.

Может случиться, в частности, что игрок имеет выбор среди различных линий поведения. Он может управлять своим поведением так, чтобы оно соответствовало интересам другого игрока или же противоречило им, а также выбирать, с каким из двух других игроков ему установить контакт и (возможно) в какой именно степени.

**20.1.3.** Как только появляется возможность совпадения интересов, встает вопрос о выборе союзника. Когда союз создан, следует ожидать, что будут необходимы некоторого рода взаимные соглашения между двумя игроками, входящими в него. Это можно сформулировать следующим образом. Совпадение интересов делает кооперацию желательной

[1]) Все это, конечно, связано с теми же трудностями, которые мы уже рассмотрели и преодолели в случае игры двух лиц с нулевой суммой: является ли отдельный ход выгодным или невыгодным для некоторого игрока, может зависеть не только от его хода, но также от того, что делают другие игроки. Однако сначала мы попытаемся выделить новые трудности и анализировать их в наиболее чистой форме. Затем мы обсудим их связь со старыми.

и, таким образом, вероятно, будет вести к соглашению между игроками, входящими в кооперацию. С другой стороны, противоположность интересов, по-видимому, требует лишь того, чтобы игрок, который выбрал такую альтернативу, действовал независимо в своих собственных интересах.

В игре двух лиц с нулевой суммой такого быть не может. Когда выигрыш одного игрока равен проигрышу другого, какие-либо договоры или соглашения между этими игроками бессмысленны [1]). Это должно быть ясно из общих соображений. Если необходимо формальное подтверждение (доказательство), то его можно найти в том, что мы завершили теорию игр двух лиц с нулевой суммой, даже не упоминая о договорах и соглашениях между игроками.

## 20.2. Коалиции

**20.2.1.** Таким образом, мы рассмотрели черту, качественно отличающую игру трех лиц с нулевой суммой от игры двух лиц с нулевой суммой. Является ли она единственной — это вопрос, который мы сможем решить только позже. Если мы достигнем успеха в завершении теории игр трех лиц с нулевой суммой без привлечения каких-либо дальнейших новых понятий, то мы сможем утверждать, что установили эту единственность. По существу, это произойдет, когда мы дойдем до п. 23.1. В данный момент мы просто отмечаем, что это является наиболее важным новым элементом в создавшейся ситуации, и предполагаем обсудить его полностью, прежде чем браться за что-либо другое.

Таким образом, мы хотим сосредоточиться на альтернативах, среди которых игрок может выбирать: действовать ли в кооперации с другими игроками или же действовать против них. Это значит, что мы хотим анализировать возможность *коалиций*: между какими игроками и против какого игрока будут создаваться коалиции.

З а м е ч а н и е. Представляется важным отметить следующее. Коалиции в игре с нулевой суммой появляются впервые, когда число участников игры достигает трех. В игре двух лиц для возникновения коалиций недостаточно игроков; коалиция поглощает хотя бы двух игроков, и поэтому в оппозиции не остается никого. Но хотя игра трех лиц и допускает коалиции, число игроков еще настолько мало, что удерживает коалиции в определенных границах: коалиция должна содержать ровно двух игроков и должна быть направлена ровно против одного (оставшегося) игрока.

Если имеется четыре или больше игроков, то ситуация становится значительно более сложной: могут создаваться несколько коалиций, и они могут соединяться или противостоять друг другу и т. д. Несколько примеров этого появляется в конце п. 36.1.2 и далее, в конце п. 37.1.2 и далее; другие близкие явления см. в конце п. 38.3.2.

Следовательно, желательно построить пример игры трех лиц с нулевой суммой, в которой этот аспект находится на первом плане, а все другие скрыты, т. е. игру, в которой только коалиции имеют значение и являются единственной целью всех игроков [2]).

---

[1]) Это, конечно, не так в общей игре двух лиц (т. е. в игре с переменной суммой). В ней два игрока могут при случае кооперироваться, чтобы создать больший выигрыш. Таким образом, имеется определенное сходство между общей игрой двух лиц и игрой трех лиц с нулевой суммой.

В гл. XI, особенно в п. 56.2.2, мы увидим, что за этим кроется общая связь: общая игра $n$ лиц тесно связана с игрой $n+1$ лица с нулевой суммой.

[2]) Методически это тот же самый план, что и при рассмотрении игры в «орлянку» в теории игр двух лиц с нулевой суммой. Мы установили в п. 14.7.1, что решающей новой чертой игры с нулевой суммой двух лиц была трудность принятия решения, при котором игрок «раскрывал» своего противника. «Орлянка» являлась той игрой, в которой это «раскрытие» определяло всю картину и только оно имело значение.

20.2.2. На этой стадии можно упомянуть также следующее обстоятельство. Игрок может сделать наилучший выбор между двумя возможными коалициями, так как есть два других игрока, каждого из которых он может попытаться убедить объединиться с ним против третьего. Изучая игру трех лиц с нулевой суммой, мы будем выяснять, как именно производится этот выбор и вообще имеет ли любой данный игрок право на него. Если, однако, игрок располагает только одной возможностью образования коалиции (независимо от того, как мы будем в конечном счете интерпретировать эту операцию), то не совсем ясно, в каком смысле это является коалицией: единственные ходы, которые вынужден делать игрок в силу правил игры, являются по своей природе в большей степени (односторонней) стратегией, чем (совместной) коалицией. Конечно, эти соображения довольно приблизительны и неопределенны на данном этапе нашего анализа. Мы тем не менее привели их, потому что эти различия окажутся решающими.

Также может показаться неясным, по крайней мере на данном этапе, как связаны возможные выборы коалиций для одного из игроков с аналогичными возможностями, имеющимися у другого. Действительно, вытекает ли из существования нескольких альтернатив для одного игрока то же для другого?

## § 21. ПРОСТАЯ МАЖОРИТАРНАЯ ИГРА ТРЕХ ЛИЦ

### 21.1. Описание игры

21.1. Сформулируем теперь пример, упоминавшийся выше,— пример простой игры трех лиц с нулевой суммой, в которой имеют значение только возможности соглашений (т. е. коалиций) между игроками.

Игра заключается в следующем. Каждый игрок при своем личном ходе выбирает один из номеров двух других игроков [1]). Каждый игрок, делая свой выбор, не осведомлен о выборах других игроков.

После этого расплата происходит так. Если два игрока выбрали номера друг друга, то будем говорить, что они образовали *пару* [2]). Ясно, что будет создана либо ровно одна пара, либо ни одной [3,4]). Если пара есть, то два игрока, которые принадлежат ей, получают по половине единицы каждый, в то время как третий (исключенный) игрок соответственно теряет одну единицу. Если пар нет, то никто ничего не получает [5]).

---

[1]) Игрок 1 выбирает 2 или 3, игрок 2 выбирает 1 или 3, а игрок 3 выбирает 1 или 2.

[2]) Будет видно, что образование пары выгодно игрокам, которые создали ее. Соответственно этому наше обсуждение соглашений и коалиций в последующих пунктах покажет, что игроки объединяются в коалицию для того, чтобы быть в состоянии образовать пару. Тем не менее различие между понятиями «пара» и «коалиция» должно учитываться. Пара есть формальное понятие, фигурирующее в правилах игры, которую мы сейчас определяем. Коалиция — понятие, принадлежащее теории, рассматривающей эту игру (и, как будет видно дальше, многие другие игры).

[3]) Иными словами, не может быть одновременно двух различных пар. Действительно, две пары должны иметь одного общего игрока (так как всех игроков только три) и номер, выбранный этим игроком, должен быть номером другого игрока в обеих парах, т. е. обе пары совпадают.

[4]) Может случиться, что пар не существует: например, если 1 выбирает 2, 2 выбирает 3, 3 выбирает 1.

[5]) Ради чисто формальной корректности все это надо привести в соответствие с §§ 6 и 7 в гл. II. Оставляем это читателю, как и в аналогичной ситуации, рассмотренной в замечании на стр. 213.

У читателя не возникнет трудностей в выявлении действительных социальных процессов, для которых эта игра является весьма схематической моделью. Будем называть ее *простой мажоритарной игрой* (*трех лиц*).

### 21.2. Анализ игры. Необходимость «соглашений»

**21.2.1.** Попытаемся разобраться в ситуации, возникающей в процессе игры.

Начнем с того, что в этой игре игроку, очевидно, ничего не остается делать, как искать партнера, т. е. другого игрока, который согласен образовать с ним пару. Эта игра столь элементарна и совершенно свободна от других стратегических возможностей, что здесь попросту не остается места для какого-либо другого разумного действия. Так как каждый игрок делает свой ход, не зная ходов других игроков, никакого сотрудничества игроков в процессе игры не может возникнуть. Два игрока, которые хотят сотрудничать, должны прийти к соглашению до партии, т. е. вне игры. Игрок, который (делая свой личный ход) поступает согласно договору (выбирая номер партнера), должен обладать уверенностью, что и его партнер поступает так же. Поскольку, как указывалось выше, мы рассматриваем только правила игры, то мы не в состоянии судить о том, какие могут быть основания для такой уверенности. Другими словами: что *обеспечивает* «святость» таких соглашений, если что-то вообще ее обеспечивает? Могут быть игры, которые сами — в силу своих правил (определенных в пп. 6.1 и 10.1) — обеспечивают механизм для соглашений и для их выполнения [1]). Но мы не можем основывать наши рассмотрения на этой возможности, так как игра *не обязана* давать такой механизм. Во всяком случае, описанная выше простая мажоритарная игра этого свойства не имеет. Таким образом, здесь, по-видимому, не уйти от необходимости рассмотрения соглашений, заключенных вне игры. Если их не разрешить, то трудно понять, что будет (и будет ли вообще что-либо) определять поведение игрока в простой мажоритарной игре. Выразим это в несколько иной форме.

Мы пытаемся создать теорию рационального поведения участников в некоторой заданной игре. В обсуждении простой мажоритарной игры мы уже достигли такой стадии, что дальше трудно развивать теорию без таких вспомогательных понятий, как «договоры», «соглашения» и т. д. В дальнейшем мы предполагаем исследовать, какие теоретические построения требуются для того, чтобы устранить эти понятия. Для этой цели в качестве фундамента потребуется вся теория, изложенная в этой книге, а исследование будет развиваться по пути, намеченному в гл. XII и особенно в § 66. Во всяком случае, сейчас наша позиция слишком слаба и теория недостаточно развита, чтобы допустить такое «самоотречение». Таким образом, в последующих рассуждениях будет использоваться возможность образования коалиций вне игры. Это будет включать гипотезу о том, что коалиции поддерживаются договаривающимися сторонами.

**21.2.2.** Эти договоры в некоторой степени похожи на соглашения в некоторых играх, подобных бриджу, однако с тем существенным отли-

---

[1]) Предусматривая личные ходы одного игрока, о которых информирован только один из оставшихся игроков и которые содержат (возможно, условно) изложение дальнейшей линии поведения первого игрока, и предписывая ему впоследствии твердо держаться этой линии поведения или предусматривая (в функциях, которые определяют исход игры) штрафы за отклонение от нее.

чием, что на последние влияет только *одна* «организация» (т. е. один игрок расщепляется на два «лица»), в то время как теперь мы поставлены перед взаимоотношениями двух игроков. В этом месте читатель может с пользой перечитать обсуждение соглашений и близких вопросов, которые рассматривались в последней части п. 6.4.2 и п. 6.4.3, особенно в сноске 2 на стр. 79.

**21.2.3.** Если бы наша теория применялась как статистический анализ длинного ряда партий одной и той же игры, а не в качестве анализа одной изолированной партии, то напрашивалась бы другая интерпретация. Тогда мы рассматривали бы договоры и все формы кооперации как установившиеся сами по себе путем повторения в таком длинном ряде партий.

По всей вероятности, можно вывести механизм принуждения из желания игроков поддержать стабильность своих действий и свою уверенность в стабильности действий партнеров. Однако мы предпочитаем рассматривать нашу теорию в применении к индивидуальной партии. Тем не менее эти рассмотрения имеют определенное значение в анализе ряда партий. Данная ситуация подобна той, с которой мы встречались при анализе смешанных стратегий в играх двух лиц с нулевой суммой. Читатель может, сделав соответствующие изменения, применить рассуждения п. 17.3 к рассматриваемой здесь ситуации.

## 21.3. Анализ игры. Коалиции. Роль симметрии

**21.3.** Как только мы допустили, что между игроками в простой мажоритарной игре могут иметь место договоры, стал ясен дальнейший путь. В этой игре предоставляется верная возможность выиграть тем игрокам, которые сотрудничают, и в ней никому не предоставляется возможностей разумных действий какого-либо иного вида. Эти правила настолько просты, что сказанное должно быть вполне убедительно.

С другой стороны, наша игра полностью симметрична по отношению ко всем трем игрокам. Это справедливо в той мере, в какой речь идет о правилах игры: они не предоставляют никакому игроку какой бы то ни было возможности, которая не была бы равным образом доступна любому другому игроку. Что игроки в пределах этих возможностей делают — это, конечно, совсем другой вопрос. Их поведение может быть несимметричным. На самом деле, так как соглашения, т. е. коалиции, неизбежно возникают, оно по необходимости будет несимметричным. Среди трех игроков есть место только для одной коалиции (двух игроков), а один игрок с необходимостью останется в стороне. Очень поучительно заметить, что правила игры являются абсолютно безобидными (в данном случае симметричными), но поведение игроков заведомо таким не будет.

Замечание 1. В п. 17.11.2 мы видели, что подобное не встречается в игре двух лиц с нулевой суммой. Там, если правила игры симметричны, то оба игрока получают одну и ту же сумму (т. е. значение игры равно нулю) и оба игрока имеют одни и те же оптимальные стратегии. То есть в этом случае нет причин ожидать различия в их поведении или в результатах, которых они в конечном счете достигают.

Появление коалиций, когда налицо больше двух игроков и «давка», которую они создают среди игроков,— это причина возникновения описанной выше специфической ситуации. (В рассматриваемом случае трех игроков «давка» появляется благодаря тому, что каждая коалиция может состоять только из двух игроков, что меньше, чем общее число игроков, но больше, чем половина их. Однако было бы ошибочным предполагать, что никакой «давки» не возникает при большем числе игроков.)

Замечание 2. Конечно, это обстоятельство является очень существенной чертой большинства хорошо знакомых форм социальных организаций. Оно может также служить аргументом, который неоднократно встречается в критике, направленной против таких институтов и главным образом против гипотетического порядка,

основанного на «непротивлении». Оно убеждает в том, что даже при абсолютной формальной безобидности — симметрии правил игры — нет гарантии, что использование этих правил участниками также будет безобидным и симметричным. В действительности выражение «нет гарантии» является некоторым преуменьшением: можно ожидать, что любая исчерпывающая теория рационального поведения покажет, что участники вынуждаются к образованию несимметричных коалиций.

Действительное понимание этой классической критики достигается в той мере, в какой развита точная теория коалиций. По-видимому, полезно подчеркнуть, что это типично «социальное» явление встречается только в случае трех или более участников.

Таким образом, единственной существенной стратегической особенностью этой игры является возможность коалиций между двумя игроками [1]). Так как при этом правила игры вполне симметричны, все три возможные коалиции [2]) должны быть рассмотрены на равных основаниях. Если коалиция образована, то правила игры обеспечивают получение двумя союзниками одной единицы от третьего (исключенного) игрока, которая делится между ними поровну.

Вопрос о том, какая из этих трех возможных коалиций будет образована, выходит за пределы теории, по крайней мере на данной стадии ее разработки (см. конец п. 4.3.2). Мы можем только сказать, что было бы неразумно не создавать никаких коалиций вообще, но то, какая именно коалиция будет сформирована, должна зависеть от условий, которые мы еще не пытались анализировать.

## § 22. ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

### 22.1. Несимметричное распределение. Необходимость компенсаций

22.1.1. Замечания предыдущих пунктов исчерпали, по крайней мере временно, предмет простой мажоритарной игры. Теперь мы должны начать снимать одно за другим чрезвычайно ограничительные предположения, которые характеризовали эту игру. Эти предположения были необходимы для того, чтобы выявить роль коалиций в чистом и изолированном виде, в сути своей; но теперь этот этап завершен. Мы должны перейти к применению наших идей к более общим ситуациям.

22.1.2. Первое ограничение, которое мы предполагаем снять, состоит в следующем. В простой мажоритарной игре каждая коалиция может получить от противника одну единицу; правилами игры предусматривается, что эта единица должна быть разделена между участниками коалиции поровну. Рассмотрим теперь игру, в которой каждая коалиция получает тот же самый общий выигрыш, но правила игры предусматривают иное распределение. Простоты ради пусть это относится только к коалиции игроков 1 и 2, в которой, скажем, игроку 1 оказывается предпочтение на сумму $\varepsilon$. Таким образом, правила модифицированной игры следующие.

Ходы являются теми же, что и в простой мажоритарной игре, описанной в п. 21.1. Определение пары также остается без изменения. Если образовалась пара 1, 2, то игрок 1 получает сумму $\frac{1}{2}+\varepsilon$ [3]), игрок 2 — сумму $\frac{1}{2}-\varepsilon$, а игрок 3 теряет одну единицу. Если образовалась какая-либо другая пара (т. е. 1, 3 или 2, 3), то два игрока, которые принадлежат ей,

[1]) Конечно, такая коалиция в рассматриваемой игре есть просто соглашение выбирать номера друг друга, чтобы образовать предусмотренную правилами пару. Это положение дел предсказывалось уже в начале п. 4.3.2.

[2]) Между игроками 1, 2; 1, 3; 2, 3.

[3]) Естественно предположить, что $0<\varepsilon<1/2$.

получают по половине единицы каждый, в то время как третий (исключенный) игрок теряет одну единицу.

Что произойдет в такой игре?

Начнем с того, что она по-прежнему характеризуется возможностью трех коалиций, соответствующих трем возможным парам, которые могут в ней образоваться. На первый взгляд может показаться, что игрок 1 имеет некоторое преимущество, так как по крайней мере в паре с игроком 2 он получает на $\varepsilon$ больше, чем в первоначальной простой мажоритарной игре.

Однако это преимущество чисто иллюзорное. Если бы игрок 1 действительно настаивал на получении добавки $\varepsilon$ в паре с игроком 2, то это имело бы следующие последствия: пара 1, 3 никогда бы не составлялась, потому что с точки зрения игрока 1 пара 1, 2 более желательна; пара 1, 2 никогда бы не составлялась, потому что с точки зрения игрока 2 более желательна пара 2, 3; однако к образованию пары 2, 3 никаких препятствий нет, так как она может быть осуществлена коалицией игроков 2, 3, которые не обязаны обращать внимание на игрока 1 и его особые требования. Таким образом, будет образована пара 2, 3 и никакая другая; в результате игрок 1 не будет получать ни $\frac{1}{2}+\varepsilon$, ни даже половины единицы, а непременно окажется исключенным из игры и потеряет одну единицу.

Итак, любая попытка игрока 1 удержать свою привилегированную позицию в паре 1, 2 приводит к его поражению. Лучшее, что он может сделать, это предпринять шаги, которые сделают пару 1, 2 столь же привлекательной для игрока 2, как конкурирующая пара 2, 3. Другими словами, он действует благоразумно, если, в случае образования пары 1, 2, он возвращает добавку $\varepsilon$ своему партнеру. Следует заметить, что он не может даже удержать какую-либо часть $\varepsilon$, так как если бы он пытался удержать для себя [1]) добавку $\varepsilon'$, то приведенные выше аргументы можно было бы повторить дословно, заменив $\varepsilon$ на $\varepsilon'$ [2]).

**22.1.3.** Можно попытаться проанализировать некоторые другие варианты исходной простой мажоритарной игры, в которых по-прежнему общий выигрыш каждой коалиции равен единице. Например, мы можем рассмотреть правила, при которых игрок 1 получает сумму $\frac{1}{2}+\varepsilon$ в каждой из пар 1, 2 и 1, 3, тогда как игроки 2 и 3 в паре 2, 3 делят выигрыш пополам. В этом случае ни игрок 2, ни игрок 3 не будут иметь желания кооперироваться с игроком 1, если он будет пытаться удерживать добавку $\varepsilon$ или какую-либо ее часть. Следовательно, любая такая попытка игрока 1 опять необходимо приведет к коалиции 2, 3, направленной против него, и к потере им одной единицы.

Другая возможность может состоять в том, что два игрока находятся в привилегированном положении во всех парах с третьим игроком. Например, в парах 1, 3 и 2, 3 соответственно игроки 1 и 2 получают $\frac{1}{2}+\varepsilon$, в то время как игрок 3 получает только $\frac{1}{2}-\varepsilon$; в паре 1, 2 оба игрока получают по 1/2 каждый. В этом случае как игрок 1, так и игрок 2 не будут заинтересованы в коалиции между собой, и игрок 3 станет желаемым

[1]) Конечно, имеется в виду $0<\varepsilon'<\varepsilon$.

[2]) Хотя мотивы для неудачи игрока 1 — достоверное образование пары 2, 3 — в данном случае и слабее, но неудача постигла бы его совершенно так же, как раньше. См. в этой связи сноску 1 на стр. 249.

партнером для каждого из них. Следует ожидать, что это приведет к конкурирующим предложениям кооперироваться с ним. В конце концов это приведет к возвращению игроку 3 добавки $\varepsilon$. Однако все это вернет пару 1, 2 в область конкуренции и тем самым восстановит равновесие.

22.1.4. Мы предоставляем читателю рассмотрение дальнейших вариантов, в которых все три игрока получают различные суммы во всех трех парах. Мы не будем продолжать приведенный выше анализ, хотя это возможно и даже желательно в целях ответа на некоторые основательные возражения. Мы удовлетворимся тем, что установим в некотором смысле правдоподобие предложенного подхода, которое можно сформулировать следующим образом. По-видимому, то, что игрок может получить в определенной коалиции, зависит не только от того, что предусматривается правилами игры на этот случай, но также от других (конкурентных) возможностей коалиций для него самого и его партнера. Так как правила игры являются абсолютными и неприкосновенными, то это означает, что при определенных условиях между партнерами по коалициям должны выплачиваться *компенсации*, т. е. что игрок должен платить ожидаемому партнеру по коалиции некоторую вполне определенную сумму. Размер компенсаций зависит от того, какие еще альтернативы доступны каждому из игроков.

Приведенные примеры являются первой иллюстрацией сформулированных принципов. Отдав себе в этом отчет, мы займемся интересующим нас предметом заново, уже в большей общности, и будем рассматривать его более строго [1]).

## 22.2. Коалиции различной силы. Обсуждение

22.2.1. В соответствии со сказанным выше сделаем существенный шаг в сторону общности. Рассмотрим следующую игру.

Если кооперируются игроки 1 и 2, то они могут получить от игрока 3 не более чем сумму $c$; если кооперируются игроки 1 и 3, то они могут получить от игрока 2 не более чем сумму $b$; если кооперируются игроки 2 и 3, то от игрока 1 они могут получить не более, чем сумму $a$.

Мы не делаем никаких предположений относительно других деталей правил игры. Так, нет необходимости описывать, какими действиями — и, в частности, сколь сложными действиями — обеспечивается получение указанных выше сумм. Точно так же мы не определяем, как делятся между партнерами эти суммы, может ли, и каким именно образом, каждый из партнеров оказывать влияние на это распределение или изменять его и т. д.

Тем не менее мы сможем полностью исследовать эту игру. При этом, однако, необходимо помнить, что коалиции могут быть связаны с компенсационными выплатами между партнерами. Это можно аргументировать так.

22.2.2. Рассмотрим положение игрока 1. Он может входить в две альтернативные коалиции: с игроком 2 или с игроком 3. Предположим, что он пытается получить сумму $x$ при всех условиях. В этом случае игрок 2 в коалиции с игроком 1 не может рассчитывать на получение большей суммы, чем $c - x$. Аналогично игрок 3 в коалиции с игроком 1 не может рассчитывать на получение большей суммы, чем $b - x$. Если сумма этих

[1]) Именно поэтому мы не нуждаемся в анализе дальнейших эвристических аргументов этого пункта; рассуждения следующих пунктов касаются всех вопросов, относящихся к этому предмету.

Все эти возможности предвосхищались в начале п. 4.3.2 и в п. 4.3.3.

верхних границ, т. е. сумма $(c - x) + (b - x)$, меньше, чем та, которую игроки 2 и 3 могут получить, объединившись в коалицию друг с другом, то можно с уверенностью предположить, что игрок 1 не найдет себе партнера [1]). Коалиция игроков 2 и 3 может получить сумму $a$. Итак, мы видим: если игрок 1 желает при всех условиях получить сумму $x$, то у него нет никакой надежды найти партнера, если это $x$ удовлетворяет неравенству

$$(c-x)+(b-x)<a.$$

Таким образом, желание получить $x$ будет нереальным и нелепым, пока $x$ не будет удовлетворять неравенству

$$(c-x)+(b-x)\geqq a.$$

Это неравенство может быть равносильно записано как

$$x\leqq\frac{-a+b+c}{2}.$$

Резюмируем сказанное.

(22:1:a) Игрок 1 реально не может рассчитывать на получение при всех условиях суммы, большей $\alpha = \frac{-a+b+c}{2}$.

Те же рассуждения можно повторить для игроков 2 и 3; это даст нам следующее.

(22:1:b) Игрок 2 реально не может рассчитывать на получение при всех условиях суммы, большей чем $\beta = \frac{a-b+c}{2}$.

(22:1:c) Игрок 3 реально не может рассчитывать на получение при всех условиях суммы, большей чем $\gamma = \frac{a+b-c}{2}$.

**22.2.3.** Условия (22:1:a) — (22:1:c) являлись всего лишь необходимыми, и априори можно было бы предполагать, что дальнейшие рассуждения могут либо уменьшить верхние границы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, либо же привести к некоторым другим ограничениям, наложенным на то, к чему игроки могут стремиться. Как показывает следующее простое рассмотрение, это не так.

Можно непосредственно проверить, что

$$\alpha+\beta=c,\quad \alpha+\gamma=b,\quad \beta+\gamma=a.$$

Другими словами: если игроки 1, 2, 3 не стремятся к большему, чем предусмотрено в утверждениях (22:1:a), (22:1:b), (22:1:c), т. е. к большему, чем соответственно $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, то любые два игрока, которые объединяются в коалицию, фактически могут получить соответствующую сумму. Таким образом, эти требования полностью оправданы. Конечно, только два игрока (те, которые составят коалицию) получат в действительности то, на что они «по справедливости» претендуют. Третий игрок, который исключается из коалиции, соответственно будет получать не $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, а $-a$, $-b$, $-c$ [2]).

---

[1]) Конечно, мы предполагаем, что игрок не является безразличным к любой возможной прибыли, сколь бы мала она ни была. Это предположение подразумевалось также и при анализе игры двух лиц с нулевой суммой.

Традиционная идея «homo oeconomicus» в тех пределах, в каких ее вообще можно ясно представить, также содержит это предположение.

[2]) Действительно, это те суммы, которые коалиция других игроков может «выбить» соответственно у игроков 1, 2, 3. Больше этого коалиция получить не может.

### 22.3. Одно неравенство. Формулы

**22.3.1.** В этом месте возникает один очевидный вопрос. Любой игрок 1, 2, 3 может получить соответственно сумму $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, если он добивается успеха в создании коалиции; в противном случае он вместо этого получает только $-a$, $-b$, $-c$. Это имеет смысл только в том случае, если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ больше, чем соответствующие $-a$, $-b$, $-c$, так как в противном случае соответствующий игрок вовсе не захочет вступать в коалицию, а предпочтет играть сам за себя. Таким образом, вопрос состоит в том, являются ли все три разности

$$p=\alpha-(-a)=\alpha+a,$$

$$q=\beta-(-b)=\beta+b,$$

$$r=\gamma-(-c)=\gamma+c$$

неотрицательными.

Непосредственно видно, что все эти разности равны друг другу. Действительно.

$$p=q=r=\frac{a+b+c}{2}.$$

Обозначим эту величину через $\frac{\Delta}{2}$. Тогда вопрос сводится к тому, справедливо ли неравенство

$$\Delta=a+b+c\geqq 0.$$

Это неравенство может быть доказано следующим образом.

**22.3.2.** Коалиция игроков 1, 2 может получить (от игрока 3) не более чем сумму $c$. Если игрок 1 играет один, то он может помешать игрокам 2, 3 выиграть у него больше чем $a$, так как даже коалиция игроков 2, 3 может получить (от игрока 1) не более чем сумму $a$; это значит, что игрок 1 может получить сумму $-a$ без какой-либо посторонней помощи. Аналогично игрок 2 может без посторонней помощи получить сумму $-b$. Следовательно, два игрока 1, 2 вместе могут получить сумму $-(a+b)$, даже если они не будут кооперироваться друг с другом. Так как максимум того, что они могут получить вместе, есть $c$, отсюда следует, что $c\geqq -a-b$, т. е. что $\Delta=a+b+c\geqq 0$.

**22.3.3.** Это доказательство наводит на следующие соображения.

Во-первых, наши аргументы опирались на рассмотрение возможностей игрока 1. Благодаря симметрии результата $\Delta=a+b+c\geqq 0$ относительно трех игроков, то же неравенство могло бы быть получено, если бы мы анализировали положение игрока 2 или игрока 3. Это указывает на то, что существует некоторая симметрия ролей всех трех игроков.

Во-вторых, $\Delta=0$ означает $c=-a-b$ или, что то же самое, $\alpha=-a$, так же как и две пары соответствующих равенств, которые получаются из написанных циклической перестановкой трех игроков. Поэтому в этом случае никакая коалиция не имеет смысла. Любые два игрока могут получить, не кооперируясь, ту же сумму, которую они могут получить в коалиции (т. е. для игроков 1 и 2 этой суммой является $-a-b=c$). Кроме того, каждый игрок, которому удается присоединиться к коалиции, получает не более того, что он может получить и без посторонней помощи (например, для игрока 1 этой суммой является $\alpha=-a$).

С другой стороны, если $\Delta>0$, то каждый игрок имеет определенную заинтересованность в присоединении к коалиции. Выгода, содержащаяся в этом, одна и та же для всех трех игроков: она равна $\Delta/2$.

Мы здесь снова имеем указание на симметрию некоторых аспектов ситуации для всех игроков: $\Delta/2$ является стимулом для стремления к коалиции; эта величина для всех игроков одна и та же.

22.3.4. Наши результаты можно выразить в виде табл. 22.

Таблица 22

| Игрок | | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Значение партии | в коалиции | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
| | вне коалиции | $-a$ | $-b$ | $-c$ |

Если мы положим

$$a' = -a + \frac{1}{3}\Delta = \alpha - \frac{1}{6}\Delta = \frac{-2a+b+c}{3},$$

$$b' = -b + \frac{1}{3}\Delta = \beta - \frac{1}{6}\Delta = \frac{a-2b+c}{3},$$

$$c' = -c + \frac{1}{3}\Delta = \gamma - \frac{1}{6}\Delta = \frac{a+b-2c}{3},$$

то будем иметь

$$a' + b' + c' = 0,$$

и можем выразить результаты, сведенные в табл. 22, следующим образом.

(22:A) Для игроков 1, 2, 3 партия имеет *основные значения* соответственно $a'$, $b'$, $c'$. (Это — возможные оценки, так как сумма всех значений равна нулю.) Партия, однако, достоверно приведет к образованию некоторой коалиции. Те два игрока, которые ее образуют, получат (помимо своих основных значений) *премию* $\Delta/6$, а исключенный игрок понесет потери, равные $-\Delta/3$.

Таким образом, стимулом для образования коалиции для каждого игрока является $\Delta/2$ и всегда $\Delta/2 \geqq 0$.

## § 23. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

### 23.1. Исчерпывающее обсуждение. Несущественные и существенные игры

23.1.1. Теперь мы можем снять все ограничения. Пусть $\Gamma$ — совершенно произвольная игра трех лиц с нулевой суммой. Достаточно простого рассуждения, чтобы перенести на нее анализ пп. 22.2 и 22.3. Будем рассуждать следующим образом.

Если два игрока, скажем 1 и 2, решают полностью кооперироваться, временно откладывая впредь до расплаты урегулирование вопроса о распределении, т. е. вопроса о компенсациях, выплачиваемых партнерами друг другу, то игра $\Gamma$ превращается в игру двух лиц с нулевой суммой. Двумя игроками в этой новой игре являются коалиция 1, 2 (которая представляется составным игроком, состоящим из двух «естественных игроков») и игрок 3. Рассматриваемая таким образом игра $\Gamma$ подпадает под теорию игр двух лиц с нулевой суммой, изложенную в гл. III. Каждая

партия в этой игре имеет вполне определенное значение (мы имеем в виду v′, определенное в п. 17.4.2). Обозначим через $c$ значение партии для коалиции 1, 2 (которая в нашей интерпретации является одним из игроков).

Сходным образом можно предположить абсолютную коалицию между игроками 1, 3 и рассматривать игру Г как нулевую игру двух лиц между этой коалицией и игроком 2. Обозначим через $b$ значение партии для коалиции 1, 3.

Наконец, можно предположить абсолютную коалицию между игроками 2, 3 и рассматривать игру Г как игру двух лиц с нулевой суммой между этой коалицией и игроком 1. Обозначим через $a$ значение партии для коалиции 2, 3.

Следует отдавать себе отчет в том, что мы пока еще не предполагаем, что какая-нибудь из этих коалиций с необходимостью появится. Величины $a$, $b$, $c$ определены просто вычислительным образом; мы составили выражения для них, исходя из основной (математической) теоремы п. 17.6. (По поводу точных выражений для $a$, $b$, $c$ см. ниже.)

**23.1.2.** Ясно, что для игры трех лиц с нулевой суммой Г полностью справедливы рассуждения пп. 22.2 и 22.3. Коалиции игроков 1, 2, или 1, 3, или 2, 3 могут соответственно получить (от исключенных игроков 3, 2 или 1) не более чем суммы $c$, $b$, $a$. Следовательно, все результаты пп. 22.2 и 22.3 остаются в силе и, в частности, сформулированный в конце результат, который описывает положение каждого игрока в коалиции и вне ее.

**23.1.3.** Эти результаты показывают, что игра трех лиц с нулевой суммой попадает в один из двух количественно различных классов, соответствующих возможностям $\Delta = 0$ и $\Delta > 0$.

Действительно, мы видели, что нет причин для образования коалиции при $\Delta = 0$, и каждый игрок может получить ту же сумму, что и в любой коалиции, играя в одиночку против всех остальных. В этом и только в этом случае возможно предположить единственность значения каждой партии для каждого игрока, а сумма этих значений равняется нулю. Ими являются основные значения $a'$, $b'$, $c'$, упомянутые в конце п. 22.3. В этом случае формулы п. 22.3 показывают, что $a' = \alpha = -a$, $b' = \beta = -b$, $c' = \gamma = -c$. В случае, когда образование коалиций бесполезно, мы будем называть игру *несущественной*.

В случае, когда $\Delta > 0$, к образованию коалиций имеется определенный стимул, как обсуждалось в конце п. 22.3. Нет необходимости повторять приведенные там рассуждения. Отметим лишь, что здесь $\alpha > a' > -a$, $\beta > b' > -b$, $\gamma > c' > c$. В этом случае, когда коалиции являются существенными, будем называть игру *существенной*.

Приведенное разделение игр на несущественные и существенные было сформулировано только применительно к случаю игр трех лиц с нулевой суммой. Впоследствии мы увидим, что оно может быть распространено на все игры и что эта дифференциация имеет исключительную важность.

### 23.2. Окончательные формулы

**23.2.** Прежде чем приступать к дальнейшему анализу полученного результата, сделаем несколько чисто математических замечаний о величинах $a$, $b$, $c$ и связанных с ними $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $a'$, $b'$, $c'$, $\Delta$, в терминах которых выражалось наше решение.

Предположим, что Г является игрой трех лиц с нулевой суммой в нормальной форме, как в п. 11.2.3. В этой игре игроки 1, 2, 3 выбирают

соответственно переменные $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ (каждый игрок не информирован о выборах двух других) и получают соответственно выигрыши $\mathscr{K}_1(\tau, \tau_2, \tau_3)$, $\mathscr{K}_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, $\mathscr{K}_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Конечно (игра с нулевой суммой),

$$\mathscr{K}_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + \mathscr{K}_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + \mathscr{K}_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv 0.$$

Областями изменения переменных являются

$$\tau_1 = 1, 2, \ldots, \beta_1,$$
$$\tau_2 = 1, 2, \ldots, \beta_2,$$
$$\tau_3 = 1, 2, \ldots, \beta_3.$$

Теперь в игре двух лиц, которая возникает между абсолютной коалицией игроков 1, 2 и игроком 3, имеет место следующая ситуация.

Составной игрок 1, 2 располагает переменными $\tau_1, \tau_2$; оставшийся игрок 3 распоряжается переменной $\tau_3$. Первый получает выигрыш

$$\mathscr{K}_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + \mathscr{K}_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv -\mathscr{K}_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3),$$

последний получает этот выигрыш с обратным знаком.

Смешанной стратегией составного игрока 1, 2 является вектор $\vec{\xi} \in S_{\beta_1\beta_2}$, компоненты которого можно обозначить через $\xi_{\tau_1\tau_2}$[1]. Таким образом, принадлежность $\vec{\xi}$ множеству $S_{\beta_1\beta_2}$ характеризуется соотношениями

$$\xi_{\tau_1\tau_2} \geqq 0, \qquad \sum_{\tau_1, \tau_2} \xi_{\tau_1\tau_2} = 1.$$

Смешанной стратегией игрока 3 является вектор $\vec{\eta} \in S_{\beta_3}$, компоненты которого обозначим через $\eta_{\tau_3}$. Принадлежность вектора $\vec{\eta}$ множеству $S_{\beta_3}$ характеризуется соотношениями

$$\eta_{\tau_3} \geqq 0, \qquad \sum_{\tau_3} \eta_{\tau_3} = 1.$$

Поэтому билинейная форма $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ из (17:2) в п. 17.4.1 выглядит так:

$$\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \equiv \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} \{\mathscr{K}_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + \mathscr{K}_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\} \xi_{\tau_1\tau_2}\eta_{\tau_3} \equiv$$
$$\equiv -\sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} \mathscr{K}_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \xi_{\tau_1\tau_2}\eta_{\tau_3}$$

и, наконец,

$$c = \max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

Выражения для $b$, $a$ получаются из написанного циклической перестановкой игроков 1, 2, 3 во всех деталях этого представления.

[1]) Число пар $\tau_1, \tau_2$, очевидно, равно $\beta_1\beta_2$.

Выпишем еще раз формулы, выражающие $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $a'$, $b'$, $c'$, $\Delta$:

$$\Delta = a+b+c \text{ необходимо } \geqq 0,$$

$$\alpha = \frac{-a+b+c}{2}, \qquad a' = \frac{-2a+b+c}{3},$$

$$\beta = \frac{a-b+c}{2}, \qquad b' = \frac{a-2b+c}{3},$$

$$\gamma = \frac{a+b-c}{2}, \qquad c' = \frac{a+b-2c}{3},$$

и мы имеем

$$\Delta \geqq 0,$$

$$a'+b'+c' = 0,$$

$$\alpha = a' + \frac{\Delta}{6}, \qquad \beta = b' + \frac{\Delta}{6}, \qquad \gamma = c' + \frac{\Delta}{6},$$

$$-a = a' - \frac{\Delta}{3}, \qquad -b = b' - \frac{\Delta}{3}, \qquad -c = c' - \frac{\Delta}{3}.$$

## § 24. ОБСУЖДЕНИЕ ОДНОГО ВОЗРАЖЕНИЯ

### 24.1. Случай полной информации и его значимость

**24.1.1.** Мы получили решение игры трех лиц с нулевой суммой, которое учитывает все возможности и указывает направление поиска решений игры $n$ лиц. Именно, следует анализировать все возможные коалиции и конкурентное взаимоотношение между ними, что позволит определить компенсации, которые игроки, желающие образовать коалицию, будут выплачивать друг другу.

Мы уже отмечали, что для $n \geqq 4$ это будет гораздо более трудной проблемой, чем в случае $n = 3$ (см. замечание на стр. 242).

Прежде чем заниматься этим вопросом, разумно уделить некоторое время пересмотру нашей позиции. В дальнейших рассуждениях мы будем уделять основное внимание образованию коалиций и компенсациям между участниками этих коалиций, используя теорию игр двух лиц с нулевой суммой для определения выигрышей окончательных коалиций, которые противостоят друг другу после того, как все игроки примкнули к той или другой коалиции (см. пп. 25.1.1, 25.2). Но действительно ли этот аспект вопроса является таким всеобщим, как мы это предполагаем?

Мы уже привели некоторые сильные аргументы в пользу такой точки зрения при рассмотрении игр трех лиц с нулевой суммой. Наша способность построить на описанном основании теорию игр $n$ лиц (для всех $n$) будет, наконец, решающим аргументом. Тем не менее имеются и доводы «против»; возражение, которое нам предстоит рассмотреть, возникает в связи с играми с полной информацией.

Возражение, которое мы теперь обсудим, касается только игр упомянутого выше частного класса. Поэтому, если это возражение окажется справедливым, оно не даст нам некоторой иной теории, которая применима ко всем играм. Но так как мы претендуем на общую истинность предложенной нами точки зрения, то мы должны опровергать все возражения, и даже те, которые приложимы только к некоторому частному случаю [1]).

[1]) Другими словами, при провозглашении общей истинности теории необходимо предполагается возможность опровержения всех возражений.

**24.1.2.** Игры с полной информацией уже обсуждались в § 15. Мы видели там, что эти игры обладают важными специфическими особенностями и что их природу можно полностью понять только тогда, когда они рассматриваются в позиционной форме, а не просто в нормальной, к которой главным образом и относились наши рассуждения (см. также п. 14.8).

Анализ в § 15 начался с рассмотрения игр $n$ лиц (для всех $n$), но в последней части § 15 мы сузили вопрос, ограничившись играми двух лиц с нулевой суммой. В частности, в конце § 15 мы изложили словесный метод рассуждения (см. п. 15.8), который обладал некоторыми примечательными особенностями. Во-первых, не будучи совершенно свободным от возражений, он оказался достойным рассмотрения. Во-вторых, аргументация, которая при этом использовалась, существенно отличалась от аргументации, при помощи которой мы разобрали общий случай игры двух лиц с нулевой суммой; и хотя она была применима только к этому частному случаю, она была более действенной, чем другая аргументация. В-третьих, она привела в случае игр двух лиц с нулевой суммой с полной информацией к тем же результатам, что и наша общая теория.

Теперь можно попытаться применить эту аргументацию также к случаю $n \geqq 3$ игроков. Действительно, поверхностная проверка содержания п. 15.8.2 не выявляет каких-либо причин, по которым применение использованной там аргументации следовало бы ограничить случаем $n = 2$ игроков (см., однако, п. 15.8.3). Однако в этих рассуждениях не упоминается о коалициях или соглашениях между игроками и т. п. Поэтому, если они и применимы для $n = 3$ игроков, то используемый здесь подход можно подвергнуть серьезному сомнению.

Замечание. Можно надеяться обойти этот вопрос, ожидая, что для всех игр трех лиц с нулевой суммой с полной информацией окажется $\Delta = 0$. Это сделало бы коалиции излишними. См. конец п. 23.1.

Точно так же как игры с полной информацией, будучи вполне определенными, избежали трудностей теории нулевых игр двух лиц (см. п. 15.6.1), они могли бы теперь избежать трудностей теории игр трех лиц с нулевой суммой, будучи несущественными.

Однако это не так. Чтобы увидеть это, достаточно модифицировать правила простой мажоритарной игры (см. п. 21.1) следующим образом: пусть игроки 1, 2, 3 делают свои личные ходы (т. е. соответственно выборы $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$, см. там же) в указанном порядке, причем каждый из них информирован о предшествующих ходах. Легко проверить, что значения $c$, $b$, $a$ трех коалиций 1, 2, 1, 3, и 2, 3 являются теми же самыми, что и раньше,

$$c = b = a = 1, \quad \Delta = a + b + c = 3 > 0.$$

Детальное обсуждение этой игры в соответствии с рассуждениями п. 21.2 представляло бы определенный интерес, но мы не предполагаем в данный момент продолжать эту тему.

Поэтому мы хотим показать, почему метод п. 15.8 несостоятелен, когда число игроков не менее трех.

Чтобы сделать это, повторим некоторые существенные пункты примененной аргументации (см. п. 15.8.2, обозначениями которого мы будем пользоваться).

## 24.2. Детальное обсуждение. Необходимость компенсаций между тремя или более игроками

**24.2.1.** В соответствии со сказанным выше рассмотрим игру $\Gamma$ с полной информацией. Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_\nu$ будут ходами в этой игре, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$ — выборами при этих ходах, $\pi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)$ — партией, описываемой этими выборами, а $\mathcal{F}_j(\pi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu))$ — исходом этой партии для игрока $j$ $(= 1, 2, \ldots, n)$.

Предположим, что ходы $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_{\nu-1}$ уже сделаны и исходами их выборов являются $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1}$. Рассмотрим последний ход $\mathcal{M}_\nu$ и соответственно $\sigma_\nu$. Если $\mathcal{M}_\nu$ является случайным ходом (т. е. если $k_\nu(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1}) = 0$), то различные возможные значения $\sigma_\nu = 1, 2, \ldots, \alpha_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})$ имеют соответственно вероятности $p_\nu(1), p_\nu(2), \ldots, p_\nu(\alpha_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}))$. Если это личный ход игрока $k$ (т. е. если $k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}) = k = 1, 2, \ldots, n$), то игрок $k$ выбирает $\sigma_\nu$ так, чтобы сделать $\mathcal{F}_k(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu))$ максимальным. Обозначим это $\sigma_\nu$ через $\sigma_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})$. Таким образом, можно доказать, что значение партии становится известным (для каждого игрока $j = 1, \ldots, n$) уже после ходов $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_{\nu-1}$ (и перед ходом $\mathcal{M}_\nu$); иными словами, значение партии является функцией только $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1}$. Действительно, на основании сказанного выше

$$\mathcal{F}_j(\pi'(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\sigma_\nu=1}^{\alpha_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})} p_\nu(\sigma_\nu)\, \mathcal{F}_j(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu)) \\ \qquad\qquad \text{для } k_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}) = 0, \\ \mathcal{F}_j(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}))), \\ \quad \text{где } \sigma_\nu = \sigma_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}) \text{ максимизирует} \\ \quad \mathcal{F}_k(\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)), \text{ для } k_\nu(\sigma, \ldots, \sigma_{\nu-1}) = \\ \qquad\qquad = k = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Следовательно, мы можем рассматривать игру $\Gamma$ так, как будто она состоит только из ходов $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_{\nu-1}$ (т. е. без $\mathcal{M}_\nu$).

С помощью проведенного рассуждения мы отбросили ход $\mathcal{M}_\nu$. Повторяя его, мы аналогично можем отбросить последовательно ходы $\mathcal{M}_{\nu-1}, \mathcal{M}_{\nu-2}, \ldots, \mathcal{M}_1$ и, наконец, получить определенное значение партии (для каждого игрока $j = 1, 2, \ldots, n$).

**24.2.2.** Для критической оценки этого метода рассмотрим два последних шага $\mathcal{M}_{\nu-1}, \mathcal{M}_\nu$ и предположим, что они являются личными ходами двух различных игроков, скажем соответственно 1 и 2. В этой ситуации мы предполагали, что игрок 2 определенно выберет $\sigma_\nu$, с тем чтобы максимизировать $\mathcal{F}_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu)$. Это даст $\sigma_\nu = \sigma_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})$. Далее, мы предположили также, что игрок 1, выбирая $\sigma_{\nu-1}$, может быть уверен в таком выборе игрока 2. Это значит, что он может без риска заменить $\mathcal{F}_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu)$ (то, что он в действительности получит) на $\mathcal{F}_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1}))$ и максимизировать последнюю величину [1]). Но может ли он быть уверен в этом предположении?

Прежде всего, $\sigma_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})$ может даже не определяться однозначно: можно предположить, что $\mathcal{F}_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu)$ достигает своего максимума (при данных $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu 1}$) на нескольких $\sigma_\nu$. В игре двух лиц с нулевой суммой этого не может быть: поскольку $\mathcal{F}_1 \equiv -\mathcal{F}_2$, два $\sigma_\nu$, которые доставляют одно и то же значение $\mathcal{F}_2$, дают также одно и то же значение $\mathcal{F}_1$ [2]). Но уже в игре трех лиц с нулевой суммой $\mathcal{F}_2$ не определяет

[1]) Так как она является функцией только от $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-2}, \sigma_{\nu-1}$ из которых $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-2}$ к моменту хода $\mathcal{M}_{\nu-1}$ известны, а $\sigma_{\nu-1}$ контролируется игроком 1, он способен ее максимизировать.

Он не может, в каком-либо смысле, максимизировать $\mathcal{F}_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu)$, так как эта величина зависит от переменной $\sigma_\nu$, которую игрок 1 не знает и не контролирует.

[2]) Действительно, в п. 15.8.2 мы воздержались от упоминания $\mathcal{F}_2$ вообще: вместо максимизации $\mathcal{F}_2$ мы говорили о минимизации $\mathcal{F}_1$. Там не понадобилось даже вводить $\sigma_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1})$, так как все описывалось операциями max и min над $\mathcal{F}_1$.

$\mathscr{F}_1$ из-за существования третьего игрока и его $\mathscr{F}_3$! Таким образом, здесь впервые появилась возможность того, что различие, которое является несущественным для одного игрока, может быть важным для другого. Этого не могло быть в игре двух лиц с нулевой суммой, где каждый игрок выигрывает в точности то, что проигрывает другой.

Чего должен ожидать игрок 1, если два выбора $\sigma_\nu$ являются одинаково важными для игрока 2, но не являются таковыми для игрока 1? Можно ожидать, что он постарается убедить игрока 2 выбрать то $\sigma_\nu$, которое более предпочтительно для него. Он может предложить игроку 2 заплатить ему некоторую сумму, вплоть до той разницы, которую он получит от более предпочтительного для себя действия игрока 2.

Допустив это, нужно считаться также с той возможностью, что игрок 1 может даже стараться убедить игрока 2 выбрать $\sigma_\nu$, которое не максимизирует $\mathscr{F}_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu)$, если это изменение вызовет меньший проигрыш игрока 2, чем увеличение выигрыша игрока 1 [1]). Последний может компенсировать игроку 2 его потери и, возможно даже, отдаст ему некоторую часть своей прибыли.

**24.2.3.** Если, однако, игрок 1 может предложить это игроку 2, то он должен также рассчитывать на подобное предложение игроку 2 и со стороны игрока 3. Это значит, что вовсе не обязательно игрок 2, выбирая $\sigma_\nu$, будет максимизировать $\mathscr{F}_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu)$. Сравнивая два выбора $\sigma_\nu$, надо рассмотреть, будут ли потери игрока 2 покрываться выигрышем игрока 1 или игрока 3, так как это может привести к соглашениям и компенсациям. Таким образом, следует выяснить, какая коалиция будет при данном изменении $\sigma_\nu$ выигрывать — коалиция 1, 2 или коалиция 2, 3.

**24.2.4.** Сказанное снова приводит к рассмотрению коалиций. Более тщательный анализ привел бы нас к рассуждениям и результатам пп. 22.2, 22.3 и § 23 во всех деталях. Но нет необходимости в проведении этого анализа во всех деталях: в конце концов, это просто частный случай, а рассуждения пп. 22.2, 22.3 и § 23 были справедливы (для игр трех лиц с нулевой суммой) при условии, что допускалось рассмотрение соглашений и компенсаций и тем самым коалиций.

Мы хотели показать, что слабость аргументов п. 15.8.2, обнаруженная уже в п. 15.8.3, становится опасной как раз тогда, когда мы выходим за пределы игр двух лиц с нулевой суммой. А это немедленно приводит к механизму коалиций и т. д., что мы и предвидели в начале этой главы. Все это должно быть ясно из приведенного выше анализа. Таким образом, мы возвращаемся к первоначальному методу исследования игр трех лиц с нулевой суммой, т. е. утверждаем справедливость результатов пп. 22.2, 22.3 и § 23.

---

[1]) То есть когда это произойдет за счет игрока 3.

*Глава VI*

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ. ИГРЫ $n$ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

## § 25. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

### 25.1. Мотивировка и определение

**25.1.1.** Обратимся теперь к изучению игры $n$ лиц с нулевой суммой для произвольного $n$. Опыт, приобретенный в гл. V и касающийся случая $n = 3$, наводит на мысль, что возможности коалиций игроков будут играть решающую роль в общей теории, которую мы развиваем. Поэтому важно разработать математические средства для количественного выражения этих «возможностей».

Поскольку мы имеем точное понятие «значения» (значения партии) для игры двух лиц с нулевой суммой, мы можем также приписать «значение» любой данной группе игроков при условии, что ей противопоставлена коалиция всех остальных игроков. В дальнейшем этим несколько эвристическим рассуждениям мы придадим точный смысл. Во всяком случае, важно то, что мы таким образом придем к математическому понятию, опираясь на которое можно пытаться строить общую теорию, и что эта попытка в конце концов приведет к успеху.

Сформулируем теперь точные математические определения, которые осуществят эту программу.

**25.1.2.** Предположим, что мы имеем игру Г с $n$ игроками, обозначенными числами 1, 2, ..., $n$. Удобно ввести множество всех игроков $I = (1, 2, \ldots, n)$. Не делая пока никаких предсказаний или предположений о вероятном протекании партии этой игры, отметим следующее: если мы разобьем игроков на две группы и рассмотрим каждую группу как абсолютную коалицию (т. е. если мы предположим полную кооперацию внутри каждой группы), то мы получим игру двух лиц с нулевой суммой [1]). Точнее: пусть $S$ — некоторое данное подмножество множества $I$, а $-S$ — его дополнение в $I$. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, которая получается, если все игроки $k$, принадлежащие $S$, кооперируются между собой на одной стороне, а все игроки $k$, принадлежащие $-S$, кооперируются между собой на другой стороне.

Рассматриваемая таким образом игра Г подпадает под теорию игр двух лиц с нулевой суммой (гл. III). Каждая партия такой игры имеет вполне определенное значение (мы имеем в виду значение v′, определенное в п. 17.8.1). Обозначим через v ($S$) значение партии для коалиции всех игроков $k$, принадлежащих $S$ (в нашей интерпретации эта коалиция является одним из игроков).

Математическое выражение для v ($S$) получается следующим образом [2]).

**25.1.3.** Пусть имеется игра $n$ лиц с нулевой суммой Г в нормальной форме, как в п. 11.2.3. Каждый игрок $k = 1, 2, \ldots, n$ выбирает в ней

---

[1]) В точности то же самое мы делали для случая $n = 3$ в п. 23.1.1. Возможность обобщения уже упоминалась в начале п. 24.1.

[2]) Здесь повторяется построение из п. 23.2, которое применялось там только в случае $n = 3$.

переменную $\tau_k$ (каждый из них не знает об остальных $n-1$ выборах) и получает выигрыш

$$\mathcal{K}_k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n).$$

Конечно (игра является игрой с нулевой суммой),

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \equiv 0. \tag{25:1}$$

Области значений переменных суть

$$\tau_k = 1, \ldots, \beta_k \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда в игре двух лиц, которая возникает между абсолютной коалицией всех игроков $k \in S$ (игрок 1′) и абсолютной коалицией всех игроков $k \in -S$ (игрок 2′), создается следующая ситуация.

Составной игрок 1′ имеет набор переменных $\tau_k$, где $k$ пробегает все элементы из $S$. Этот набор следует рассматривать как одну переменную, которую мы поэтому будем обозначать одним символом $\tau^S$. Составной игрок 2′ имеет набор переменных $\tau_k$, где $k$ пробегает все элементы из $-S$. Этот набор также является одной переменной, которую мы обозначим через $\tau^{-S}$. Игрок 1′ получает выигрыш

$$\overline{\mathcal{K}}(\tau^S, \tau^{-S}) = \sum_{k \in S} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) = -\sum_{k \in -S} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)\,^{1)}; \tag{25:2}$$

игрок 2′ получает тот же выигрыш с противоположным знаком.

Смешанной стратегией игрока 1′ является вектор $\vec{\xi} \in S_{\beta^S}$ [2], компоненты которого обозначаются через $\xi_{\tau^S}$. Таким образом, принадлежность вектора $\vec{\xi}$ множеству $S_{\beta^S}$ характеризуется условиями

$$\xi_{\tau^S} \geqq 0, \qquad \sum_{\tau^S} \xi_{\tau^S} = 1.$$

Смешанной стратегией игрока 2′ является вектор $\vec{\eta} \in S_{\beta^{-S}}$ [3], компоненты которого обозначаются через $\eta_{\tau^{-S}}$. Таким образом, $\vec{\eta} \in S_{\beta^{-S}}$ характеризуется свойствами

$$\eta_{\tau^{-S}} \geqq 0, \qquad \sum_{\tau^{-S}} \eta_{\tau^{-S}} = 1.$$

Билинейная форма $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, аналогичная (17:2) из п. 17.4.1, имеет вид

$$\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{\tau^S,\, \tau^{-S}} \overline{\mathcal{K}}(\tau^S, \tau^{-S})\, \xi_{\tau^S} \eta_{\tau^{-S}},$$

и, наконец,

$$\mathrm{v}(S) = \max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} \mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

---

[1]) Переменные $\tau^s$ и $\tau^{-s}$ из левой части равенства образуют вместе набор $\tau_1, \ldots, \tau_n$ из двух других частей равенства. Таким образом, $\tau^s$ и $\tau^{-s}$ определяют $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Равенство двух последних выражений является, конечно, лишь констатацией свойства равенства нулю суммы выигрышей.

[2]) $\beta^s$ — число возможных наборов $\tau^s$, т. е. произведение всех $\beta_k$, где $k$ пробегает по всем элементам из $S$.

[3]) $\beta^{-s}$ — число возможных наборов $\tau^{-s}$, т. е. произведение всех $\beta_k$, где $k$ пробегает все элементы из $-S$.

## 25.2. Обсуждение введенного понятия

**25.2.1.** Введенная выше функция $v(S)$ определена для всех подмножеств $S$ множества $I$ и принимает вещественные значения. Следовательно, в смысле п. 13.1.3 она является *числовой функцией* множеств. Назовем ее *характеристической функцией* игры Г. Как мы уже неоднократно указывали, мы предполагаем основать на этой функции построение всей теории игр $n$ лиц с нулевой суммой.

Легко представить себе, что содержится в этом утверждении. Нам придется давать определения всему, что может касаться коалиций между игроками, компенсаций между партнерами в любой коалиции, объединений или борьбы между коалициями и т. д., используя только характеристическую функцию $v(S)$. На первый взгляд эта программа может показаться неразумной, особенно с точки зрения следующих двух фактов:

(а) Для определения $v(S)$ была использована фиктивная игра двух лиц, которая связана с реальной игрой $n$ лиц лишь через посредство теоретического построения. Следовательно, функция $v(S)$ опирается на гипотетическую ситуацию, а не непосредственно на саму игру $n$ лиц.

(b) Функция $v(S)$ описывает, что может получить данная коалиция игроков (а именно множество $S$) от своих противников (от множества $-S$), но она не указывает, как должен распределяться выигрыш между партнерами $k$ из $S$. Это распределение, или «дележ», на самом деле непосредственно определяется индивидуальными функциями $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $k \in S$, в то время как $v(S)$ зависит от гораздо меньшего. Действительно, величина $v(S)$ определяется лишь их частичной суммой $\overline{\overline{\mathcal{K}}}(\tau^S, \tau^{-S})$, и даже еще меньшим, чем эта сумма, поскольку $v(S)$ является значением в седловой точке билинейной формы $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, построенной по $\overline{\overline{\mathcal{K}}}(\tau^S, \tau^{-S})$ (см. формулу из п. 25.1.3).

**25.2.2.** Несмотря на сделанные замечания, мы рассчитываем показать, что характеристическая функция $v(S)$ определяет все, включая «дележ» (см. (b) выше). Анализ игры трех лиц с нулевой суммой, приведенный в гл. V, устанавливает, что непосредственное распределение (т. е. «дележ») на основе функций $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ с необходимостью является возмещением в виде некоторой системы «компенсаций», которые игроки должны дать друг другу, прежде чем могут образоваться коалиции. Эти «компенсации» должны существенно зависеть от имеющихся у каждого партнера из коалиции $S$ (т. е. для каждого $k \in S$) возможностей отказаться от этой коалиции и примкнуть к некоторой другой коалиции $T$. (Можно рассматривать также влияние возможных одновременных и согласованных выходов из коалиции различных подмножеств партнеров из $S$ и т. д.) Другими словами, «дележ» величины $v(S)$ между игроками $k \in S$ должен определяться другой величиной $v(T)$ [1]), а не величинами $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Мы продемонстрировали это в гл. V для игры трех лиц с нулевой суммой. Одна из главных целей теории, которую мы пытаемся построить,— установить то же самое для общей игры $n$ лиц.

## 25.3. Фундаментальные свойства

**25.3.1.** Прежде чем разъяснить важность характеристической функции $v(S)$ для общей теории игр, исследуем ее как математическое понятие само по себе. Мы знаем, что она является числовой функцией множеств,

[1]) Все это в значительной мере — в духе замечаний о роли «виртуального» существования из п. 4.3.3.

определенной для всех подмножеств $S \subset I = (1, \ldots, n)$. Займемся установлением основных ее свойств.

Оказывается, что эти основные свойства — следующие:

(25:3:a) $$v(\varnothing) = 0,$$

(25:3:b) $$v(-S) = -v(S),$$

(25:3:c) $$v(S \cup T) \geqq v(S) + v(T), \text{ если } S \cap T = \varnothing.$$

Сначала докажем, что характеристическая функция множества $v(S)$ любой игры обладает свойствами (25:3:a) — (25:3:c).

**25.3.2.** Простейшим доказательством является концептуальное, которое практически может быть проведено без математических формул. Однако, поскольку мы дали точные математические выражения для $v(S)$ в п. 25.1.3, можно было бы пожелать строго математического формального доказательства — при помощи операций max и min и соответствующих векторных переменных. Подчеркнем поэтому, что наше концептуальное доказательство строго эквивалентно такому желаемому формальному математическому доказательству и что нужный «перевод» может быть осуществлен без особого труда. Кроме того, поскольку концептуальное доказательство делает основные идеи более ясными, в то время как формальное доказательство потребовало бы громоздких выкладок, мы предпочитаем в качестве первого дать именно концептуальное доказательство. Читатель, который этим интересуется, может в качестве хорошего упражнения провести формальное доказательство путем «перевода» нашего концептуального.

**25.3.3.** Доказательство свойства (25:3:a) [1]. Коалиция $\varnothing$ не имеет участников, поэтому она всегда получает выигрыш нуль, следовательно, $v(\varnothing) = 0$.

Доказательство свойства (25:3:b). Величины $v(S)$ и $v(-S)$ определяются одной и той же (фиктивной) игрой двух лиц с нулевой суммой — коалиции $S$ против коалиции $-S$. Значением партии в такой игре для ее двух составных игроков являются соответственно $v(S)$ и $v(-S)$. Поэтому $v(-S) = -v(S)$.

Доказательство свойства (25:3:c). Коалиция $S$ может получить от своих противников (используя надлежащую смешанную стратегию) выигрыш $v(S)$, но не более. Аналогично коалиция $T$ может получить выигрыш $v(T)$, но не более. Следовательно, коалиция $S \cup T$ может получить от своих противников выигрыш $v(S) + v(T)$, даже если подкоалиции $S$ и $T$ и не смогут кооперироваться друг с другом [2]. Поскольку

---

[1]) Отметим, что и пустое множество $\varnothing$ мы рассматриваем в качестве коалиции. Читателю следует тщательно это обдумать. Несмотря на кажущуюся странность, этот шаг совершенно безопасен и вполне соответствует духу общей теории множеств. В самом деле, было бы большим техническим неудобством исключить из рассмотрения пустое множество. Конечно, такая пустая коалиция не имеет ни ходов, ни переменных, ни влияния, ни выигрышей, ни потерь. Но это несущественно.

Множество, дополнительное к $\varnothing$; т. е. множество всех игроков $I$, также будет рассматриваться как возможная коалиция. Это также удобно с теоретико-множественной точки зрения. До некоторой степени такая коалиция также может показаться странной, поскольку у нее нет противников. Хотя она имеет много участников, а следовательно, и ходов, и переменных, она также не оказывает никакого влияния (в игре с нулевой суммой) и не имеет ни выигрышей, ни потерь. Но это также несущественно.

[2]) Заметим, что мы используем здесь условие $S \cap T = \varnothing$. Если бы множества $S$ и $T$ имели общие элементы, то мы не могли бы разбить коалицию $S \cup T$ на подкоалиции $S$ и $T$.

максимум, который может получить коалиция $S \cup T$ при любых условиях, равен $\mathrm{v}(S \cup T)$, отсюда следует $\mathrm{v}(S \cup T) \geqq \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(T)$.

Замечание. Это доказательство является почти что повторением доказательства неравенства $a + b + c \geqq 0$ из п. 22.3.2. Свойство (25:3:c) можно даже вывести из этого соотношения. Действительно, разложим $I$ на три взаимно непересекающихся подмножества $S$, $T$, $-(S \cup T)$. Рассмотрим три соответствующие (гипотетические) абсолютные коалиции в качестве трех игроков игры трех лиц с нулевой суммой, в которую игра Г переводится таким разложением. Тогда $\mathrm{v}(S)$, $\mathrm{v}(T)$, $\mathrm{v}(S \cup T)$ соответствуют приведенным выше величинам $-a$, $-b$, $c$; следовательно, $a + b + c \geqq 0$ означает $-\mathrm{v}(S) - \mathrm{v}(T) + \mathrm{v}(S \cup T) \geqq 0$, т. е. $\mathrm{v}(S \cup T) \geqq \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(T)$.

## 25.4. Непосредственные математические следствия

**25.4.1.** Прежде чем продолжать, мы выведем из свойств (25:3:a) — (25:3:c) несколько следствий. Эти утверждения будут выведены в том смысле, что они верны для *любой* числовой функции множеств $\mathrm{v}(S)$, которая удовлетворяет условиям (25:3:a) — (25:3:c), независимо от того, является она характеристической функцией игры $n$ лиц с нулевой суммой Г или нет.

(25:4) $$\mathrm{v}(I) = 0.$$

Доказательство[1]. На основании свойств (25:3:a) и (25:3:b) мы имеем $\mathrm{v}(I) = v(-\varnothing) = -\mathrm{v}(\varnothing) = 0$.

(25:5) Если $S_1, \ldots, S_p$ — попарно непересекающиеся подмножества множества $I$, то
$$\mathrm{v}(S_1 \cup \ldots \cup S_p) \geqq \mathrm{v}(S_1) + \ldots + \mathrm{v}(S_p).$$

Доказательство получается непосредственно, повторным использованием свойства (25:3:c).

(25:6) Если $S_1, \ldots, S_p$ — разложение множества $I$, т. е. такие попарно непересекающиеся подмножества множества $I$, что $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_p = I$, то
$$\mathrm{v}(S_1) + \ldots + \mathrm{v}(S_p) \leqq 0.$$

Доказательство. По условию $S_1 \cup \ldots \cup S_p = I$, следовательно, $\mathrm{v}(S_1 \cup \ldots \cup S_p) = 0$ на основании (25:4); поэтому (25:6) следует из (25:5).

**25.4.2.** Утверждения (25:4) — (25:6) являются следствиями свойств (25:3:a) — (25:3:c); в то же время они — и даже некоторая их часть — могут эквивалентно заменить свойства (25:3:a) — (25:3:c). Перейдем к точной формулировке.

(25:A) Условия (25:3:a) — (25:3:c) эквивалентны утверждению (25:6) только для значений $p = 1, 2, 3$; но (25:6) должно тогда выполняться для $p = 1, 2$ со знаком $=$, а для $p = 3$ — со знаком $\leqq$.

Доказательство. (25:6) для $p = 2$ со знаком $=$ означает $\mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(-S) = 0$ ($S_1$ обозначено через $S$, так что $S_2$ есть $-S$), т. е. $\mathrm{v}(-S) = -\mathrm{v}(S)$, что является свойством (25:3:b).

(25:6) для $p = 1$ со знаком $=$ означает $\mathrm{v}(I) = 0$ (в этом случае множеством $S_1$ должно быть $I$), что является утверждением (25:4). На основании (25:3:b) мы получаем (25:3:a) (см. приведенное доказательство утверждения (25:4)).

[1]) Для функции $\mathrm{v}(S)$, возникающей из игры, обе формулы (25:3:a) и (25:4) по смыслу содержатся в сноске 1 на стр. 261.

(25:6) для $p=3$ со знаком $\leqq$ означает $\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)+\mathrm{v}(-(S\cup T))\leqq 0$ (обозначаем $S_1$ и $S_2$ соответственно через $S$, $T$; тогда множеством $S_3$ является $-(S\cup T)$), т. е.

$$-\mathrm{v}(-(S\cup T))\geqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T).$$

На основании (25:3:b) мы получаем $\mathrm{v}(S\cup T)\geqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)$, т. е. (25:3:c).

Итак, наши утверждения в точности эквивалентны конъюнкции свойств (25:3:a) — (25:3:c).

# § 26. ПОСТРОЕНИЕ ИГРЫ С ЗАДАННОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

## 26.1. Построение

**26.1.1.** Докажем теперь утверждение, обратное тому, которое было установлено в п. 25.3.1. Именно, для всякой числовой функции множеств $\mathrm{v}(S)$, удовлетворяющей условиям (25:3:a) — (25:3:c), существует игра $n$ лиц с нулевой суммой Г, для которой эта функция $\mathrm{v}(S)$ является характеристической.

Во избежание недоразумений удобнее обозначить данную числовую функцию, удовлетворяющую условиям (25:3:a) — (25:3:c), через $\mathrm{v}_0(S)$. Мы определим с ее помощью некоторую игру $n$ лиц с нулевой суммой Г и обозначим ее характеристическую функцию через $\mathrm{v}(S)$. Тогда нужно будет доказать, что $\mathrm{v}(S)\equiv \mathrm{v}_0(S)$.

Итак, пусть дана числовая функция множеств $\mathrm{v}_0(S)$, удовлетворяющая условиям (25:3:a) — (25:3:c). Определим игру $n$ лиц с нулевой суммой Г следующим образом [1]).

Каждый игрок $k=1, 2, \ldots, n$, делая ход, выбирает подмножество $S_k\subset I$, содержащее $k$. Каждый игрок делает свой выбор независимо от выборов других игроков [2]). После этого платежи, которые должны быть сделаны, определяются следующим образом.

Назовем *кольцом* [3, 4]) любое множество игроков $S$, для которого

(26:1) $$S_k=S \text{ при каждом } k\in S$$

Всякие два кольца с некоторым общим элементом совпадают [5]). Другими словами, совокупность всех колец (которые фактически образовались в партии) является системой попарно непересекающихся подмножеств множества $I$.

---

[1]) Эта игра Г является, по существу, более общим аналогом простой мажоритарной игры трех лиц, определенной в п. 21.1. Мы будем сопровождать последующее изложение комментариями, раскрывающими детали этой аналогии.

[2]) Множество $I$, состоящее из $n$ элементов, имеет $2^{n-1}$ подмножеств $S$, содержащих $k$, которые можно пронумеровать индексами $\tau_k(S)=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$. Если теперь игрок $k$ выбирает вместо множества $S_k$ свой индекс $\tau_k=\tau_k(S_k)=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, то игра приобретает нормальную форму, как в п. 11.2.3. Очевидно, все $\beta_k=2^{n-1}$.

[3]) Кольца являются аналогами пар в п. 21.1; поэтому здесь применима сноска 2 со стр. 243; в частности, кольца являются формальным понятием из множества правил игры, ведущим к коалициям, которые влияют на фактическое течение всякой партии.

[4]) Другими словами, кольцо — это такое множество игроков, в котором каждый игрок выбирает как раз это множество. Аналогия с определением пары в п. 21.1 очевидна. Различия вызваны формальными соображениями: в п. 21.1 каждый игрок должен назвать другой элемент желаемой пары; теперь же мы предполагаем, что он указывает все кольцо. Более подробный анализ этого отличия был бы достаточно легким, но в нем не видно необходимости.

[5]) Доказательство: пусть $S$ и $T$ — два кольца с общим элементом $k$; тогда на основании (26:1) $S_k=S$ и $S_k=T$, и, следовательно, $S=T$.

Каждый игрок, не содержащийся ни в каком из определенных так колец, образует сам по себе (одноэлементное) множество, которое называется *сольным множеством*. Таким образом, совокупность всех колец и сольных множеств (которые действительно образовались в партии) является разложением множества $I$, т. е. системой попарно непересекающихся подмножеств множества $I$, сумма которых есть $I$. Обозначим эти множества через $C_1, \ldots, C_p$, а число элементов в них соответственно через $n_1, \ldots, n_p$.

Рассмотрим теперь игрока $k$. Он принадлежит одному из этих множеств $C_1, \ldots, C_p$, скажем $C_q$. Тогда игрок $k$ получает сумму

$$\frac{1}{n_q} \mathrm{v}_0(C_q) - \frac{1}{n} \sum_{\tau=1}^{p} \mathrm{v}_0(C_\tau)\text{ [1]}. \tag{26:2}$$

На этом описание игры Г закончено. Покажем теперь, что игра Г является игрой $n$ лиц с нулевой суммой и что она имеет нужную характеристическую функцию $\mathrm{v}_0(S)$.

**26.1.2.** Доказательство того, что построенная игра является игрой с нулевой суммой. Рассмотрим одно из множеств $C_q$. Каждый из $n_q$ игроков этого множества получает один и тот же выигрыш, выражаемый формулой (26:2). Следовательно, игроки из $C_q$ получают вместе

$$\mathrm{v}_0(C_q) - \frac{n_q}{n} \sum_{\tau=1}^{p} \mathrm{v}_0(C_\tau). \tag{26:3}$$

Чтобы найти полную величину выигрыша, которую получают все игроки $1, \ldots, n$, нужно просуммировать выражение (26:3) по всем множествам $C_q$, т. е. по всем $q = 1, \ldots, p$. Эта сумма, очевидно, равна

$$\sum_{q=1}^{p} \mathrm{v}_0(C_q) - \sum_{\tau=1}^{p} \mathrm{v}_0(C_\tau),$$

т. е. нулю [2].

Доказательство того, что характеристической функцией игры является $\mathrm{v}_0(S)$. Обозначим характеристическую функцию игры Г через $\mathrm{v}(S)$. Напомним, что условия (25:3:a) — (25:3:c) для $\mathrm{v}(S)$ выполняются, так как эта функция является характеристической, а для $\mathrm{v}_0(S)$ — по предположению. Поэтому условия (25:4) — (25:6) также выполняются для каждой из функций $\mathrm{v}(S)$ и $\mathrm{v}_0(S)$.

Докажем сначала, что

$$\mathrm{v}(S) \geqq \mathrm{v}_0(S) \text{ для всех подмножеств } S \subset I. \tag{26:4}$$

Если $S$ пусто, то обе стороны неравенства равны нулю на основании свойства (25:3:a), поэтому можно предполагать, что $S$ не пусто. В этом случае коалиция всех игроков $k \in S$ может влиять на выборы множеств $S_k$ так, чтобы наверняка сделать $S$ кольцом. Для этого достаточно каждому $k \in S$ выбрать $S_k = S$. Что бы ни делали другие игроки (из $-S$), $S$ будет, следовательно, одним из множеств (колец или сольных множеств)

---

[1] Течение партии, т. е. выборы $S_1, \ldots, S_n$ или, в смысле сноски 2 на стр. 263, выборы $\tau_1, \ldots, \tau_n$, определяют множества $C_1, \ldots, C_p$, а следовательно, и выражение (26:2). Конечно, функция (26:2) совпадает с функцией $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ из общей теории.

[2] Очевидно, $\sum_{q=1}^{p} n_q = n$.

$C_1, \ldots, C_p$, скажем $C_q$. Таким образом, каждый игрок $k \in C_q = S$ получает выигрыш (26:2); следовательно, вся коалиция $S$ получает (26:3). Далее, мы знаем, что система множеств

$$C_1, \ldots, C_p$$

является разложением множества $I$; поэтому на основании (25:6), $\sum_{\tau=1}^{p} \mathrm{v}_0(C_\tau) \leqq 0$. Другими словами, выражение (26:3) оказывается $\geqq \mathrm{v}_0(C_q) = \mathrm{v}_0(S)$ [1]. Иначе говоря, игроки, принадлежащие коалиции $S$, могут обеспечить себе по меньшей мере выигрыш $\mathrm{v}_0(S)$ независимо от того, что делают игроки из $-S$. Это означает, что $\mathrm{v}(S) \geqq \mathrm{v}_0(S)$, т. е. (26:4).

Теперь мы можем установить требуемую формулу

$$\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S). \tag{26:5}$$

Применим (26:4) к $-S$. Согласно свойству (25:3:b) это означает $-\mathrm{v}(S) \geqq -\mathrm{v}_0(S)$, т. е.

$$\mathrm{v}(S) \leqq \mathrm{v}_0(S). \tag{26:6}$$

(26:4) и (26:6) вместе дают (26:5) [2].

### 26.2. Резюме

**26.2.** Сформулируем кратко полученные результаты. В пп. 25.3—26.1 мы получили полное математическое описание характеристических функций $\mathrm{v}(S)$ всех возможных игр $n$ лиц с нулевой суммой $\Gamma$. Если мы покажем, что предположение, высказанное в п. 25.2.1, верно, т. е. если мы окажемся в силах построить всю теорию игр на основе глобальных свойств коалиций, выраженных функцией $\mathrm{v}(S)$, то наша характеризация функции $\mathrm{v}(S)$ представит собой точную математическую основу всей теории. Следовательно, характеризация функции $\mathrm{v}(S)$ и функциональные соотношения (25:3:a) — (25:3:c) имеют особую важность.

Поэтому мы приведем сначала математический анализ смысла и непосредственных свойств этих соотношений. Будем называть функции, удовлетворяющие этим соотношениям, *характеристическими функциями*, даже если они рассматриваются сами по себе, без связи с какой-либо игрой.

## § 27. СТРАТЕГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ. НЕСУЩЕСТВЕННЫЕ И СУЩЕСТВЕННЫЕ ИГРЫ

### 27.1. Стратегическая эквивалентность. Редуцированная форма

**27.1.1.** Рассмотрим игру $n$ лиц с нулевой суммой $\Gamma$ с характеристической функцией $\mathrm{v}(S)$. Пусть задана также система чисел $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$. Образуем тогда новую игру $\Gamma'$, которая согласуется с игрой $\Gamma$ во всем, кроме следующего: $\Gamma'$ играется точно так же, как и $\Gamma$, но когда она закан-

---

[1] Отметим, что выражение (26:3), т. е. полный выигрыш, полученный коалицией $S$, не определяется выборами игроков только из $S$. Но мы установили для нее нижнюю границу $\mathrm{v}_0(S)$, которая определена.

[2] Заметим, что в нашем обсуждении оптимальных стратегий (фиктивной) игры двух лиц между коалициями $S$ и $-S$ (проведенное выше доказательство действительно привело к ней) мы рассматривали только чистые стратегии, но не смешанные. Другими словами, все эти игры двух лиц оказались вполне определенными.

Это, однако, не имеет отношения к той цели, которую мы сейчас преследуем.

чивается, игрок $k$ получает в $\Gamma'$ выигрыш, который он должен был бы получить в $\Gamma$ (после той же партии), плюс $\alpha_k^0$. (Заметим, что $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$ — абсолютные константы!) Таким образом, если игра $\Gamma$ представлена в нормальной форме, как в п. 11.2.3, с функциями $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, то $\Gamma'$ также представлена в нормальной форме с соответствующими функциями

$$\mathcal{K}'_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) + \alpha_k^0.$$

Очевидно, $\Gamma'$ будет игрой $n$ лиц с нулевой суммой (одновременно с $\Gamma$) тогда и только тогда, когда

(27:1) $$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 = 0,$$

что мы и будем предполагать.

Обозначим характеристическую функцию игры $\Gamma'$ через $\mathrm{v}'(S)$; тогда, очевидно,

(27:2) $$\mathrm{v}'(S) \equiv \mathrm{v}(S) + \sum_{k \in S} \alpha_k^0 \text{ [1]}.$$

Ясно, что стратегические возможности игр $\Gamma$ и $\Gamma'$ совершенно одни и те же. Единственное различие между этими двумя играми состоит только в добавлении после каждой партии фиксированных платежей $\alpha_k^0$. И эти платежи абсолютно фиксированы; ничто из того, что могут сделать какие-нибудь игроки или все они, не изменит их. Можно было бы также сказать, что положение каждого игрока сдвигается на фиксированную величину, но что их стратегические возможности, стимулы и т. д. совершенно не меняются. Другими словами, если две характеристические функции $\mathrm{v}(S)$ и $\mathrm{v}'(S)$ связаны между собой соотношением (27:2) [2], то всякая игра с характеристической функцией $\mathrm{v}(S)$ со всех стратегических точек зрения полностью эквивалентна некоторой игре с характеристической функцией $\mathrm{v}'(S)$, и обратно. Это значит, что $\mathrm{v}(S)$ и $\mathrm{v}'(S)$ описывают два стратегически эквивалентных семейства игр. В этом смысле $\mathrm{v}(S)$ и $\mathrm{v}'(S)$ могут сами считаться эквивалентными.

Заметим, что все эти рассуждения не зависят от предположения, воспроизведенного в п. 26.2, согласно которому все игры с одной и той же функцией $\mathrm{v}(S)$ имеют одни и те же стратегические характеристики.

**27.1.2.** Преобразование (27:2) (нет необходимости принимать во внимание свойство (27:1), см. сноску 2 на этой стр.) заменяет, как мы видели, функцию множеств $\mathrm{v}(S)$ на функцию множеств $\mathrm{v}'(S)$, вполне стратегически эквивалентную ей. Поэтому назовем это отношение *стратегической эквивалентностью*.

Перейдем теперь к математическим свойствам понятия стратегической эквивалентности характеристических функций.

Желательно выбрать из каждого семейства стратегически эквивалентных характеристических функций $\mathrm{v}(S)$ некоторого особенно простого

[1]) Истинность этого соотношения становится очевидной, если вспомнить, как были определены функции $\mathrm{v}(S)$ и $\mathrm{v}'(S)$ с помощью коалиции $S$. Легко также доказать (27:2) формально с помощью функций $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\mathcal{K}'_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

[2]) Из этих условий следует (27:1), и нет необходимости его отдельно постулировать. В самом деле, на основании свойства (25:4) из п. 25.4.1 $\mathrm{v}(I) = \mathrm{v}'(I) = 0$; следовательно, (27:2) дает

$$\sum_{k \in I} \alpha_k^0 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 = 0.$$

представителя $\overline{\mathrm{v}}(S)$. Основная мысль состоит в том, чтобы по заданной функции $\mathrm{v}(S)$ можно было легко найти этого представителя $\overline{\mathrm{v}}(S)$, а также чтобы две функции $\mathrm{v}(S)$ и $\mathrm{v}'(S)$ были бы стратегически эквивалентны тогда и только тогда, когда их представители $\overline{\mathrm{v}}(S)$ и $\overline{\mathrm{v}}'(S)$ совпадают. Кроме того, мы можем попытаться выбирать этих представителей $\overline{\mathrm{v}}(S)$ таким образом, чтобы анализ их был проще, чем анализ исходной функции $\mathrm{v}(S)$.

**27.1.3.** Когда мы исходили из характеристических функций $\mathrm{v}(S)$ и $\mathrm{v}'(S)$, понятие стратегической эквивалентности могло опираться только на соотношение (27:2); свойство (27:1) следовало отсюда (см. сноску 2, стр. 266). Однако теперь мы будем исходить лишь из одной характеристической функции $\mathrm{v}(S)$ и будем рассматривать все возможные стратегически эквивалентные ей функции $\mathrm{v}'(S)$, для того чтобы выбрать среди них представителя $\overline{\mathrm{v}}(S)$. Отсюда возникает вопрос: какие системы $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$ можно использовать, т. е. для каких из этих систем (используя соотношение (27:2)) тот факт, что $\mathrm{v}(S)$ является характеристической функцией, влечет за собой то же самое для $\mathrm{v}'(S)$? Ответ получается сразу как из того, что мы говорили до сих пор, так и в результате непосредственной проверки: условие (27:1) является необходимым и достаточным [1]).

Таким образом, при отыскании представителя $\overline{\mathrm{v}}(S)$ мы имеем $n$ неопределенных величин $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$, но $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$ подчиняются ограничению (27:1). Следовательно, мы имеем в нашем распоряжении $n-1$ свободных параметров.

**27.1.4.** Итак, можно рассчитывать подчинить искомого представителя $\overline{\mathrm{v}}(S)$ $n-1$ требованиям. В качестве таковых возьмем уравнения

(27:3) $$\overline{\mathrm{v}}((1)) = \overline{\mathrm{v}}((2)) = \ldots = \overline{\mathrm{v}}((n))\ ^{2)},$$

т. е. потребуем, чтобы каждая коалиция, состоящая из одного лица (каждый игрок, предоставленный самому себе), имела бы одно и то же значение.

Можно подставить (27:2) в (27:3) и взять полученное вместе с (27:1); тем самым будут сформулированы все наши требования относительно $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$. Так мы получаем

(27:1*) $$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 = 0,$$

(27:2*) $$\mathrm{v}((1)) + \alpha_1^0 = \mathrm{v}((2)) + \alpha_2^0 = \ldots = \mathrm{v}((n)) + \alpha_n^0.$$

Легко проверить, что эти уравнения имеют ровно одно решение $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$:

(27:4) $$\alpha_k^0 = -\mathrm{v}((k)) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{v}((j))\ ^{3)}.$$

---

[1]) Это детальное обсуждение может показаться педантичным. Мы привели его только для того, чтобы подчеркнуть, что, когда мы исходим из двух характеристических функций $\mathrm{v}(S)$ и $\mathrm{v}'(S)$, условие (27:1) становится лишним; если мы, однако, исходим только из одной характеристической функции, то условие (27:1) необходимо.

[2]) Отметим, что здесь имеется $n-1$, а не $n$ уравнений.

[3]) Доказательство. Обозначим общее значение $n$ выражений из (27:2*) через $\beta$. Тогда (27:2*) приводит к $\alpha_k^0 = -\mathrm{v}((k)) + \beta$, и, следовательно, из (27:1*) получаем

$$n\beta - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k)) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \beta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k)).$$

Итак, мы можем сказать следующее.

(27:A) Будем называть характеристическую функцию $\bar{\mathrm{v}}(S)$ *редуцированной* тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям (27:3). Каждая характеристическая функция $\mathrm{v}(S)$ стратегически эквивалентна ровно одной редуцированной функции $\bar{\mathrm{v}}(S)$. Эта функция $\bar{\mathrm{v}}(S)$ определяется формулами (27:2) и (27:4), и мы назовем ее *редуцированной формой* функции $\mathrm{v}(S)$.

Редуцированные функции и будут теми представителями, которых мы отыскиваем.

### 27.2. Неравенства. Величина $\gamma$

**27.2.** Рассмотрим редуцированную характеристическую функцию $\bar{\mathrm{v}}(S)$. Обозначим общее значение $n$ выражений из (27:3) через $-\gamma$, т. е. положим

(27:5) $$-\gamma=\bar{\mathrm{v}}((1))=\bar{\mathrm{v}}((2))=\ldots=\bar{\mathrm{v}}((n)).$$

Систему равенств (27:5) можно записать также следующим образом:

(27:5*) $\bar{\mathrm{v}}(S)=-\gamma$ для любого одноэлементного множества $S$.

Используя (25:3:b) из п. 25.3.1, преобразуем (27:5*):

(27:5**) $\bar{\mathrm{v}}(S)=\gamma$ для любого $(n-1)$-элементного множества $S$.

Обратим еще раз внимание на то, что любое из условий (27:5), (27:5*), (27:5**), кроме того, что оно определяет $\gamma$, является также переформулированием условия (27:3), т. е. характеризацией того, что функция $\bar{\mathrm{v}}(S)$ редуцированная.

Применим теперь (25:6) из п. 25.4.1 к одноэлементным множествам $S_1=(1), \ldots, S_n=(n)$. (Так, что $p=n$.) Тогда (27:5) дает $-n\gamma\leqq 0$, т. е.

(27:6) $$\gamma\geqq 0.$$

Рассмотрим далее произвольное подмножество $S\subset I$. Пусть $p$ — число его элементов: $S=(k_1, \ldots, k_p)$. Применим теперь к одноэлементным множествам $S_1=(k_1), \ldots, S_p=(k_p)$ (25:5) из п. 25.4.1. Тогда (27:5) дает

$$\bar{\mathrm{v}}(S)\geqq -p\gamma.$$

Применим это также к множеству $-S$, содержащему $n-p$ элементов. На основании (25:3:b) из п. 25.3.1 указанное выше неравенство перейдет в неравенство

$$-\bar{\mathrm{v}}(S)\geqq -(n-p)\gamma, \quad \text{т. е.} \quad \bar{\mathrm{v}}(S)\leqq (n-p)\gamma.$$

Объединяя последние два неравенства, мы получаем

(27:7) $-p\gamma\leqq\bar{\mathrm{v}}(S)\leqq(n-p)\gamma$ для любого $p$-элементного множества $S$.

(27:5*) и равенство $\bar{\mathrm{v}}(\varnothing)=0$ (т. е. (25:3:a) из п. 25.3.1) могут быть также сформулированы иначе:

(27:7*) Для $p=0, 1$ в первом соотношении из (27:7) имеем знак $=$.

(27:5**) и равенство $\overline{\text{v}}(I) = 0$ (т. е. (25:4) из п. 25.4.1) могут быть также сформулированы иначе:

(27:7**) Для $p = n - 1$, $n$ во втором соотношении из (27:7) мы имеем знак $=$.

### 27.3. Несущественность и существенность

**27.3.1.** При анализе этих неравенств лучше всего различать теперь два случая. Это различие основано на неравенстве (27:6).

Первый случай: $\gamma = 0$. Тогда (27:7) дает $\overline{\text{v}}(S) = 0$ для всех $S$. Это совершенно тривиальный случай, когда игра, очевидно, лишается дальнейших возможностей. Нет ни поводов для каких-либо коалиционных стратегий, ни элементов борьбы или конкуренции: каждый игрок может играть сам по себе, поскольку нет преимуществ ни в одной из коалиций. В самом деле, каждый игрок может получить выигрыш нуль независимо от того, что делают другие игроки. И ни в какой коалиции все ее участники не могут получить вместе больше чем нуль. Следовательно, совершенно очевидно, что значение партии в такой игре равно нулю для каждого игрока.

Если произвольная характеристическая функция $\overline{\text{v}}(S)$ стратегически эквивалентна такой характеристической функции $\overline{\text{v}}(S)$, т. е. если ее редуцированной формой является $\overline{\text{v}}(S) \equiv 0$, то мы находимся в тех же условиях, только сдвинутых на $\alpha_k^0$ для игрока $k$. Партия игры Γ с этой характеристической функцией $\text{v}(S)$ имеет, очевидно, значение $\alpha_k^0$ для игрока $k$: он может получить этот выигрыш даже один, независимо от того, что делают другие игроки. Никакая коалиция в целом не могла бы добиться большего.

Игру Γ, у которой характеристическая функция $\text{v}(S)$ имеет такую редуцированную форму $\overline{\text{v}}(S) \equiv 0$, назовем *несущественной* [1]).

**27.3.2.** Второй случай: $\gamma > 0$. Изменяя единицу измерения [2]), мы можем сделать $\gamma = 1$ [3]). Это, очевидно, не влияет на аспекты игры, важные со стратегической точки зрения, и иногда это вполне удобно делать. Однако здесь мы делать этого не будем.

В рассматриваемом случае игроки при всех обстоятельствах имеют достаточные основания пожелать образования коалиций. Всякий игрок, предоставленный самому себе, теряет сумму $\gamma$ (т. е. он получает $-\gamma$, см. (27:5*) или (27:7*)), в то время как любые $n - 1$ игроков, кооперируясь, выигрывают вместе эту сумму $\gamma$ (т. е. их коалиция получает $\gamma$, см. (27:5**) или (27:7**)).

Замечание. Это, конечно, не исчерпывает полностью все возможности. Могут существовать также другие коалиции, содержащие больше одного, но меньше $n - 1$ игроков, к которым следует стремиться. (Если это происходит, то $n - 1$ должно превосходить 1 более чем на 1, т. е. должно быть $n \geqq 4$.) Это зависит от функции $\overline{\text{v}}(S)$ для множеств $S$ с числом элементов больше 1, но меньше $n - 1$. Вместе с тем только полная и детальная теория игр может правильно оценить роль этих коалиций.

---

[1]) То, что это совпадает со значением, придаваемым слову «несущественный» в п. 23.1.3 (для частного случая игры трех лиц с ненулевой суммой), будет видно в конце п. 27.4.1.

[2]) Если производятся платежи, то мы имеем в виду денежную единицу. В более широком смысле это могла бы быть единица полезности. См. п. 2.1.1.

[3]) Это было бы невозможно в первом случае, когда $\gamma = 0$.

Указанное выше сравнение изолированных игроков и коалиций $n-1$ игроков (самые большие коалиции, которые кому-либо могут противостоять!) достаточно только для данной конкретной цели, состоящей в установлении важности коалиций в такой обстановке.

Следовательно, подходящая коалиционная стратегия имеет теперь большое значение.

Назовем игру Г *существенной*, если ее характеристическая функция $\mathrm{v}(S)$ имеет редуцированную форму $\overline{\mathrm{v}}(S) \not\equiv 0$ [1]).

## 27.4. Различные критерии. Неаддитивные полезности

**27.4.1.** Пусть задана характеристическая функция $\mathrm{v}(S)$, а мы хотим из ее редуцированной формы $\overline{\mathrm{v}}(S)$ получить явное выражение для $\gamma$ (см. выше).

Число $-\gamma$ является общим значением всех $\overline{\mathrm{v}}((k))$, т. е. выражений вида $\mathrm{v}((k)) + \alpha_k^0$, что на основании равенства (27:4) равно $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{v}((j))$ [2]). Следовательно,

$$\gamma = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{v}((j)). \tag{27:8}$$

В результате мы имеем:

(27:B) Игра Г является *несущественной* тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{v}((j)) = 0$ (т. е. $\gamma = 0$), и *существенной* тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{v}((j)) < 0$ (т. е. $\gamma < 0$) [3]).

Для игры трех лиц с нулевой суммой, в обозначениях п. 23.1, мы имеем $\mathrm{v}((1)) = -a$, $\mathrm{v}((2)) = -b$, $\mathrm{v}((3)) = -c$, так что $\gamma = \frac{1}{3}\Delta$. Поэтому для игры трех лиц с нулевой суммой наши понятия существенности и несущественности сводятся к соответствующим понятиям из п. 23.1.3. Учитывая интерпретации этих понятий в обоих случаях, этого и следовало ожидать.

**27.4.2.** Можно сформулировать некоторые дальнейшие критерии несущественности.

(27:C) Игра Г является несущественной тогда и только тогда, когда значения ее характеристической функции $\mathrm{v}(S)$ могут быть представлены в виде

$$\mathrm{v}(S) \equiv \sum_{k \in S} \alpha_k^0$$

для некоторой системы чисел $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$.

Доказательство. В самом деле, на основании (27:2) это как раз и означает, что функция $\mathrm{v}(S)$ стратегически эквивалентна $\overline{\mathrm{v}}(S) \equiv$

---

1) См. снова сноску 1 на стр. 269.

2) Итак, $-\gamma$ совпадает с $\beta$ из сноски 3 на стр. 267.

3) Мы уже видели, что тот или другой случай должен иметь место, поскольку

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{v}((j)) \leqq 0 \quad \text{и} \quad \gamma \geqq 0.$$

$\equiv 0$. Поскольку функция $\bar{\text{v}}(S)$ редуцированная, то она является редуцированной формой $\text{v}(S)$, а это и означает несущественность последней.

(27:D) Игра $\Gamma$ является несущественной тогда и только тогда, когда для ее характеристической функции $\text{v}(S)$ в условии (25:3:c) из п. 25.3.1 всегда имеет место знак $=$, т. е. когда

$$\text{v}(S \cup T) = \text{v}(S) + \text{v}(T) \text{ при } S \cap T = \varnothing.$$

Доказательство. Необходимость. Функция $\text{v}(S)$ указанного в (27:C) вида, очевидно, обладает этим свойством.

Достаточность. Повторное применение этого равенства дает знак $=$ в (25:5) из п. 25.4.1, т. е.

$$\text{v}(S_1 \cup \ldots \cup S_p) = \text{v}(S_1) + \ldots + \text{v}(S_p),$$

если $S_1, \ldots, S_p$ попарно не пересекаются.

Рассмотрим произвольное множество $S$, например $S = (k_1, \ldots, k_p)$. Тогда для $S_1 = (k_1), \ldots, S_p = (k_p)$ мы получаем

$$\text{v}(S) = \text{v}((k_1)) + \ldots + \text{v}((k_p)).$$

Таким образом, мы имеем

$$\text{v}(S) = \sum_{k \in S} \alpha_k^0,$$

где $\alpha_1^0 = \text{v}((1)), \ldots, \alpha_n^0 = \text{v}((n))$, так что игра $\Gamma$ является несущественной на основании (27:C).

**27.4.3.** Оба критерия (27:C) и (27:D) выражают, что значение для любой коалиции получается из значений для ее участников [1]) путем суммирования. Следует помнить, какую роль в экономической литературе играет аддитивность значения или, скорее, ее нередкое отсутствие. Случаи, в которых значение, вообще говоря, не аддитивно, являются наиболее важными, но они представляют серьезные трудности при любом теоретическом подходе к ним; и нельзя сказать, что эти трудности удалось где-либо действительно преодолеть. В этой связи следует вспомнить обсуждения таких понятий, как дополнительность, полное значение, дележ и т. д. Теперь мы приступаем к соответствующему этапу нашей теории; здесь существенно то, что мы обнаруживаем аддитивность только в неинтересном (несущественном) случае, в то время как игры, действительно представляющие интерес (существенные), имеют неаддитивную характеристическую функцию [2]).

Читатели, знакомые с математической теорией меры, придут к следующему заключению: аддитивные функции $\text{v}(S)$, т. е. несущественные игры, оказываются в точности функциями меры на множестве $I$, которые придают множеству $I$ полную меру нуль. Таким образом, произвольные характеристические функции $\text{v}(S)$ являются новым обобщением понятия меры. Эти замечания глубоко связаны с предыдущими замечаниями относительно экономического значения. Однако подробное рассмотрение этого вопроса увело бы нас слишком далеко [3]).

---

[1]) Читатель понимает, что мы используем слово «значение» (значение для коалиции $S$) для обозначения величины $\text{v}(S)$.

[2]) В данный момент мы, разумеется, занимаемся только некоторым частным аспектом нашей теории: мы рассматриваем только значения для коалиций, т. е. согласованных поведений, а не значения для экономических благ или услуг. Читатель заметит, однако, что эта конкретизация заходит не так далеко, как это может показаться: товары и услуги в действительности означают экономические действия при их обмене, т. е. означают согласованные поведения.

[3]) Теория меры появляется вновь в другой связи. См. п. 41.3.3.

## 27.5. Неравенства в случае существенности

**27.5.1.** Вернемся к неравенствам из п. 27.2, в частности к (27:7), (27:7*), (27:7**). Для $\gamma = 0$ (в случае несущественности) все, очевидно, тривиально. Предположим поэтому, что $\gamma > 0$ (случай существенности).

Утверждения (27:7), (27:7*), (27:7**) описывают область возможных значений для $\overline{\mathrm{v}}(S)$ при любом числе $p$ элементов из $S$. Эта область значений изображена на рис. 30 для каждого $p = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1, n$.

Можно добавить следующие замечания.

**27.5.2.** Первое. Установим, что в существенной игре, т. е. при $\gamma > 0$, обязательно должно быть $n \geqq 3$. В противном случае формулы (27:7), (27:7*), (27:7**) (или рис. 30, который выражает их содержание) приводят к противоречию: для $n = 1$ или $n = 2$ $(n-1)$-элементное множество $S$ имеет 0 или 1 элемент; следовательно, его функция $\overline{\mathrm{v}}(S)$ должна, с одной стороны, равняться $\gamma$, а с другой, 0 или $-\gamma$, что невозможо [1]).

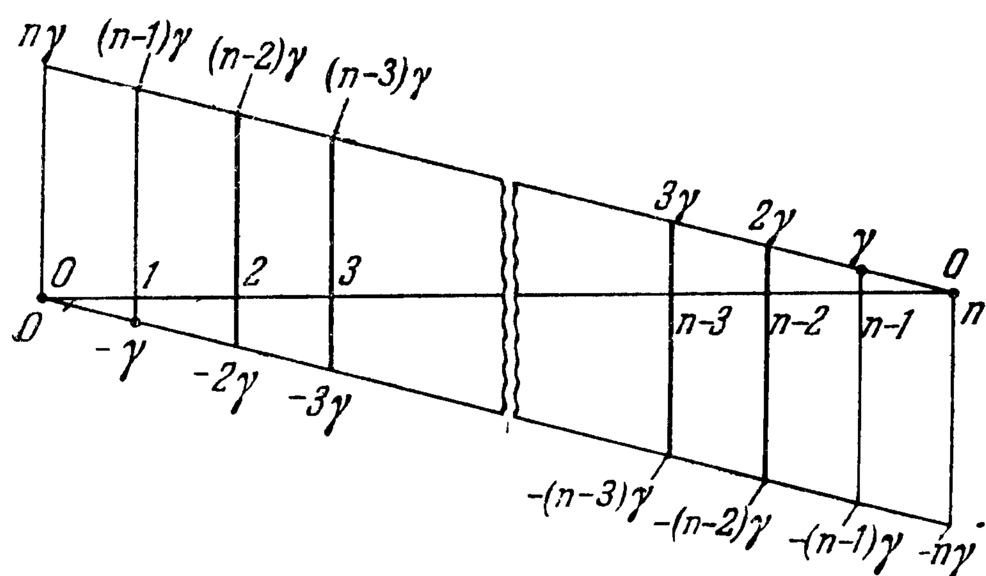


Рис. 30.

Второе. Для наименьшего возможного количества участников в существенной игре, т. е. для $n = 3$, формулы (27:7), (27:7*), (27:7**) (или рис. 30) определяют все: они указывают значение функции $\mathrm{v}(S)$ для 0, 1, $n-1$, $n$-элементных множеств $S$; а для $n = 3$ все возможные количества элементов следующие: 0, 1, 2, 3. (См. также замечание на стр. 269.) Это согласуется с фактом, установленным в п. 23.1.3, на основании которого существует только один тип существенных игр трех лиц с нулевой суммой.

Третье. Для большего количества участников, т. е. при $n \geqq 4$, в задаче появляется новое усложнение. Как показывают формулы (27:7), (27:7*), (27:7**) (или рис. 30), количество элементов $p$ множества $S$ может теперь иметь значения, отличные от 0, 1, $n-1$, $n$. Другими словами, интервал

$$2 \leqq p \leqq n-2 \tag{27:9}$$

становится теперь допустимым [2]). Именно в этом интервале указанные формулы не определяют больше единственного значения функции $\overline{\mathrm{v}}(S)$; они устанавливают для него лишь интервал

$$-p\gamma \leqq \overline{\mathrm{v}}(S) \leqq (n-p)\gamma, \tag{27:7}$$

длина которого равна $n\gamma$ при любом $p$ (см. снова рис. 30).

**27.5.3.** В связи с этим возникает вопрос: допусти́м ли в действительности весь интервал (27:7), т. е. не может ли он быть еще сужен при помощи дальнейших, более подробных исследований функции $\overline{\mathrm{v}}(S)$? Ответ

[1]) Конечно, в игре одного лица с нулевой суммой вообще ничего не происходит, а для игр двух лиц с нулевой суммой мы имеем теорию, в которой коалиции не возникают. Поэтому во всех этих случаях и следовало ожидать несущественность.

[2]) Можно взять $n-3$ элемента, и это число положительно при $n \geqq 4$.

оказывается отрицательным. Для любого $n \geqq 4$ можно фактически определить некоторую игру $\Gamma_p$, в которой для каждого $p$ из интервала (27:9) функция $\overline{\text{v}}(S)$ принимает оба значения $-p\gamma$ и $(n-p)\gamma$ для соответствующих $p$-элементных множеств $S$. Мы ограничимся здесь этим указанием, не вдаваясь в дальнейшие детали.

Резюмируем. Фактические разветвления нашей теории игр появляются только тогда, когда $n \geqq 4$. (См. замечание на стр. 269, где разъясняется эта же идея.)

### 27.6. Векторные операции над характеристическими функциями

**27.6.1.** Представляется уместным закончить этот параграф некоторыми замечаниями, носящими более формальный характер.

Условия (25:3:a) — (25:3:c) из п. 25.3.1, которые описывают характеристическую функцию $\text{v}(S)$, имеют несколько векторный характер: к ним применимы аналогии таких векторных операций, определенных в п. 16.2.1, как *умножение на скаляр* и *сложение векторов*. Опишем это более точно.

Умножение на скаляр: если дана постоянная $t \geqq 0$ и характеристическая функция $\text{v}(S)$, то $t\text{v}(S) \equiv \text{u}(S)$ также является характеристической функцией. Сложение векторов: если даны две характеристические функции $\text{v}(S)$ и $\text{w}(S)$ [1], то $\text{v}(S) + \text{w}(S) \equiv \text{z}(S)$ также является характеристической функцией. Единственное отличие от соответствующих определений п. 16.2 состоит в том, что здесь мы должны требовать $t \geqq 0$.

Замечание 1. В самом деле, при $t < 0$ нарушается свойство (25:3:c) из п. 25.3.1. Заметим, что умножение исходной функции $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ на $t < 0$ было бы вполне допустимо. Проще всего рассмотреть умножение на $t = -1$, т. е. изменение знака. Но изменение знака функции $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, вообще говоря, не соответствует изменению знака $\text{v}(S)$. Это должно быть ясно на основании здравого смысла, так как переход от выигрышей к проигрышам изменяет все стратегические рассмотрения весьма сложным образом. (Такой переход и некоторые его следствия знакомы шахматистам.) Формальное обоснование нашего утверждения может быть найдено при помощи исследования определений из п. 25.1.3.

Замечание 2. Векторные пространства с таким ограничением для умножения на скаляр называются иногда *положительными векторными пространствами*. У нас нет необходимости вдаваться в построение их систематической теории.

**27.6.2.** Обе определенные выше операции допускают непосредственную практическую интерпретацию.

Умножение на скаляр. Если $t = 0$, то мы получаем $\text{u}(S) \equiv 0$, т. е. бессодержательную игру, рассмотренную в п. 27.3.1. Поэтому можно принять $t > 0$. В этом случае наша операция превращается в изменение единицы измерения полезности, а именно в умножение ее на число $t$.

Сложение векторов. Эта операция соответствует *суперпозиции игр*, соответствующих характеристическим функциям $\text{v}(S)$ и $\text{w}(S)$. Можно представить себе, что каждый из игроков $1, 2, \ldots, n$ одновременно, но независимо участвует в этих двух играх. Иначе говоря, предполагается, что никакой ход, сделанный в одной игре, не оказывает влияния на другую игру в той мере, в какой это касается ее правил. В этом случае характеристическая функция составной игры является, очевидно, суммой характеристических функций составляющих игр [2].

---

[1]) Все, о чем здесь говорится, должно относиться к одному и тому же $n$, а также к одному и тому же множеству игроков $I = (1, 2, \ldots, n)$.

[2]) Это должно быть интуитивно очевидно. Точная проверка этого факта с помощью п. 25.1.3 реальных трудностей не представляет, но требует довольно громоздких обозначений.

**27.6.3.** Мы не имеем в виду проводить систематическое исследование этих операций, т. е. анализировать их влияние на стратегические ситуации в играх, в которых они применяются. Может оказаться полезным, однако, сделать по этому поводу несколько замечаний, которые ни в какой мере не являются исчерпывающими.

Заметим, прежде всего, что можно столь же непосредственно интерпретировать комбинации операций умножения векторов на скаляр и их сложения. Так, характеристическая функция

$$\text{(27:10)} \qquad \mathrm{z}(S) \equiv t\mathrm{v}(S) + s\mathrm{w}(S)$$

отвечает игре, возникающей в результате суперпозиции игр с характеристическими функциями $\mathrm{v}(S)$ и $\mathrm{w}(S)$, если предварительно умножить единицы измерения полезности в этих играх соответственно на $t$ и $s$.

Если $s = 1 - t$, то (27:10) соответствует образованию центра тяжести в смысле (16:A:c) из п. 16.2.1.

Из рассуждений в п. 35.3.4 (см., в частности, замечание на стр. 319) станет видно, что в отношении стратегий даже эта кажущаяся элементарной операция может иметь очень сложные последствия.

Отметим, далее, что существуют такие случаи, когда наши операции не имеют стратегических последствий.

Первый случай: одно лишь умножение на скаляр $t > 0$, изменяющее только единицу измерения, не влечет таких последствий.

Второй случай (более важный): стратегическая эквивалентность, рассмотренная в п. 27.1, является суперпозицией. Мы переходим при этом от игры с функцией $\mathrm{v}(S)$ к стратегически эквивалентной игре с функцией $\mathrm{v}'(S)$ при помощи суперпозиции первой игры и несущественной игры[1]). (См. (27:1) и (27:2) из п. 27.1.1, а относительно несущественности — п. 27.3.1 и (27:C) из п. 27.4.2.) Это можно выразить следующим образом: мы знаем, что несущественная игра является игрой, в которой коалиции не играют роли. Суперпозиция такой игры с другой игрой не нарушает стратегической эквивалентности, т. е. она оставляет стратегическую структуру этой игры неизменной.

## § 28. ГРУППЫ, СИММЕТРИЯ И БЕЗОБИДНОСТЬ

### 28.1. Подстановки, их группы и их воздействие на игру

**28.1.1.** Рассмотрим теперь роль симметрии или, более широко, результаты перестановки игроков $1, \ldots, n$ или их номеров в игре $n$ лиц Г. Естественно, это будет обобщением соответствующего исследования, проведенного в п. 17.11 для игры двух лиц с нулевой суммой.

Этот анализ начинается с того, что в основном является повторением шагов, предпринятых в п. 17.11 для $n = 2$. Но поскольку перестановки символов $1, \ldots, n$ для произвольного $n$ дают гораздо большее число возможностей, чем для $n = 2$, мы должны рассмотреть их более систематически.

Рассмотрим $n$ символов $1, \ldots, n$. Образуем некоторую *подстановку* $P$ этих символов. Подстановка $P$ описывается указаниями, в какой символ $i^P$ ($i^P = 1, \ldots, n$) она переводит символ $i$ ($i = 1, \ldots, n$).

---

[1]) С характеристической функцией $\mathrm{w}(S) \equiv \sum_{k \in S} \alpha_k^0$, и тогда в наших обозначениях $\mathrm{v}'(S) \equiv \mathrm{v}(S) + \mathrm{w}(S)$.

Таким образом, мы пишем:

(28:1) $$P\colon\ i \to i^P$$

или, используя полное перечисление,

(28:2) $$P\colon \begin{pmatrix} 1, & 2, \ldots, n \\ 1^P, & 2^P, \ldots, n^P \end{pmatrix}$$ [1].

Некоторые из подстановок заслуживают особого упоминания.

(28:A:a) *Тождественная подстановка* $I_n$, которая оставляет каждое $i$ $(i = 1, \ldots, n)$ неизменным: $i \to i^{I_n} = i$.

(28:A:b) *Произведение* $PQ$ двух подстановок $P$ и $Q$, состоящее в выполнении сначала $P$, а затем $Q$: $i \to i^{PQ} = (i^P)^Q$.

Число всех возможных подстановок равно *факториалу* $n$,

$$n! = 1 \cdot 2 \ldots n,$$

и все вместе они образуют *симметрическую группу* подстановок $\Sigma_n$. Всякая подсистема $G \subset \Sigma_n$, удовлетворяющая двум условиям:

(28:A:a*) $$I_n \in G,$$

(28:A:b*) $$PQ \in G, \quad \text{если} \quad P \in G \quad \text{и} \quad Q \in G,$$

является *группой* подстановок.

Подстановка $P$ переводит всякое подмножество $S \subset I = (1, \ldots, n)$ в другое подмножество $S^P$ [2].

Замечание. Серьезное и развернутое изложение теории групп можно найти в следующих книгах: L. C. Mathewson, Elementary Theory of Finite Groups, Boston, 1930; W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, 2nd Ed., Cambridge, 1911; A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3rd Ed., Berlin, 1937.

Мы не будем нуждаться в каких-либо особых результатах или понятиях теории групп и упомянули вышеуказанную литературу только для такого читателя, который может пожелать получить более глубокое представление об этом предмете.

Хотя мы не собираемся связывать наше изложение со всеми сложными понятиями теории групп, тем не менее мы ввели некоторые из ее основных терминов по следующей причине. Подлинное понимание природы и структуры симметрии невозможно без близкого знакомства хотя бы с элементами теории групп. Мы хотим путем использования правильной терминологии подготовить к этому читателя, желающего продвинуться в этом направлении.

Для ознакомления с более полным изложением связи между симметрией и теорией групп см. H. Weyl, Symmetry, *Journ. Washington Acad. of Sciences*, vol. XXVIII (1938), pp. 253ff.

**28.1.2.** После этих общих и подготовительных замечаний мы приступаем теперь к применению введенных понятий к произвольной игре $n$ лиц $\Gamma$.

Выполним подстановку $P$ над символами $1, \ldots, n$, обозначающими игроков игры $\Gamma$. Другими словами, обозначим игрока $k = 1, \ldots, n$ через $k^P$ вместо $k$; это преобразует игру $\Gamma$ в другую игру $\Gamma^P$. Замена игры $\Gamma$ на игру $\Gamma^P$ должна оказать свое влияние в двух отношениях: на действие, которое каждый игрок совершает в течение партии, т. е. на индекс $k$ переменной $\tau_k$, которую каждый игрок выбирает; и на исход

---

[1] Так, при $n = 2$ перестановку элементов 1 и 2 дает подстановка $\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 1 \end{pmatrix}$. Тождественной (см. ниже) является подстановка $I_n = \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n \\ 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$

[2] Если $S = (k_1, \ldots, k_p)$, то $S^P = (k_1^P, \ldots, k_p^P)$.

партии для него, т. е. на индекс $k$ функции $\mathscr{K}_k$, которая этот исход выражает [1]). Таким образом, игра $\Gamma^P$ также оказывается игрой в нормальной форме, с функциями выигрыша $\mathscr{K}_k^P(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $k = 1, \ldots, n$. Выражая функцию $\mathscr{K}_k^P(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ через $\mathscr{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, мы должны помнить, что игрок $k$ в игре $\Gamma$ имел $\mathscr{K}_k$, теперь же он является игроком $k^P$ в игре $\Gamma^P$ и, следовательно, имеет $\mathscr{K}_{k^P}^P$. Если мы составим функцию $\mathscr{K}_{k^P}^P$ от переменных $\tau_1, \ldots, \tau_n$, то мы выразим исход партии в игре $\Gamma^P$, когда игрок, имеющий номер $k$ в игре $\Gamma^P$, выбирает $\tau_k$. Далее, игрок $k$ в игре $\Gamma$, который является игроком $k^P$ в игре $\Gamma^P$, выбирает $\tau_{k^P}$. Следовательно, переменными, входящими в функцию $\mathscr{K}_k$, должны быть $\tau_{1^P}, \ldots, \tau_{n^P}$.

Поэтому мы имеем

(28:3) $$\mathscr{K}_{k^P}^P(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv \mathscr{K}_k(\tau_{1^P}, \ldots, \tau_{n^P}).$$

Замечание 1. Читатель заметит, что верхний индекс $P$ при индексе $k$ для функций $\mathscr{K}$ оказывается в левой части, в то время как верхний индекс $P$ при индексах $k$ переменных $\tau_k$ оказывается в правой. Это — правильное размещение, и довод, приведенный перед (28:3), был необходим для установления его.

Безупречность и ясность в этом пункте важны потому, что иначе мы не могли бы быть уверены, что последовательные применения верхних индексов $P$ и $Q$ (в таком порядке) к игре $\Gamma$ дадут такой же результат, как и применение верхнего индекса $PQ$ к игре $\Gamma$. Читатель может провести проверку этого факта в качестве хорошего упражнения в вычислении подстановок.

Для $n = 2$ и $P = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}$ применение $P$ с каждой стороны давало один и тот же результат, следовательно, не было надобности в таких рассуждениях. См. сноску 1 на стр. 136.

Замечание 2. В игре двух лиц с нулевой суммой мы имеем $\mathscr{K} \equiv \mathscr{K}_1 \equiv -\mathscr{K}_2$ и, аналогично, $\mathscr{K}^P \equiv \mathscr{K}_1^P \equiv -\mathscr{K}_2^P$. Следовательно, в этом случае (см. выше, $n = 2$ и $P = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}$) (28:3) превращается в $\mathscr{K}^P(\tau_1, \tau_2) \equiv -\mathscr{K}(\tau_2, \tau_1)$, что согласуется с формулами из пп. 14.6 и 17.11.2.

Однако такое упрощение возможно только в игре двух лиц с нулевой суммой; во всех остальных случаях мы должны опираться лишь на общую формулу (28:3).

Обозначим характеристические функции игр $\Gamma$ и $\Gamma^P$ соответственно через $v(S)$ и $v^P(S)$. Так как игроки, образующие множество $S^P$ в игре $\Gamma^P$, те же, что и игроки, образующие множество $S$ в игре $\Gamma$, мы имеем

(28:4) $$v^P(S^P) \equiv v(S) \text{ при любом } S$$ [2]).

**28.1.3.** Если (для некоторого $P$) игра $\Gamma$ совпадает с игрой $\Gamma^P$, то мы говорим, что игра $\Gamma$ *инвариантна* или *симметрична* по отношению к $P$. В силу (28:3) это выражается в виде

(28:5) $$\mathscr{K}_{k^P}(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv \mathscr{K}_k(\tau_{1^P}, \ldots, \tau_{n^P}).$$

Если это имеет место, то (28:4) превращается в

(28:6) $$v(S^P) \equiv v(S) \text{ при любом } S.$$

Пусть дана игра $\Gamma$. Составим множество $G_\Gamma$ всех подстановок $P$, по отношению к которым игра $\Gamma$ симметрична. Из (28:A:a) и (28:A:b)

---

[1]) Подобное положение для $n = 2$ см. в сноске 1 на стр. 136.

[2]) Это концептуальное доказательство яснее и проще доказательства с помощью вычислений, которое могло бы опираться на формулы из п. 25.1.3. Последнее, однако, не вызвало бы никаких затруднений, а только потребовало бы более подробных обозначений.

ясно, что тождественная подстановка $I_n$ принадлежит $G_\Gamma$ и что если $P$, $Q \in G_\Gamma$, то и $PQ \in G_\Gamma$. Поэтому на основании (28:A:a*) и (28:A:b*) $G_\Gamma$ является группой. Назовем $G_\Gamma$ *группой инвариантности* игры Γ.

Заметим, что (28:6) может быть записано теперь в следующем виде:

(28:7) $\quad$ v $(S)$ = v $(T)$, если существует такая подстановка $P \in G_\Gamma$, что $S^P = T$, т. е. подстановка, переводящая $S$ в $T$.

Объем множества $G_\Gamma$, т. е. число его элементов, представляет собой некоторую характеристику того, «насколько симметрична» игра Γ. Если любая подстановка $P$ (отличная от тождественной $I_n$) изменяет игру Γ, то $G_\Gamma$ состоит только из $I_n$ и игра Γ называет *полностью несимметричной*. Если любая подстановка $P$ не изменяет игру Γ, то $G_\Gamma$ содержит все подстановки $P$, т. е. является симметрической группой $\Sigma_n$, и игра Γ называется *полностью симметричной*. Между этими двумя случаями имеется, конечно, много промежуточных, и точная структура симметрии игры Γ (или ее отсутствия) определяется группой $G_\Gamma$.

**28.1.4.** Из условия (28:7) следует, что $S$ и $T$ имеют одинаковое число элементов. Обратное утверждение, однако, не всегда верно, если группа $G_\Gamma$ достаточно мала, т. е. если игра Γ достаточно несимметрична. Поэтому представляет интерес рассмотреть такие группы $G = G_\Gamma$, которые допускают обратное утверждение, т. е. для которых справедливо следующее:

(28:8) $\quad$ Если множества $S$ и $T$ имеют одинаковое число элементов, то существует такая подстановка $P \in G$, что $S^P = T$, т. е. подстановка, переводящая $S$ в $T$.

Условие (28:8), очевидно, выполняется, когда $G$ является симметрической группой $\Sigma_n$, т. е. $G = G_\Gamma = \Sigma_n$ для любой симметричной игры Γ. Оно выполняется также для некоторых меньших групп, т. е. для некоторых игр Γ, не вполне симметричных.

З а м е ч а н и е. При $n = 2$ группа $\Sigma_n$ содержит, кроме тождественной, только еще одну подстановку ($P = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}$, см. несколько предшествующих замечаний), так что $G = \Sigma_n$ является единственной возможностью для какой-либо симметрии.

Рассмотрим поэтому $n \geqq 3$ и назовем группу $G$ *транзитивной на множествах*, если она удовлетворяет (28:8). Вопрос о том, какие группы $G \neq \Sigma_n$ являются транзитивными на множествах, представляет определенный теоретико-групповой интерес, однако касаться этого в нашем изложении нет необходимости.

Для читателя, интересующегося теорией групп, мы тем не менее кое-что отметим.

Существует подгруппа группы $\Sigma_n$, содержащая половину ее элементов (т. е. $\frac{1}{2}n!$), называемая *знакопеременной группой* $\mathcal{A}_n$. Эта группа имеет большое значение в теории групп и подробно там изучается. При $n \geqq 3$ она, как это легко видеть, также является транзитивной на множествах.

Итак, фактически вопрос состоит в том, для каких $n \geqq 3$ существуют транзитивные на множествах группы $G \neq \Sigma_n$ и $\neq \mathcal{A}_n$.

Легко показать, что при $n = 3, 4$ таких групп нет. При $n = 5, 6$ они существуют. (При $n = 5$ существует транзитивная на множествах группа $G$, состоящая из 20 элементов, в то время как $\Sigma_5$ и $\mathcal{A}_5$ содержат соответственно 120 и 60 элементов. При $n = 6$ существует транзитивная на множествах группа $G$, состоящая из 120 элементов, в то время как $\Sigma_6$ и $\mathcal{A}_6$ содержат соответственно 720 и 360 элементов.) При $n = 7, 8$ довольно сложные теоретико-групповые рассуждения показывают, что таких групп снова нет. Для $n = 9$ вопрос пока открыт. Представляется вполне вероятным, что для произвольного $n > 9$ таких групп не существует, однако это до сих пор для всех таких $n$ не установлено.

### 28.2. Симметрия и безобидность

**28.2.1.** Как бы то ни было, если (28:8) выполняется для $G = G_\Gamma$, то из (28:7) следует:

(28:9) $\mathrm{v}(S)$ зависит только от числа элементов в $S$.

Иначе говоря:

(28:10) $$\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_p,$$

где $p$ — число элементов множества $S$ ($p = 0, 1, \ldots, n$).

Рассмотрим условия (25:3:a) — (25:3:c) из п. 25.3.1, которые дают исчерпывающее описание характеристических функций $\mathrm{v}(S)$. Легко переписать их для $\mathrm{v}_p$, если выполняется (28:10):

(28:11:a) $$\mathrm{v}_0 = 0,$$

(28:11:b) $$\mathrm{v}_{n-p} = -\mathrm{v}_p,$$

(28:11:c) $$\mathrm{v}_{p+q} \geqq \mathrm{v}_p + \mathrm{v}_q \quad \text{для} \quad p+q \leqq n.$$

Очевидно, (27:3) из п. 27.1.4 является следствием (28:10) (т. е. (28:9)), так что такая функция $\mathrm{v}(S)$ автоматически оказывается редуцированной, причем $\gamma = -\mathrm{v}_1$. Поэтому, в частности, мы имеем (27:7), (27:7*), (27:7**) из п. 27.2, т. е. условия рис. 30.

Условие (28:11:c) может быть переписано аналогично (25:A) из п. 25.4.2.

Положим $r = n - p - q$; тогда свойство (28:11:b) позволяет записать свойство (28:11:c) следующим образом:

(28:11:c*) $$\mathrm{v}_p + \mathrm{v}_q + \mathrm{v}_r \leqq 0, \quad \text{если} \quad p+q+r = n.$$

Теперь свойство (28:11:c*) является симметричным относительно $p$, $q$, $r$ [1]), следовательно, мы можем, используя соответствующую подстановку, принять, что $p \leqq q \leqq r$. Кроме того, когда $p = 0$ (и, следовательно, когда $r = n - q$), (28:11:c*) (и притом даже со знаком $=$) следует из (28:11:a) и (28:11:b). Значит, можно предполагать, что $p \neq 0$. Итак, нам необходимо потребовать выполнения (28:11:c*) только для $1 \leqq p \leqq q \leqq r$, и поэтому, то же самое верно и для (28:11:c). Отметим, наконец, что, так как $r = n - p - q$, неравенство $q \leqq r$ означает $p + 2q \leqq n$. Сформулируем сказанное.

(28:12) Выполнения (28:11:c) достаточно требовать только при $1 \leqq p \leqq q$, $p + 2q \leqq n$ [2]).

**28.2.2.** Свойство (28:10) характеристической функции является следствием симметрии, но оно важно также и само по себе. Это становится ясным, если мы рассмотрим его в наиболее простом частном случае: при $n = 2$.

В самом деле, при $n = 2$ свойство (28:10) просто означает, что $\mathrm{v}'$ из п. 17.8.1 обращается в нуль [3]).

---

[1]) Как в утверждении, так и в условии!

[2]) Эти неравенства заменяют первоначальное $p + q \leqq n$; они, очевидно, более сильные. Так как из них следует $3p \leqq p + 2q \leqq n$ и $1 + 2q \leqq p + 2q \leqq n$, мы имеем $p \leqq \frac{n}{3}$, $q \leqq \frac{n-1}{2}$.

[3]) По определению $\mathrm{v}' = \mathrm{v}((1)) = -\mathrm{v}((2))$. При $n = 2$ в утверждении (28:9) (которое эквивалентно свойству (28:10)) существенным является только $\mathrm{v}((1)) = \mathrm{v}((2))$. На основании сказанного выше это означает, что $\mathrm{v}' = -\mathrm{v}'$, т. е. что $\mathrm{v}' = 0$.

В терминологии п. 17.11.2 это означает, что игра Γ является безобидной. Обобщим это понятие. Игра $n$ лиц Γ называется *безобидной*, если ее характеристическая функция v $(S)$ обладает свойством (28:9), т. е. если она является функцией $\mathrm{v}_p$ из (28:10). Далее, как и в п. 17.11.2, это понятие безобидной игры выражает то, что действительно является существенным в понятии симметрии. Следует помнить, однако, что из этого понятия безобидности и, аналогично, из понятия полной симметрии игры может следовать, а может и не следовать, что все отдельные игроки могут ожидать одну и ту же судьбу в отдельной партии (при условии, что они играют хорошо). Этот вывод был справедлив при $n = 2$, но не при $n \geqq 3$! (См. п. 17.11.2 для первого случая и замечаний 1 и 2 на стр. 245 для второго.)

**28.2.3.** Отметим, наконец, что на основании (27:7), (27:7*), (27:7**) из п. 27.2 и на основании рис. 30, все редуцированные игры симметричны и, следовательно, безобидны при $n = 3$, но не при $n \geqq 4$. (См. обсуждение в п. 27.5.2.) Далее, ничем не ограниченная игра $n$ лиц с нулевой суммой сводится к своей редуцированной форме при помощи фиксированных дополнительных платежей $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (соответственно для игроков $1, \ldots, n$), как это описано в п. 27.1. Следовательно, небезобидность в игре трех лиц с нулевой суммой, т. е. то, что действительно важно в ее асимметрии, полностью выражается этими величинами $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, т. е. фиксированными определенными платежами. (См. также основные значения $a'$, $b'$, $c'$ из п. 22.3.4.) В игре $n$ лиц с нулевой суммой с $n \geqq 4$ это уже не всегда возможно, поскольку редуцированная форма не должна обязательно быть безобидной. Это значит, что в такой игре могут существовать гораздо более фундаментальные различия между стратегическими состояниями игроков, которые не могут быть выражены при помощи $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, т. е. при помощи фиксированных, определенных платежей. Все это станет совершенно ясно в гл. VII. В этой же связи полезно также вспомнить замечание на стр. 269.

# § 29. ПОВТОРНОЕ РАССМОТРЕНИЕ ИГРЫ ТРЕХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

## 29.1. Качественные рассмотрения

**29.1.1.** Теперь мы подготовлены к главному: сформулировать принципы теории игр $n$ лиц с нулевой суммой [1]. Характеристическая функция v $(S)$, которую мы определили в предыдущих параграфах, является необходимым средством для этой операции.

Наши рассуждения будут такими же, как и прежде: мы должны выбрать частный случай, который послужит основой для дальнейшего исследования. Это будет такой случай, который мы уже рассматривали и который мы тем не менее считаем достаточно типичным для общего случая. Анализируя (частичное) решение, найденное в этом частном случае, мы попытаемся затем выявить те правила, которые управляют общим случаем. После того, что мы сказали в пп. 4.3.3 и 25.2.2, должно представляться правдоподобным, что таким частным случаем оказывается игра трех лиц с нулевой суммой.

---

[1] Конечно, общая игра $n$ лиц при этом еще остается, но мы сможем решать ее с помощью игр лиц с нулевой суммой. Решающим шагом при этом будет переход к играм **$mn$ лиц с нулевой суммой.**

**29.1.2.** Рассмотрим снова рассуждение, на основании которого было получено решение игры трех лиц с нулевой суммой. Очевидно, представляет интерес только случай существенной игры. Мы знаем теперь, что можно также рассматривать эту игру в ее редуцированной форме и что мы можем выбрать $\gamma = 1$ [1]). Характеристическая функция в этом случае полностью определена, как это было установлено во втором случае в п. 27.5.2:

$$(29{:}1)\qquad \mathrm{v}(S) = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \text{когда } S \text{ имеет } \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \text{элементов}^{2)}.$$

Мы видели, что в этой игре все решается сформированными коалициями (двух лиц), и наши рассуждения [3]) привели к следующим главным результатам.

Здесь можно образовать три коалиции, и соответственно три игрока закончат партию с результатами, приведенными в табл. 23.

Таблица 23

| Коалиция \ Игрок | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| (1, 2) | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-1$ |
| (1, 3) | $\frac{1}{2}$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ |
| (2, 3) | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Это «решение» требует интерпретации; в частности, очевидны следующие замечания [4]).

**29.1.3.**

(29:A:a) Три распределения, указанные выше, соответствуют всем стратегическим возможностям игры.

(29:A:b) Ни одно из распределений не может рассматриваться само по себе как решение; именно система всех трех распределений и их соотношение между собой действительно составляют решение.

(29:A:c) Эти три распределения обладают, в частности, «устойчивостью», о которой мы говорили до сих пор только очень бегло. На самом

---

[1]) См. пп. 27.1.4 и 27.3.2.

[2]) В обозначениях п. 23.1.1 это означает, что $a = b = c = 1$. Общая часть упомянутых рассуждений содержалась в пп. 22.2, 22.3 и в § 23. Приведенная конкретизация возвращает нас к более раннему (более частному) случаю из п. 22.1. Таким образом, наши рассмотрения из п. 27.1 (о стратегической эквивалентности и о редуцировании) фактически достигают того же эффекта в случае игры трех лиц с нулевой суммой. Они сводят, как установлено выше, общий случай к предыдущему частному случаю.

[3]) В пп. 22.2.2 и 22.2.3; на самом деле они являются просто разработкой изложенного в пп. 22.1.2 и 22.1.3.

[4]) Эти замечания снова возвращают нас к рассмотрениям из п. 4.3.3. В связи с (29:A:d) можно также вспомнить вторую половину п. 4.6.2.

деле, никакое равновесие не может быть найдено помимо этих трех распределений; поэтому следовало бы ожидать, что любой вид переговоров между игроками всегда должен в итоге приводить к одному из этих распределений.

(29:A:d) Снова обращает на себя внимание то, что эта «устойчивость» является характеристикой только всех трех распределений, рассматриваемых вместе. Ни одно из них само по себе ею не обладает; каждое распределение, взятое в отдельности, можно было бы расстроить, если бы другая коалиция расширилась до необходимого большинства игроков.

**29.1.4.** Перейдем теперь к поискам точной формулировки тех эвристических принципов, которые приводят к решениям из табл. 23, помня при этом все время замечания (29:A:a) — (29:A:d).

Более точная формулировка интуитивно распознаваемой «устойчивости» системы трех распределений табл. 23 (которая должна быть кратким изложением того, о чем говорилось в сноске 3 на стр. 280) возвращает нас к тому положению, в котором мы уже находились раньше при качественных исследованиях [1]). Оно может быть представлено в следующем виде:

(29:B:a) Если трем игрокам будет предложена для рассмотрения какая-либо иная схема распределения, то она встретит отказ по следующей причине: достаточное число игроков [2]) предпочтет, в своих собственных интересах, хотя бы одно из распределений решения (см. табл. 23); эти игроки убеждены или могут быть убеждены [3]) в возможности получения преимуществ от этого распределения.

(29:B:b) Если же предложено одно из распределений решения, то такой группы игроков не окажется.

Переходим к более точному обсуждению достоинств этого эвристического принципа.

## 29.2. Количественные рассмотрения

**29.2.1.** Предположим, что $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ описывают возможный способ распределения между игроками 1, 2, 3. Другими словами,

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=0.$$

Тогда, поскольку по определению $\mathrm{v}((i))$ $(=-1)$ является выигрышем, который игрок $i$ может себе обеспечить (независимо от того, что делают все остальные), он, конечно, не допустит какого-либо распределения, в котором $\beta_i<\mathrm{v}((i))$. Предположим поэтому, что

$$\beta_i \geqq \mathrm{v}((i))=-1.$$

Мы можем переставить игроков 1, 2, 3 так, чтобы было

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \beta_3.$$

Допустим теперь, что $\beta_2<1/2$. Тогда тем более $\beta_3<1/2$. Следовательно, оба игрока 2 и 3 предпочтут последнее распределение из перечислен-

[1]) Эти представления проникают во все рассуждения пп. 4.4—4.6, но они выступают более конкретно в пп. 4.4.1 и 4.6.2.

[2]) В данном случае, конечно, два.

[3]) Что означает эта «убежденность», было обсуждено в п. 4.4.3. Последующее объяснение сделает это совершенно ясным.

ных в табл. 23 [1]), где они оба получат больший выигрыш 1/2 [2]). Кроме того, ясно, что они могут получить выгоду от этого распределения (независимо от того, что делает третий игрок), так как выигрыши 1/2, 1/2, которые оно им предназначает, вместе не превосходят $v((2, 3)) = 1$.

Если, наоборот, $\beta_2 \geqq 1/2$, то и $\beta_1 \geqq 1/2$. Поскольку $\beta_3 \geqq -1$, это возможно только в том случае, когда $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$ и $\beta_3 = -1$, т. е. когда мы имеем первое распределение табл. 23 (см. сноску 1 на этой стр.).

Это устанавливает (29:B:a) из п. 29.1.4. Утверждение (29:B:b) получается непосредственно. Именно в каждом из трех распределений табл. 23 наверняка существует игрок, который желает улучшить свое положение [3]), но, будучи в одиночестве, он не в состоянии это осуществить. Ни один из двух возможных его партнеров не приобретает ничего, отказываясь от своего уже имеющегося союзника и объединяясь с неудовлетворенным игроком: каждый из них и так получает 1/2, и они не могут получить больше ни при каком другом распределении из табл. 23 [4]).

**29.2.2.** В этот вопрос можно внести дальнейшую ясность, развивая некоторые эвристические соображения.

Мы видим, что неудовлетворенный игрок не находит никого, кто хотел бы добровольно стать его партнером, и он не может никому предложить положительную побуждающую причину к нему присоединиться, если только не предложит уступить более, чем 1/2 дохода от их будущей коалиции. Причина, по которой такое предложение следует рассматривать как неэффективное, может быть выражена двумя способами: по чисто формальным основаниям это предложение можно исключить, так как оно соответствует распределению, не содержащемуся в табл. 23; реальным субъективным мотивом, по которому любой предполагаемый партнер считал бы неблагоразумным [5]) участвовать в коалиции при таких условиях, была бы, наиболее вероятно, боязнь последующего невыгодного положения — возможны дальнейшие переговоры, предшествующие образованию коалиции, в результате которых он оказался бы в особенно уязвимом положении. (См. анализ в пп. 22.1.2, 22.1.3.)

Итак, у неудовлетворенного игрока нет способа преодолеть индифферентность двух возможных партнеров. Подчеркнем, что у двух возможных партнеров нет настоящего возражения против перехода к другому распределению табл. 23, кроме именно индифферентности, характерной для некоторых видов устойчивости [6]).

[1]) Так как мы сделали некоторую перестановку игроков 1, 2, 3, последнее распределение табл. 23 фактически имеет место для всех троих.

[2]) Отметим, что каждый из этих двух игроков в отдельности получает выгоду от такой перемены. Недостаточно было бы иметь лишь общий доход (этих двух игроков). Сравним, например, первое распределение табл. 23 со вторым; игроки 1, 3 вместе получили бы выгоду от замены первого на второе, но тем не менее первое распределение является столь же хорошей составляющей решения, сколь и любое другое.

При этой частной замене игрок 3 действительно получил бы выгоду (получив 1/2 вместо —1), а для игрока 1 эта замена безразлична (в обоих случаях он получает 1/2). Тем не менее игрок 1 не начнет действовать, пока не будут произведены дальнейшие компенсации,— и в настоящем рассмотрении ими можно пренебречь. Более глубокое обсуждение этого вопроса см. в конце этого параграфа.

[3]) Тот, который получает —1.

[4]) В качестве хорошего упражнения читатель может повторить эти рассуждения для общей (не редуцированной) функции $v(S)$, т. е. с произвольными $a$, $b$, $c$ и величинами из п. 22.3.4. Результат будет тот же, иначе и быть не может, поскольку наша теория стратегической эквивалентности и редуцирования корректна (см. сноску 2 на стр. 280).

[5]) Или ненадежным, или неэтичным.

[6]) Для каждого перехода от одного распределения табл. 23 к другому один игрок определенно против него, другой — за; и, следовательно, остающийся игрок блокирует такой переход своей индифферентностью.

# § 30. ТОЧНАЯ ФОРМА ОБЩИХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

## 30.1. Определения

**30.1.1.** Обратимся снова к случаю игры $n$ лиц с нулевой суммой Г при произвольном $n$. Пусть $\mathrm{v}(S)$ — характеристическая функция игры Г. Переходим к формулировке наиболее существенных определений. В соответствии с высказанным в предшествующих параграфах будем называть *распределением* или *дележом* множество $n$ чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, обладающих следующими свойствами:

(30:1) $$\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i)) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n,$$

(30:2) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0.$$

Может оказаться удобным рассматривать эти системы чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, как векторы в $n$-мерном линейном пространстве $L_n$ в смысле п. 16.1.2:

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

Множество $S$ (т. е. подмножество множества $I = \{1, \ldots, n\}$) называется *эффективным* для дележа $\vec{\alpha}$, если

(30:3) $$\sum_{i \in S} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(S).$$

Дележ $\vec{\alpha}$ *доминирует* другой дележ $\vec{\beta}$, что обозначается как

$$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta},$$

если существует множество $S$, обладающее следующими свойствами:

(30:4:a) $S$ не пусто,

(30:4:b) $S$ эффективно для $\vec{\alpha}$,

(30:4:c) $\alpha_i > \beta_i$ для всех $i \in S$.

Множество дележей $\mathbf{V}$ называется *решением*, если оно обладает следующими свойствами:

(30:5:a) Никакое $\vec{\beta} \in \mathbf{V}$ не доминируется никаким $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$.

(30:5:b) Каждый дележ $\vec{\beta}$, не принадлежащий $\mathbf{V}$, доминируется некоторым дележом $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$.

Свойства (30:5:a) и (30:5:b) можно сформулировать в виде единственного условия:

(30:5:c) Элементы из $\mathbf{V}$ являются точно теми дележами, которые не доминируются никакими элементами из $\mathbf{V}$. (См. сноску 1 на стр. 65.)

**30.1.2.** Смысл этих определений может, конечно, проясниться, если вспомнить рассмотрения предыдущих параграфов, а также рассуждения из п. 4.4.3.

Начнем с того, что наши распределения, или дележи, соответствуют более интуитивным понятиям с тем же названием, рассмотренным в указанных двух местах. То, что мы называем эффективным множеством, есть не что иное, как те игроки, которые «убеждены или могут быть

убеждены» в возможности получения того, что им предложено дележом $\vec{\alpha}$; см. п. 4.4.3 и утверждение (29:B:a) из п. 29.1.4. Условие (30:4:c) в определении доминирования выражает, что все эти игроки имеют положительный побудительный мотив для предпочтения дележа $\vec{\alpha}$ дележу $\vec{\beta}$. Поэтому очевидно, что мы здесь определяем доминирование в духе п. 4.4.1 и понятия предпочтения, описанного в (29:B:a) из п. 29.1.4.

Такое определение решения полностью согласуется с определением, данным в п. 4.5.3, а также с (29:B:a), (29:B:b) из п. 29.1.4.

## 30.2. Обсуждение и обзор результатов

**30.2.1.** Мотивировки всех этих определений приводились в тех местах текста, на которые мы ссылались в последнем пункте. Тем не менее мы вновь выделим некоторые из главных черт, особенно понятие решения.

Мы уже видели в п. 4.6, что наше понятие решения игры в точности соответствует представлению о «норме поведения», если говорить на обычном, повседневном языке. Условия (30:5:a), (30:5:b), соответствующие условиям (4:A:a), (4:A:b) из п. 4.5.3, выражают как раз тот вид «имманентной устойчивости», который следует ожидать от реальных норм поведения. Эти представления были разработаны далее в п. 4.6. на качественной основе. Теперь мы можем переформулировать приведенные там идеи точным образом, учитывая точный характер, который теперь принимают рассуждения. Замечания, которые мы хотим сделать, состоят в следующем [1]).

**30.2.2.**

(30:A:a) Рассмотрим решение **V**. Для дележа $\vec{\beta} \in \mathbf{V}$ мы *не* исключали существование такого «внешнего» дележа $\vec{\alpha}'$ (т. е. не принадлежащего **V**), что $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$ [2]). Если такой дележ $\vec{\alpha}'$ существует, то отношение игроков следует представить себе примерно так: если решение **V** (т. е. система дележей) «принято» игроками 1, . . ., $n$, то в их сознании должна запечатлеться мысль, что только дележи $\vec{\beta} \in \mathbf{V}$ являются «надежными» способами распределения. Дележ $\vec{\alpha}'$, не принадлежащий **V**, для которого $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$, хотя и предпочтителен для некоторого эффективного множества игроков, не сможет привлечь их, потому что является «ненадежным». (См. детальное обсуждение игры трех лиц с нулевой суммой, в особенности то, что касается причины отказа каждого игрока согласиться на большее, чем установленный выигрыш в коалиции. См. конец п. 29.2 и относящиеся к нему сноски.) Представление о «ненадежности» дележа $\vec{\alpha}'$ может основываться также на существовании такого дележа $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$, что $\vec{\alpha} \succ \vec{\alpha}'$ (см. (30:A:b) ниже). Все эти доводы, конечно, в известном смысле представляют собой замкнутый круг и опять-таки зависят от выбора множества **V** в качестве «нормы поведения», т. е. в качестве критерия «надежности».

---

[1]) Замечания (30:A:a) — (30:A:d), которые следуют ниже, являются более тщательной и точной разработкой идей из п. 4.6.2. Замечание (30:A:e) находится в аналогичном отношении к п. 4.6.3.

[2]) В самом деле, в (31:M) из п. 31.2.3 мы увидим, что дележ $\vec{\beta}$, для которого *никогда* не выполняется $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$, появляется лишь в несущественных играх.

Но этот вид замкнутого круга не чужд повседневным рассмотрениям, имеющим дело с «надежностью».

(30:A:b) Если игроки 1, ..., $n$ приняли решение **V** в качестве «нормы поведения», то для того, чтобы поддерживать их доверие к **V**, необходима возможность при помощи множества **V** (т. е. его элементов) дискредитировать любой дележ, не принадлежащий **V**. В самом деле, для каждого не принадлежащего **V** дележа $\vec{\alpha}'$ должен найтись такой дележ $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$, что $\vec{\alpha} \succ \vec{\alpha}'$. (Это было нашим постулатом (30:5:b).)

(30:A:c) Наконец, в множестве **V** не должно быть внутренних противоречий, т. е. для $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \in \mathbf{V}$ никогда не должно быть $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. (Это было нашим другим постулатом (30:5:a).)

(30:A:d) Отметим, что если бы доминирование, т. е. отношение $\succ$, было транзитивным, то требования (30:A:b) и (30:A:c) (т. е. наши постулаты (30:5:a) и (30:5:b)) исключили бы довольно деликатную ситуацию, отраженную в (30:A:a). Именно: в утверждении (30:A:a) $\vec{\beta} \in \mathbf{V}$, $\vec{\alpha}' \notin \mathbf{V}$ и $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$. На основании (30:A:b) существует такой дележ $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$, что $\vec{\alpha} \succ \vec{\alpha}'$. Тогда, если бы доминирование было транзитивно, мы могли бы прийти к заключению, что $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$; но это противоречит (30:A:c), так как $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \in \mathbf{V}$.

(30:A:e) Приведенные рассуждения делают еще более ясным, что только множество **V** целиком является решением и обладает тем или иным видом устойчивости, но отнюдь ни один из его элементов индивидуально. Замкнутый круг, о котором говорилось в (30:A:a), делает также правдоподобным существование в одной и той же игре нескольких решений **V**. Иначе говоря, для одной и той же реальной ситуации может существовать несколько устойчивых норм поведения. Каждая из них, конечно, была бы устойчивой и внутренне совместной, но находилась бы в конфликте со всеми остальными. (См. также конец п. 4.6.3 и конец п. 4.7.)

Во многих последующих рассуждениях мы увидим, что эта множественность решений является на самом деле весьма распространенным явлением.

### 30.3. Понятие насыщенности

**30.3.1.** Теперь представляется уместным привести несколько замечаний более формального характера. До сих пор мы обращали внимание главным образом на смысл и обоснование введенных понятий, однако понятие решения, как оно было определено выше, обладает некоторыми формальными чертами, также заслуживающими внимания.

Последующие формальные (логические) рассмотрения не будут использоваться непосредственно, и мы не будем долго останавливаться на них, продолжая изложение в духе предыдущего. Тем не менее мы полагаем, что эти замечания полезны здесь для более полного понимания структуры нашей теории. Кроме того, методы, которые здесь будут использоваться, найдут важное техническое применение по совершенно другому поводу в пп. 51.1—51.4.

**30.3.2.** Рассмотрим область (множество) $D$, для элементов $x$, $y$ которой имеется некоторое отношение $x\mathscr{R}y$. Справедливость отношения $\mathscr{R}$

между двумя элементами $x, y$ из $D$ выражается формулой $x\mathscr{R}y$ [1]). Отношение $\mathscr{R}$ определяется утверждением, недвусмысленно указывающим, для каких пар $x, y \in D$ соотношение $x\mathscr{R}y$ истинно, а для каких — нет. Если $x\mathscr{R}y$ равносильно $y\mathscr{R}x$, то мы говорим, что отношение $x\mathscr{R}y$ *симметричное*. Для любого отношения $\mathscr{R}$ можно определить новое отношение $\mathscr{R}^S$, считая, что $x\mathscr{R}^S y$ означает конъюнкцию $x\mathscr{R}y$ и $y\mathscr{R}x$. Очевидно, что отношение $\mathscr{R}^S$ всегда симметричное, и оно совпадает с $\mathscr{R}$ тогда и только тогда, когда само $\mathscr{R}$ симметрично. Назовем $\mathscr{R}^S$ *симметризованной* формой отношения $\mathscr{R}$ [2]).

Введем теперь следующие определения.

(30:B:a) Подмножество $A$ множества $D$ называется *$\mathscr{R}$-удовлетворяющим*, если отношение $x\mathscr{R}y$ выполняется для всех $x, y \in A$.

(30:B:b) Подмножество $A \subset D$ и элемент $y \in D$ называются *$\mathscr{R}$-совместными*, если отношение $x\mathscr{R}y$ выполняется для всех $x \in A$.

Отсюда сразу получается:

(30:C:a) Подмножество $A \subset D$ является *$\mathscr{R}$-удовлетворяющим* тогда и только тогда, когда все элементы $y$, которые $\mathscr{R}$-совместны с $A$, образуют надмножество $A$.

Введем еще одно определение.

(30:C:b) Подмножество $A \subset D$ называется *$\mathscr{R}$-насыщенным*, если все элементы $y$, которые $\mathscr{R}$-совместны с $A$, составляют в точности множество $A$.

Таким образом, свойство, которое должно быть добавлено к (30:C:a) для того, чтобы обеспечить (30:C:b), состоит в следующем:

(30:D) Если $y$ вне $A$, то $y$ не является $\mathscr{R}$-совместным с $A$, т. е. существует такой элемент $x \in A$, что отношение $x\mathscr{R}y$ не выполняется.

Следовательно, $\mathscr{R}$-насыщенность может быть определена равносильно при помощи как (30:B:a), так и (30:D).

**30.3.3.** Прежде чем продолжать исследовать эти понятия, приведем несколько примеров. Проверка соответствующих утверждений проста и предоставляется читателю.

Пример первый. Пусть $D$ — некоторое множество и $x\mathscr{R}y$ является отношением $x = y$. Тогда $\mathscr{R}$-удовлетворяемость множества $A$ означает, что $A$ есть либо пустое, либо одноэлементное множество, в то время как $\mathscr{R}$-насыщенность $A$ означает, что $A$ — одноэлементное множество.

Пример второй. Пусть $D$ — множество вещественных чисел и $x\mathscr{R}y$ является отношением $x \leqq y$ [3]). Тогда $\mathscr{R}$-удовлетворяемость множества $A$ означает то же самое, что и выше [4]), в то время как $\mathscr{R}$-насыщенность $A$ означает, что $A$ является одноэлементным множеством, состоящим из наи-

---

[1]) Иногда более удобно пользоваться выражением вида $\mathscr{R}(x, y)$, но для наших целей запись $x\mathscr{R}y$ предпочтительнее.

[2]) Несколько примеров. Пусть $D$ состоит из всех вещественных чисел. Отношения $x = y$ и $x \neq y$ симметричные. Ни одно из четырех отношений $x \leqq y$, $x \geqq y$, $x < y$, $x > y$ симметричным не является. Симметризованной формой двух первых отношений является $x = y$ (конъюнкция $x \leqq y$ и $x \geqq y$), а симметризованной формой двух последних отношений — абсурдность (конъюнкция $x < y$ и $x > y$).

[3]) $D$ могло бы быть любым другим множеством, в котором определено такое отношение; см. второй пример в п. 65.4.1.

[4]) См. сноску 1 на стр. 287.

большего элемента множества $D$. Значит, если $D$ не имеет наибольшего элемента (например, если $D$ есть множество всех вещественных чисел), то такого множества $A$ не существует; множество $A$ единственно, если $D$ имеет наибольший элемент (например, если оно конечно).

Пример третий. Пусть $D$ — плоскость и $x\mathscr{R}y$ выражает тот факт, что точки $x$ и $y$ имеют одинаковую высоту (ординату). Тогда $\mathscr{R}$-удовлетворяемость множества $A$ означает, что все точки множества $A$ имеют одну и ту же высоту, т. е. лежат на одной прямой, параллельной оси абсцисс. $\mathscr{R}$-насыщенность означает, что $A$ является в точности прямой, параллельной оси абсцисс.

Пример четвертый. Пусть $D$ — множество всех дележей, а $x\mathscr{R}y$ является отрицанием доминирования $x \succ y$. Тогда сравнение (30:B:a) и (30:D) с (30:5:a) и (30:5:b) из п. 30.1.1 или, что то же самое, сравнение (30:C:b) с (30:5:c) дает: $\mathscr{R}$-насыщенность множества $A$ означает, что $A$ является решением.

**30.3.4.** Одного взгляда на условие (30:B:a) достаточно, чтобы сказать, что удовлетворяемость для отношения $x\mathscr{R}y$ является удовлетворяемостью и для отношения $y\mathscr{R}x$, а следовательно, также для их конъюнкции $x\mathscr{R}^{S}y$.

Другими словами, $\mathscr{R}$-удовлетворяемость совпадает с $\mathscr{R}^{S}$-удовлетворяемостью.

Таким образом, удовлетворяемость является понятием, которое достаточно изучать только для симметричных отношений.

Это обусловливается симметричной по отношению к $x$ и $y$ формой определяющего условия (30:B:a). Равносильное условие (30:C:a) не выявляет этой симметрии, но, конечно, это не делает доказательство недействительным.

Далее, определяющее условие (30:C:b) для $\mathscr{R}$-насыщенности аналогично по своей структуре условию (30:C:a). Оно в равной степени асимметрично. Однако, в то время как (30:C:a) обладает равносильной симметричной формой (30:B:a), это не имеет места для (30:C:b). Соответствующей равносильной формой для (30:C:b) является, как мы знаем, объединение (30:B:a) и (30:D), а (30:D) вовсе не симметрично. Иными словами, (30:D) существенно изменится, если отношение $x\mathscr{R}y$ заменить на $y\mathscr{R}x$. Итак, мы получаем следующее.

(30:E) В то время как $\mathscr{R}$-удовлетворяемость не нарушается при замене $\mathscr{R}$ на $\mathscr{R}^{S}$, ничего подобного не будет для $\mathscr{R}$-насыщенности.

Условие (30:B:a) (соответствующее $\mathscr{R}$-удовлетворяемости) является одним и тем же для $\mathscr{R}$ и для $\mathscr{R}^{S}$. Условие (30:D) для $\mathscr{R}^{S}$ следует из того же условия для $\mathscr{R}$, так как $\mathscr{R}^{S}$ влечет $\mathscr{R}$. Итак:

(30:F) $\mathscr{R}^{S}$-насыщенность следует из $\mathscr{R}$-насыщенности.

Различие между этими двумя типами насыщенности является реальным: легко привести конкретный пример множества, которое является $\mathscr{R}^{S}$-насыщенным, но не $\mathscr{R}$-насыщенным [1]).

Таким образом, изучение насыщенности не может ограничиваться симметричными отношениями.

---

[1]) Например, первые два примера из п. 30.3.3 находятся между собой в таком отношении, как $\mathscr{R}^{S}$ и $\mathscr{R}$ (см. сноску 2 на стр. 286); понятия удовлетворяемости для них совпадают, но понятия насыщенности различны.

**30.3.5.** Для симметричных отношений $\mathcal{R}$ природа насыщенности довольно проста. Чтобы избежать ненужных усложнений, предположим в этом пункте, что соотношение $x\mathcal{R}x$ всегда верно [1]).

Докажем теперь следующее:

(30:G) Пусть $\mathcal{R}$ — симметричное отношение. Тогда $\mathcal{R}$-насыщенность множества $A$ равносильна тому, что $A$ является максимальным $\mathcal{R}$-удовлетворяющим; т. е. она равносильна тому, что множество $A$ является $\mathcal{R}$-удовлетворяющим, а никакое его собственное надмножество $\mathcal{R}$-удовлетворяющим не будет.

Доказательство. $\mathcal{R}$-насыщенность означает $\mathcal{R}$-удовлетворяемость (т. е. условие (30:B:a) вместе с условием (30:D)). Итак, остается доказать, что если множество $A$ $\mathcal{R}$-удовлетворяющее, то (30:D) равносильно тому, что все собственные надмножества множества $A$ не являются $\mathcal{R}$-удовлетворяющими.

Достаточность условия (30:D). Если множество $B \supset A$ является $\mathcal{R}$-удовлетворяющим, то для любого элемента $y$ из $B$, но не из $A$, не выполняется условие (30:D) [2]).

Необходимость условия (30:D). Рассмотрим такой элемент $y$, для которого нарушается (30:D). Тогда

$$B = A \cup (y) \supset A.$$

Это множество $B$ является $\mathcal{R}$-удовлетворяющим, т. е. для $x'$, $y' \in B$ всегда верно соотношение $x'\mathcal{R}y'$. В самом деле, если $x'$, $y' \in A$, то это следует из $\mathcal{R}$-удовлетворяемости множества $A$. Если $x' = y$, $y' = y$, то мы просто полагаем $y\mathcal{R}y$. Если же один из элементов $x'$, $y'$ принадлежит $A$, а другой равен $y$, то на основании симметричности отношения $\mathcal{R}$ можно считать, что $x' \in A$ и $y' = y$. Тогда наше утверждение совпадает с отрицанием условия (30:D).

Если отношение $\mathcal{R}$ не симметричное, то мы можем утверждать следующее.

(30:H) Из $\mathcal{R}$-насыщенности множества $A$ следует, что оно является максимальным $\mathcal{R}$-удовлетворяющим множеством.

Доказательство. Максимальность среди $\mathcal{R}$-удовлетворяющих множеств есть то же самое, что и максимальность среди $\mathcal{R}^S$-удовлетворяющих множеств (см. (30:E)). Так как отношение $\mathcal{R}^S$ симметричное, это совпадает с $\mathcal{R}^S$-насыщенностью на основании (30:G). Последнее же является следствием $\mathcal{R}$-насыщенности на основании (30:F).

Значение этого результата, относящегося к симметричному отношению $\mathcal{R}$, состоит в следующем. Отправляясь от произвольного $\mathcal{R}$-удовлетворяющего множества, будем увеличивать его, насколько это возможно, т. е. пока любое дальнейшее увеличение не вызовет потерю свойства $\mathcal{R}$-удовлетворяемости. Таким образом, наконец получается максимальное $\mathcal{R}$-удовлетворяющее множество, т. е., на основании (30:G) [3]), $\mathcal{R}$-насыщен-

---

[1]) Очевидно, это имеет место для нашего основного примера из п. 30.3.3, в котором $x\mathcal{R}y$ является отрицанием доминирования $x \succ y$, поскольку $x \succ x$ не верно никогда.

[2]) Отметим, что ни одно из дополнительных ограничений, наложенных на отношение $\mathcal{R}$, до сих пор еще не использовалось.

[3]) Этот процесс исчерпания элементарен, т. е. он заканчивается после конечного числа шагов, если множество $D$ конечно.

Однако, поскольку множество всех дележей обычно бесконечно, случай бесконечного $D$ очень важен. Если множество $D$ бесконечно, то эвристически все же вполне

ное множество. Это рассуждение не только обеспечивает существование $\mathcal{R}$-насыщенных множеств, но позволяет также сделать вывод, что каждое $\mathcal{R}$-удовлетворяющее множество может быть расширено до $\mathcal{R}$-насыщенного.

Следует отметить, что любое подмножество $\mathcal{R}$-насыщенного множества обязательно является $\mathcal{R}$-удовлетворяющим [1]). Поэтому приведенное выше утверждение означает, что обратное высказывание также верно.

**30.3.6.** Было бы крайне удобно, если бы существование решений в нашей теории могло быть установлено такими методами. Однако бросается в глаза соображение, опровергающее это: отношение $x\mathcal{R}y$, которое мы должны использовать,— отрицание доминирования $x \succ y$ (см. п. 30.3.3) — очевидно, является асимметричным. Следовательно, мы можем воспользоваться не (30:G), а лишь (30:H); максимальность среди удовлетворяющих множеств лишь необходима, но может не быть достаточной для насыщенности, т. е. для того, чтобы сделать множество решением.

То, что эта трудность действительно глубока, можно увидеть из следующего. Если бы мы могли заменить наше отношение $\mathcal{R}$ на симметричное отношение, то это можно было бы использовать не только для доказательства существования решений, но и для возможности расширения любого $\mathcal{R}$-удовлетворяющего множества дележей до решения (см. выше). Далее, вполне вероятно, что любая игра обладает решением, но мы увидим, что существуют игры, в которых некоторые удовлетворяющие множества не являются подмножествами никаких решений [2]). Таким образом, план замены отношения $\mathcal{R}$ некоторым симметричным отношением не может быть выполнен, так как он был бы, в равной степени, средством доказательства первого утверждения, которое, по-видимому, верно, и второго утверждения, которое, конечно, неверно [3]).

Это рассуждение может показаться читателю никчемным, поскольку отношение $x\mathcal{R}y$, которое мы должны использовать («не-$x \succ y$»), в действительности является асимметричным. С технической точки зрения, однако, возможно, что удастся найти другое отношение $x\mathcal{S}y$, которое обладает следующими свойствами: отношение $x\mathcal{S}y$ не равносильно отношению $x\mathcal{R}y$; отношение $\mathcal{S}$ симметричное, в то время как $\mathcal{R}$ не симметричное, однако $\mathcal{S}$-насыщенность равносильна $\mathcal{R}$-насыщенности. В этом случае $\mathcal{R}$-насыщенные множества, так как они являются $\mathcal{S}$-насыщенными, должны были бы существовать, а $\mathcal{S}$-удовлетворяющие (но не обязательно $\mathcal{R}$-удовлетворяющие) множества всегда могли бы быть расширены до $\mathcal{S}$-насыщенных, т. е. до $\mathcal{R}$-насыщенных множеств [4]). Такой план подхода

---

правдоподобно, что соответствующий процесс исчерпания может быть проведен при помощи бесконечного числа шагов. Этот процесс, известный под названием *трансфинитной индукции*, является объектом широкого теоретико-множественного изучения. Он может быть осуществлен строгим способом, опирающимся на так называемую *аксиому выбора*.

Интересующийся читатель может воспользоваться литературой, указанной в книге Ф. Хаусдорфа (см. сноску 1 на стр. 87). См. также E. Zermelo, Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.*, 59 (1904), 514 и след., а также *Math. Ann.*, 65 (1908), 107ff.

Эти вопросы уводят далеко от нашего предмета обсуждения и не являются необходимыми для наших целей. Поэтому мы больше не останавливаемся на этом.

[1]) Очевидно, свойство (30:B:a) сохраняется при переходе к подмножеству.

[2]) См. сноску 1 на стр. 304.

[3]) Это довольно полезный принцип технической стороны математики. Непригодность какого-нибудь метода может быть выведена из того факта, что, если бы его осуществить, он доказал бы слишком много.

[4]) Дело в том, что для $\mathcal{R}$- и $\mathcal{S}$-насыщенности допускалась их равносильность между собой, а на равносильность их $\mathcal{R}$- и $\mathcal{S}$-удовлетворяемостей мы не рассчитывали

к проблеме существования решений не является столь произвольным, как это может показаться. В самом деле, в дальнейшем мы встретимся с аналогичной задачей, которая будет решена совершенно таким же образом (см. п. 51.4.3). А пока нам осталась одна лишь надежда.

**30.3.7.** В последнем пункте мы рассматривали вопрос, является ли каждое $\mathscr{R}$-удовлетворяющее множество подмножеством какого-либо $\mathscr{R}$-насыщенного множества. Мы отмечали, что для отношения $x\mathscr{R}y$, которое мы должны использовать («не-$x \succ y$», асимметричное), ответ отрицателен. Краткое объяснение этого факта представляется заслуживающим внимания.

Если бы этот ответ оказался утвердительным, то это означало бы, что всякое множество, удовлетворяющее условию (30:B:a), могло бы быть расширено до множества, удовлетворяющего условиям (30:B:a) и (30:D), или, в обозначениях п. 30.1.1, что всякое множество дележей, удовлетворяющее условию (30:5:a), могло бы быть расширено до множества, удовлетворяющего условиям (30:5:a) и (30:5:b).

Поучительно повторить сказанное в терминологии п. 4.6.2. Тогда утверждение будет состоять в следующем: всякая норма поведения, свободная от внутренних противоречий, может быть расширена до устойчивой, т. е. до такой, которая не только свободна от внутренних противоречий, но способна также отвергнуть все дележи вне ее.

Рассмотрения из п. 30.3.6, согласно которым все это, вообще говоря, неверно, представляют определенный интерес: для того чтобы множество правил поведения было ядром (т. е. подмножеством) устойчивой нормы поведения, оно, возможно, должно было бы обладать более глубокими структурными свойствами, чем просто свобода от внутренних противоречий [1]).

## 30.4. Три непосредственных цели

**30.4.1.** Мы уже сформулировали характеристические свойства решения для произвольной игры $n$ лиц с нулевой суммой и можем теперь начать систематическое исследование свойств этого понятия. В добавление к прежним этапам этого исследования представляется уместным рассмотреть три конкретных вопроса. Эти вопросы связаны со следующими частными случаями.

Первый вопрос. Через все изложение § 4 проходит мысль, что естественное понятие решения должно быть понятием некоторого дележа, т. е. в нашей теперешней терминологии понятием некоторого одноэлементного множества **V**. В п. 4.4.2 мы определенно увидели, что это приводило бы к нахождению «первого» элемента по отношению к доминированию. В последующих пунктах § 4, так же как и в точных рассмотрениях п. 30.2, мы увидели, что именно нетранзитивность нашего понятия доминирования препятствует главным образом успеху такой попытки и вынуждает нас ввести в качестве решений множества дележей **V**.

Представляет интерес поэтому (и теперь мы в состоянии сделать это) дать точный ответ на следующий вопрос: для каких игр существуют одноэлементные решения **V**? Что еще можно сказать о решениях таких игр?

[1]) Если бы могло быть найдено отношение $\mathscr{S}$, о котором говорилось в конце п. 30.3.6, то именно это $\mathscr{S}$, а не $\mathscr{R}$, раскрыло бы, какие нормы поведения являются такими ядрами (т. е. подмножествами); это были бы $\mathscr{S}$-удовлетворяющие множества. Ср. с аналогичным положением в п. 51.4, где соответствующая операция проведена успешно.

Второй вопрос. Постулаты из п. 30.1.1 были получены из опыта работы над игрой трех лиц с нулевой суммой в случае существенности. Поэтому интересно вернуться к рассмотрению этого случая в свете данной точной теории. Конечно, мы знаем (фактически это было ведущим принципом нашего изложения), что решение, которое мы получили при помощи предварительных методов из §§ 22 и 23, является также решением и в смысле наших теперешних постулатов. Тем не менее желательно проверить это явно. На самом деле вопрос состоит в том, чтобы установить, не приписывают ли эти постулаты тем играм также и другие решения. (Мы уже видели, что одна и та же игра вполне может иметь несколько решений.)

Определим поэтому все решения для существенных игр трех лиц с нулевой суммой. Полученные при этом результаты окажутся весьма неожиданными; однако неразумными, как мы увидим, они не будут.

**30.4.2.** Эти два случая исчерпывают в действительности все игры с нулевой суммой с $n \leqq 3$. В самом деле, мы отметили в первом замечании из п. 27.5.2, что для $n = 1, 2$ эти игры несущественны, так что вместе с существенными и несущественными играми для $n = 3$ они отражают все возможности при $n \leqq 3$.

Когда эта программа будет выполнена, останутся игры, для которых $n \geqq 4$, а мы уже знаем, что для них возникают новые трудности (см. замечание на стр. 269 и конец п. 27.5.3).

**30.4.3.** Третий вопрос. В п. 27.1 мы ввели понятие стратегической эквивалентности. Представляется вполне естественным, что такое отношение содержит в себе именно то, что выражает его название: две игры, связанные этим отношением, предоставляют одни и те же стратегические возможности и побуждающие мотивы для образования коалиций и т. д. Теперь, когда понятие решения поставлено на строгую основу, эти эвристические предположения потребуют строгого доказательства.

На эти три вопроса будут даны ответы соответственно в (31:P) из п. 31.2.3, в п. 32.2 и в (31:Q) из п. 31.3.3.

## § 31. ПЕРВЫЕ СЛЕДСТВИЯ

### 31.1. Выпуклость, линейность и некоторые критерии доминирования

**31.1.1.** Этот параграф посвящен доказательству различных вспомогательных результатов, относящихся к решениям и к таким связанным с ними понятиям, как несущественность, существенность, доминирование, эффективность. Поскольку мы поставили все эти понятия на строгую основу, возникает возможность, равно как и обязательность, абсолютной строгости при установлении их свойств. Некоторые из последующих выводов могут выглядеть педантичными, и может иногда показаться, что словесное объяснение могло бы заменить математическое доказательство. Такой подход, однако, был бы возможен лишь для части результатов, содержащихся в этом параграфе, и если принять во внимание все, то наилучшим планом окажется систематическое изложение всего материала с полной математической строгостью.

Некоторые принципы, которые играют значительную роль при нахождении решений, суть (31:A), (31:B), (31:C), (31:F), (31:G), (31:H); эти принципы решают априори для некоторых коалиций либо что они всегда должны приниматься во внимание, либо что никогда. Представляется удобным сопровождать эти принципы словесными объяснениями

(в указанном выше смысле) в дополнение к их формальным доказательствам.

Другие результаты представляют интерес и сами по себе. Все вместе они дают первую ориентировку во всем том, что окружает только что выработанные понятия. Ответы на первый и третий вопросы из п. 30.4 содержатся в (31:P) и (31:Q). Второй вопрос, который возник ранее, разрешен в (31:M).

**31.1.2.** Рассмотрим два дележа $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ и предположим, что необходимо решить, верно ли, что $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$, или нет. Это сводится к решению вопроса, существует ли множество $S$ со свойствами (30:4:a) — (30:4:c) из п. 30.1.1. Одно из них, именно (30:4:c), состоит в том, что

$$\alpha_i > \beta_i \text{ для всех } i \in S.$$

Назовем это свойство *главным условием*, а два других, (30:4:a) и (30:4:b), — *предварительными условиями*.

Заметим, что одну из наибольших технических трудностей при работе с понятием доминирования, т. е. при нахождении решений **V** в смысле п. 30.1.1, представляет собой наличие предварительных условий. Крайне желательно суметь, так сказать, сократить их круг, т. е. установить такие критерии, при которых они заведомо выполняются, а также другие критерии, при которых они заведомо не выполняются. При поиске критериев последнего типа ни в коем случае не является необходимым, чтобы они включали в себя невыполнение предварительных условий для всех дележей $\vec{\alpha}$; достаточно, чтобы это было для всех тех дележей $\vec{\alpha}$, которые удовлетворяют главному условию при некотором другом дележе $\vec{\beta}$. (См. доказательства утверждений (31:A) или (31:F), где именно это и использовалось.)

Мы интересуемся критериями такого вида в связи с выяснением того, является ли данное множество дележей **V** решением или не является, т. е. удовлетворяет ли оно условиям (30:5:a), (30:5:b), т. е. условию (30:5:c), из п. 30.1.1. Это сводится к выяснению того, какие дележи $\vec{\beta}$ доминируются элементами множества **V**.

Критерии, которые устраняют все предварительные условия в описанной выше ситуации, являются особенно желательными, если они совсем не содержат ссылок на $\vec{\alpha}$ [1, 2]), т. е. если они относятся только к множеству $S$. (См. (31:F), (31:G), (31:H).) Однако даже критерии, которые содержат $\vec{\alpha}$, могут быть желательными. (См. (31:A).) Мы рассмотрим даже критерий, который имеет дело с $S$ и $\vec{\alpha}$ и использует поведение другого $\vec{\alpha}'$. (Конечно, оба дележа принадлежат **V**. См. (31:B).)

Для того чтобы охватить все эти возможности, введем следующую терминологию.

Рассмотрим доказательства, которые имеют целью нахождение всех дележей $\vec{\beta}$, доминируемых элементами данного множества дележей **V**.

---

[1]) Дело в том, что в нашем первоначальном определении доминирования $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ предварительные условия относятся к $S$ и $\vec{\alpha}$ (а не к $\vec{\beta}$). В частности, это касается условия (30:4:b).

[2]) Гипотетический элемент множества **V**, который должен доминировать $\vec{\beta}$.

Мы, таким образом, имеем дело с отношением $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ ($\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$) и с вопросом, удовлетворяет ли некоторое множество $S$ нашим предварительным требованиям для такого отношения. Назовем множество $S$ *заведомо необходимым*, если мы знаем (благодаря тому, что $S$ удовлетворяет некоторому подходящему критерию), что $S$ и $\vec{\alpha}$ всегда удовлетворяют предварительным условиям. Назовем множество $S$ *заведомо не необходимым*, если мы знаем (снова благодаря тому, что $S$ удовлетворяет некоторому подходящему критерию, который, однако, может теперь содержать также другие факты, см. выше), что возможность того, что $S$ и $\vec{\alpha}$ удовлетворяют предварительным условиям, можно исключить из рассмотрения (так как это никогда не случается или по какой-либо другой причине; см. также оговорки, сделанные выше).

Эти рассуждения могут показаться сложными, но они выражают вполне естественную техническую точку зрения.

Замечание. Для читателя, знакомого с формальной логикой, отметим следующее.

Свойства «заведомой необходимости» и «заведомой не необходимости» имеют логическую природу. Они характеризуются нашей способностью показать (какими бы то ни было средствами), что некоторое определенное логическое упущение не сделает недействительным доказательство (определенного вида). Пусть, в частности, некоторое доказательство имеет дело с доминированием дележа $\vec{\beta}$ элементом $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$. Предположим, что рассматривается такое доминирование $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$, имеющее место при помощи множества $S$ ($\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$). Тогда это доказательство остается верным, если мы обращаемся с $S$ и $\vec{\alpha}$ (когда они обладают нужными свойствами) так, как будто бы они всегда удовлетворяли предварительным условиям (или никогда не удовлетворяли им), без фактического исследования этих условий. В математических доказательствах, которые мы будем проводить, этот метод будет часто использоваться.

Может даже случиться, что одно и то же множество $S$ (при использовании двух различных критериев) окажется одновременно как заведомо необходимым, так и заведомо не необходимым (для одних и тех же $\vec{\alpha}$, например для них всех). Это означает просто, что ни одно из двух упомянутых выше упущений не портит какое-либо доказательство. Так может случиться, например, когда $\vec{\alpha}$ не удовлетворяет главному условию ни для какого дележа. (Один пример получается объединением (31:F) с (31:G) в случае, описанном в (31:E:b). Другой отмечен в сноске 1 на стр. 325 и в сноске 1 на стр. 441.)

Приведем теперь некоторые критерии свойств заведомой необходимости и заведомой не необходимости. После каждого критерия мы дадим словесное объяснение его содержания, которое, будем надеяться, сделает нашу технику более ясной для читателя.

**31.1.3.** Прежде всего приведем три элементарных критерия.

(31:A) $S$ является заведомо не необходимым для данного дележа $\vec{\alpha}$ ($\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$), если существует такое $i \in S$, что $\alpha_i = \mathrm{v}((i))$.

Объяснение. Никогда не нужно рассматривать какую-либо коалицию, если она не обещает каждому ее участнику (индивидуально) определенно больше, чем он может получить сам.

Доказательство. Если $\vec{\alpha}$ удовлетворяет главному условию для некоторого дележа, то $\alpha_i > \beta_i$. Так как $\vec{\beta}$ является дележом, $\beta_i \geqq \mathrm{v}((i))$. Следовательно, $\alpha_i > \mathrm{v}((i))$. Это противоречит тому, что $\alpha_i = \mathrm{v}((i))$.

(31:B) $S$ является заведомо необходимым для данного дележа $\vec{\alpha}$ ($\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$), если оно заведомо необходимо (и рассматривается) для такого другого дележа $\vec{\alpha}'$ ($\vec{\alpha}' \in \mathbf{V}$), что

(31:1) $$\alpha'_i \geqq \alpha_i \text{ для всех } i \in S.$$

Объяснение. Можно не рассматривать какую-то коалицию, если существует другая коалиция, которая имеет тех же самых участников и обещает каждому из них (индивидуально) не меньше, чем первая.

Доказательство. Пусть дележи $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ удовлетворяют главному условию: $\alpha_i > \beta_i$ для всех $i \in S$. Тогда, на основании (31:1), $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\beta}$ также удовлетворяют ему: $\alpha'_i > \beta_i$ для всех $i \in S$. Так как $S$ и $\vec{\alpha}'$ заданы, установлено, таким образом, что $\vec{\beta}$ доминируется каким-то элементом из $\mathbf{V}$, и не представляется необходимым рассматривать $S$ и $\vec{\alpha}$.

(31:C) $S$ является заведомо не необходимым, если другое множество $T \subseteq S$ заведомо необходимо (и рассматривается).

Объяснение. Можно не рассматривать коалицию, если ее часть уже определенно должна рассматриваться.

Доказательство. Пусть дележи $\vec{\alpha}$ ($\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$) и $\vec{\beta}$ удовлетворяют главному условию для $S$; тогда они, очевидно, будут удовлетворять ему и для $T \subseteq S$. Поскольку $T$ и $\vec{\alpha}$ рассматриваются, они, таким образом, устанавливают, что $\vec{\beta}$ доминируется каким-то элементом из $\mathbf{V}$, и не является необходимым рассматривать $S$ и $\vec{\alpha}$.

**31.1.4.** Введем теперь некоторые дальнейшие критерии, и притом на несколько более широкой основе, чем это непосредственно необходимо. Для этой цели начнем со следующего рассуждения.

Для произвольного множества $S = (k_1, \ldots, k_p)$ воспользуемся (25:5) из п. 25.4.1 при $S_1 = (k_1), \ldots, S_p = (k_p)$. Тогда мы получим

$$\mathrm{v}(S) \geqq \mathrm{v}((k_1)) + \ldots + \mathrm{v}((k_p)),$$

т. е.

(31:2) $$\mathrm{v}(S) \geqq \sum_{k \in S} \mathrm{v}((k)).$$

Избыток левой части в (31:2) над правой выражает полное преимущество (для всех участников вместе), присущее образованию коалиции $S$. Назовем это свойство *выпуклостью* множества $S$. Если это преимущество исчезает, т. е. если

(31:3) $$\mathrm{v}(S) = \sum_{k \in S} \mathrm{v}((k)),$$

то множество $S$ назовем *линейным*.

Непосредственно получаем несколько утверждений.

(31:D) Следующие множества всегда линейны:

(31:D:a) Пустое множество.

(31:D:b) Любое одноэлементное множество.

(31:D:c) Любое подмножество линейного множества.

(31:E) Любое из следующих утверждений равносильно несущественности игры:

(31:E:a) Множество $I = (1, \ldots, n)$ является линейным.

(31:E:b) Существует такое множество $S$, что оба множества $S$ и $-S$ линейны.

(31:E:c) Любое множество $S$ линейное.

Доказательство утверждений (31:D:a) и (31:D:b). Для этих множеств (31:3) очевидно.

Утверждение (31:D:c). Пусть $S \subseteq T$ и множество $T$ линейное. Положим $R = T - S$. Тогда на основании (31:2)

(31:4) $$\mathrm{v}(S) \geqq \sum_{k \in S} \mathrm{v}((k)),$$

(31:5) $$\mathrm{v}(R) \geqq \sum_{k \in R} \mathrm{v}((k)).$$

Поскольку множество $T$ линейное, то по (30:3) получаем

(31:6) $$\mathrm{v}(T) = \sum_{k \in T} \mathrm{v}((k)).$$

Так как $S \cap R = \varnothing$, то $S \cup R = T$; поэтому

$$\mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(R) \leqq \mathrm{v}(T), \quad \sum_{k \in S} \mathrm{v}((k)) + \sum_{k \in R} \mathrm{v}((k)) = \sum_{k \in T} \mathrm{v}((k)).$$

Следовательно, (31:6) влечет

(31:7) $$\mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(R) \leqq \sum_{k \in S} \mathrm{v}((k)) + \sum_{k \in R} \mathrm{v}((k)).$$

Теперь сравнение (31:4), (31:5) и (31:7) показывает, что мы должны иметь в них во всех равенство. Но равенство в (31:4) означает как раз линейность $S$.

Утверждение (31:E:a). Это утверждение совпадает с (27:B) из п. 27.4.1.

Утверждение (31:E:c). Это утверждение совпадает с (27:C) из п. 27.4.2.

Утверждение (31:E:b). Для несущественной игры это верно при любом $S$ на основании (31:E:c). Обратно, если это верно для $S$ (хотя бы для одного), то

$$\mathrm{v}(S) = \sum_{k \in S} \mathrm{v}((k)), \quad \mathrm{v}(-S) = \sum_{k \notin S} \mathrm{v}((k));$$

следовательно, суммируя (используем (25:3:b) из п. 25.3.1), получаем

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k)),$$

т. е. игра является несущественной на основании (31:E:a) или (27:B) из п. 27.4.1.

**31.1.5.** Теперь мы можем доказать следующее:

(31:F) $S$ является заведомо не необходимым, если оно линейное.

Объяснение. Не нужно рассматривать коалицию, если игра не допускает полного преимущества (для всех ее участников вместе) по сравнению с тем, что они получили бы сами по себе, как независимые игроки [1].

---

[1]) Отметим, что это связано с критерием (31:A), но вовсе не тождественно с ним! В самом деле, (31:A) имеет дело с $\alpha_i$, т. е. с обещаниями, сделанными для каждого участника индивидуально. (31:F) имеет дело с функцией $\mathrm{v}(S)$ (которая определяет линейность), т. е. с возможностями игры для всех участников вместе. Но оба критерия согласуют свои утверждения с $\mathrm{v}((i))$, т. е. с тем, что каждый игрок индивидуально может получить сам по себе.

Доказательство. Если $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ для некоторого $S$, то необходимо $S \neq \emptyset$, $\alpha_i > \beta_i$ для всех $i \in S$ и $\beta_i \geqq v((i))$; следовательно, $\alpha_i > v((i))$. Таким образом, $\sum_{i \in S} \alpha_i > \sum_{i \in S} v((i))$. Так как $S$ линейно, это означает, что $\sum_{i \in S} \alpha_i > v(S)$. Но $S$ должно быть эффективным: $\sum_{i \in S} \alpha_i \leqq$ $\leqq v(S)$, и мы получаем противоречие.

(31:G) $S$ является заведомо необходимым, если $-S$ линейно и $S \neq \emptyset$.

Объяснение. Коалиция должна рассматриваться, если она не пуста и противостоит коалиции вида, описанного в (31:F).

Доказательство. Предварительные условия выполнены для всех дележей.

Проверяем (30:4:a). $S \neq \emptyset$ по условию.

Проверяем (30:4:b). Всегда $\alpha_i > v((i))$, так что $\sum_{i \notin S} \alpha_i \geqq \sum_{i \notin S} v((i))$. Поскольку $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, левая часть равна $-\sum_{i \in S} \alpha_i$. Так как $-S$ линейно, то правая часть равна $v(-S)$, т. е. (используем (25:3:b) из п. 25:3:1) равна $-v(S)$. Итак, $-\sum_{i \in S} \alpha_i \geqq -v(S)$, $\sum_{i \in S} \alpha_i \leqq v(S)$, т. е. $S$ эффективно.

Из (31:F) и (31:G) получим, в частности:

(31:H) $p$-элементное множество является заведомо необходимым, если $p = n - 1$, и заведомо не необходимым, если $p = 0, 1, n$.

Объяснение. Коалиция обязательно должна рассматриваться, если она имеет только одного противника. Коалицию не нужно рассматривать, если она пуста или состоит только (!) из одного игрока или если она не имеет противников.

Доказательство. Пусть $p = n - 1$. Множество $-S$ имеет только один элемент; следовательно, оно линейное по (31:D). Утверждение следует теперь из (31:G).

Пусть $p = 0, 1$. Утверждение получается непосредственно из (31:D) и (31:F).

Пусть $p = n$. В этом случае $S = I = (1, \ldots, n)$, что делает главное условие невыполнимым. В самом деле, получается $\alpha_i > \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$, и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i > \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

Но так как $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ суть дележи, обе части обращаются в нуль, и мы получаем противоречие.

Таким образом, те $p$, для которых необходимость $S$ сомнительна, ограничены случаем $p \neq 0, 1, n-1, n$, т. е. интервалом

(31:8) $$2 \leqq p \leqq n-2.$$

Этот интервал играет некоторую роль только при $n \geqq 4$. Обсуждаемая ситуация сходна с ситуацией в конце п. 27.5.2 и в п. 27.5.3, причем еще раз выявляется исключительная простота случая $n = 3$.

### 31.2. Система всех дележей. Одноэлементные решения

**31.2.1.** Рассмотрим теперь структуру множества всех дележей.

(31:I) Для несущественной игры существует ровно один дележ:

(31.9) $$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \quad \alpha_i = \mathrm{v}((i)) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для существенной игры существует бесконечно много дележей (их $(n-1)$-мерный континуум), но дележа (31:9) среди них нет.

Доказательство. Рассмотрим дележ

$$\vec{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$$

и положим

$$\beta_i = \mathrm{v}((i)) + \varepsilon_i \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда характеристические условия (30:1) и (30:2) из п. 30.1.1 превращаются в

(31:10) $$\varepsilon_i \geqq 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n,$$

(31:11) $$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}((i)).$$

Если игра Г несущественна, то (27:В) из п. 27.4.1 дает $-\sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}((i))$, так что условия (31:10) и (31:11) приводят к $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0$, т. е. (31:9) является единственным дележом.

Если игра Г существенна, то (27:В) из п. 27.4.1 дает $-\sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}((i)) > 0$, так что (31:10) и (31:11) имеют бесконечно много решений, которые образуют $(n-1)$-мерный континуум [1]); следовательно, то же самое верно для дележей $\vec{\beta}$. Но дележ $\vec{\alpha}$ из (31:9) не является одним из них, так как $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0$ теперь не удовлетворяют равенству (31:11).

Непосредственное следствие:

(31:J) Решение **V** никогда не пусто.

Доказательство. Другими словами, пустое множество $\varnothing$ не является решением. В самом деле, рассмотрим какой-нибудь дележ $\vec{\beta}$ (на основании (31:I) хотя бы один дележ существует). Дележ $\vec{\beta}$ не принадлежит $\varnothing$, и ни для какого $\vec{\alpha}$ из $\varnothing$ не имеет места $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. Поэтому для пустого множества $\varnothing$ нарушается условие (30:5:b) из п. 30.1.1 [2]).

**31.2.2.** Мы уже указывали, что одновременное выполнение

(31:12) $$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}, \quad \vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$$

ни в каком смысле не является невозможным [3]). Однако

(31:K) Отношение $\vec{\alpha} \succ \vec{\alpha}$ невозможно.

[1]) Имеется только одно уравнение, а именно (31:11).

[2]) Этот довод может показаться педантичным; однако если условия, наложенные на дележ, оказались бы противоречивыми (т. е. при отсутствии (31:I)), то $\mathbf{V} = \varnothing$ являлось бы решением.

[3]) Множества $S$ этих двух доминирований не должны пересекаться. На основании (31:H) каждое из этих $S$ должно иметь количество элементов $\geqq 2$. Следовательно, (31:12) может иметь место только при $n \geqq 4$.

При помощи более детального рассмотрения случай $n = 4$ также можно исключить; однако для каждого $n \geqq 5$ отношения (31:12) действительно возможны.

Доказательство. Условия (30:4:a), (30:4:c) из п. 30.1.1 противоречивы при $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

(31:L) Если имеется существенная игра и дележ $\vec{\alpha}$, то существует такой дележ $\vec{\beta}$, что $\vec{\beta} \in\!\!- \vec{\alpha}$ и не $\vec{\alpha} \in\!\!- \vec{\beta}$[1]).

Доказательство. Положим

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\alpha_i = v((i)). \tag{31:13}$$

Поскольку игра существенная, (31:I) исключает предположение, что (31:13) справедливо для всех $i = 1, \ldots, n$. Пусть (31:13) нарушается, скажем, для $i = i_0$. Так как $\vec{\alpha}$ является дележом, $\alpha_{i_0} \geqq v((i_0))$; поэтому нарушение (31:13) означает, что $\alpha_{i_0} > v((i_0))$, т. е.

$$\alpha_{i_0} = v((i_0)) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{31:14}$$

Определим теперь вектор

$$\vec{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\},$$

где

$$\beta_{i_0} = \alpha_{i_0} - \varepsilon = v((i_0)),$$

$$\beta_i = \alpha_i + \frac{\varepsilon}{n-1} \quad \text{для} \quad i \neq i_0.$$

Из этих уравнений ясно, что $\beta_i \geqq v((i))$ [2]) и что $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ [3]), так что $\vec{\beta}$ является дележом вместе с $\vec{\alpha}$.

Теперь можно доказать оба интересующих нас утверждения относительно $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$.

Покажем, что $\vec{\beta} \in\!\!- \vec{\alpha}$. Мы имеем $\beta_i > \alpha_i$ для всех $i \neq i_0$, т. е. для всех $i \in S = -(i_0)$. Это множество имеет $n-1$ элементов и удовлетворяет главному условию (для $\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}$); следовательно, (31:H) дает $\vec{\beta} \in\!\!- \vec{\alpha}$.

Покажем, что неверно $\vec{\alpha} \in\!\!- \vec{\beta}$. Предположим, что $\vec{\alpha} \in\!\!- \vec{\beta}$. Тогда должно существовать такое множество $S$, удовлетворяющее главному условию, которое не исключается условием (31:H). Поэтому $S$ должно иметь $\geqq 2$ элементов. Следовательно, в $S$ должно существовать $i \neq i_0$. Из первого следует $\beta_i > \alpha_i$ (по построению $\vec{\beta}$), а из второго — $\alpha_i > \beta_i$ (на основании главного условия), и мы получаем противоречие.

**31.2.3.** Мы можем вывести те заключения, которыми интересовались с самого начала.

(31:M) Дележ $\vec{\alpha}$, для которого не может быть $\vec{\alpha}' \in\!\!- \vec{\alpha}$, существует тогда и только тогда, когда игра несущественная [4]).

---

1) Следовательно, $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$.

2) Для $i = i_0$ мы действительно имеем $\beta_{i_0} = v((i_0))$. Для $i \neq i_0$ мы имеем $\beta_i > \alpha_i \geqq v((i))$.

3) $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, так как разность между $\beta_i$ и $\alpha_i$ равна $\varepsilon$ для одного значения $i$ ($i = i_0$) и равна $-\varepsilon/(n-1)$ для $n-1$ значений $i$ (для всех $i \neq i_0$).

4) См. (30:A:a) в п. 30.2.2 и, в частности, сноску 2 на стр. 284.

Доказательство. Достаточность. Если игра несущественная, то она имеет, по (31:I), ровно один дележ $\vec{\alpha}$, который обладает нужным свойством на основании (31:K).

Необходимость. Если игра существенная и $\vec{\alpha}$ является дележом, то для $\vec{\alpha}' = \vec{\beta}$, взятого из (31:L), получаем

$$\vec{\alpha}' = \vec{\beta} \in\!\!- \vec{\alpha}.$$

(31:N) Игра, обладающая одноэлементным решением [1]), является обязательно несущественной.

Доказательство. Обозначим одноэлементное решение, упомянутое в условии, через $\mathbf{V} = (\vec{\alpha})$. Это $\mathbf{V}$ должно удовлетворять условию (30:5:b) из п. 30.1.1. Это означает в нашем случае, что каждое $\vec{\beta}$, отличное от $\vec{\alpha}$, доминируется элементом $\vec{\alpha}$. Иначе говоря, из $\vec{\beta} \neq \vec{\alpha}$ следует $\vec{\alpha} \in\!\!- \vec{\beta}$.

Тогда, если игра существенная, то (31:L) дает элемент $\vec{\beta}$, который нарушает это условие.

(31:O) Несущественная игра обладает ровно одним решением $\mathbf{V}$. Оно является одноэлементным множеством $\mathbf{V} = (\vec{\alpha})$ с $\vec{\alpha}$ из (31:I).

Доказательство. На основании (31:I) существует ровно один дележ, именно $\vec{\alpha}$ из (31:I). Решение $\mathbf{V}$ не может быть пустым ввиду (31:J); следовательно, единственной возможностью будет $\mathbf{V} = (\vec{\alpha})$. Далее, $\mathbf{V} = (\vec{\alpha})$ действительно является решением, т. е. удовлетворяет условиям (30:5:a) и (30:5:b) из п. 30.1.1: первому — на основании (31:K), а второму — так как $\vec{\alpha}$ является единственным дележом на основании (31:1).

Теперь мы можем полностью ответить на первый вопрос из п. 30.4.1.

(31:P) Игра обладает одноэлементным решением (см. сноску 1 на этой стр.) тогда и только тогда, когда она является несущественной; в этом случае она не имеет других решений.

Доказательство. Это утверждение является комбинацией результатов (31:N) и (31:O).

### 31.3. Изоморфизм, соответствующий стратегической эквивалентности

**31.3.1.** Рассмотрим две игры Г и Г′ с характеристическими функциями v($S$) и v′($S$), которые стратегически эквивалентны в смысле п. 27.1. Мы хотим доказать, что они действительно эквивалентны с точки зрения понятий, определенных в п. 30.1.1. Это будет сделано при помощи установления *изоморфного отображения* между объектами, которые составляют основу определений п. 30.1.1, т. е. между дележами. Другими словами, мы хотим установить взаимно однозначное соответствие между дележами игры Г и дележами игры Г′, которое является изоморфизмом по отноше-

[1]) Мы не исключаем возможности, что эта игра может обладать также и другими решениями, одноэлементными или неодноэлементными. В действительности этого никогда не может произойти (при сделанных нами предположениях), как показывает комбинация результатов (31:N) и (31:O) или результат (31:P). Однако данное рассуждение от них не зависит.

нию к соответствующим понятиям в них, т. е. которое переводит эффективные множества, доминирование и решения для игры Г соответственно в эффективные множества, доминирование и решения для игры Г'.

Эти рассуждения являются просто точной переработкой эвристических идей из п. 27.1.1, и читатель может подумать, что они не нужны. Однако в них приводится достаточно поучительный пример «доказательства изоморфизма», и, кроме того, здесь снова могут быть применены наши прежние замечания о соотношении между описательным и точным доказательствами.

**31.3.2.** Пусть стратегическая эквивалентность задается числами $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$ в смысле (27:1) и (27:2) из п. 27.1.1. Рассмотрим все дележи $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ игры Г и все дележи $\vec{\alpha}' = \{\alpha_1', \ldots, \alpha_n'\}$ игры Г', займемся поисками взаимно однозначного отображения

$$\vec{\alpha} \rightleftarrows \vec{\alpha}' \tag{31:15}$$

с нужными свойствами.

То, что соответствие (31:15) должно существовать, легко получить из рассуждений в начале п. 27.1.1. Мы описывали там переход от игры Г к игре Г' при помощи включения в игру фиксированного платежа $\alpha_k^0$ игроку $k$. Применение этого принципа к дележам означает

$$\alpha_k' = \alpha_k + \alpha_k^0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, n\,[1]. \tag{31:16}$$

В соответствии с этим мы определяем отображение (31:15) при помощи равенств (31:16).

**31.3.3.** Проверим теперь требуемые свойства для отображения, определяемого посредством (31:15) и (31:16).

Дележи игры Г отображаются на дележи игры Г'. В самом деле, это означает, на основании (30:1) и (30:2) из п. 30.1.1, что свойства

$$\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i)) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{31:17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \tag{31:18}$$

переходят в свойства

$$\alpha_i' \geqq \mathrm{v}'((i)) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{31:17*}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' = 0. \tag{31:18*}$$

Это будет так для (31:17) и (31:17*), потому что $\mathrm{v}'((i)) = \mathrm{v}((i)) + \alpha_i^0$ (вследствие (27:2) из п. 27.1.1.), для (31:18) и (31:18*), потому что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 = 0$ (на основании (27:1)).

Эффективность для игры Г переходит в эффективность для игры Г'. В самом деле, на основании (30:3) из п. 30.1.1 это означает, что

$$\sum_{i \in S} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(S) \quad \text{переходит в} \quad \sum_{i \in S} \alpha_i' \leqq \mathrm{v}'(S).$$

Это очевидно из сравнения (31:16) с (27:2).

---

[1]) Если мы введем (фиксированный) вектор $\vec{\alpha}^0 = \{\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0\}$, то равенства (31:16) могут быть записаны в векторной форме $\vec{\alpha}' = \vec{\alpha} + \vec{\alpha}^0$. Другими словами, это будет сдвиг (на $\vec{\alpha}^0$) в векторном пространстве дележей.

Доминирование для игры Г переходит в доминирование для игры Г′. Это означает то же самое для (30:4:a) — (30:4:c) из п. 30.1.1. (30:4:a) тривиально; (30:4:b) является эффективностью, которая уже установлена; (30:4:c) утверждает, что $\alpha_i > \beta_i$ переходит в $\alpha_i' > \beta_i'$, что очевидно. Решения игры Г отображаются на решения игры Г′. В самом деле, это означает то же утверждение для (30:5:a), (30:5:b) (или (30:5:c)) из п. 30.1.1. Эти условия содержат только доминирование, которое уже установлено.

Сформулируем еще раз эти результаты:

(31:Q) Если две игры с нулевой суммой Г и Г′ стратегически эквивалентны, то существует изоморфизм между их дележами, т. е. взаимно однозначное отображение дележей игры Г на дележи игры Г′, которое оставляет инвариантными понятия, определенные в п. 30.1.1.

# § 32. НАХОЖДЕНИЕ ВСЕХ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННОЙ ИГРЫ ТРЕХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

## 32.1. Математическая формулировка задачи. Графический метод

**32.1.1.** Обратимся теперь ко второй задаче, сформулированной в п. 30.4.1 и состоящей в нахождении всех решений для существенных игр трех лиц с нулевой суммой. Мы знаем, что такую игру можно считать заданной в редуцированной форме и что можно выбрать $\gamma = 1$ [1]. Как мы установили прежде [2], характеристическая функция в этом случае полностью определена:

(32:1) $$\mathrm{v}(S) = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \text{когда } S \text{ имеет } \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \text{элементов.}$$

Дележ является вектором

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

три компоненты которого должны удовлетворять условиям (30:1) и (30:2) из п. 30.1,1, т. е. соответственно

(32:2) $$\alpha_1 \geqq -1, \quad \alpha_2 \geqq -1, \quad \alpha_3 \geqq -1,$$

(32:3) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Мы знаем из (31:I) в п. 31.2.1, что эти компоненты $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ образуют лишь двумерный континуум, т. е. что они могут быть изображены на плоскости. В самом деле, условие (32:3) дает возможность сделать очень простое представление на плоскости.

**32.1.2.** Для этой цели возьмем на плоскости *три оси*, составляющие друг с другом углы в 60°. Для любой точки плоскости определим $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ как ее расстояния по перпендикулярам до этих трех осей. Все расположение и, в частности, знаки, приписываемые компонентам $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, приведены на рис. 31. Легко проверить, что для любой точки алгебраическая

---

[1] См. рассуждение в начале п. 29.1 или приведенные там ссылки: конец п. 27.1 и второе замечание в п. 27.3.

[2] См. рассуждение в начале п. 29.1 или второй случай в п. 27.5.

сумма этих трех расстояний равна нулю и что, обратно, любая тройка $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, для которой эта сумма равна нулю, соответствует некоторой точке.

Итак, представление на плоскости на рис. 31 выражает в точности условие (32:2); поэтому оставшееся условие (32:2) равносильно ограничению, наложенному на точку $\vec{\alpha}$ в плоскости на рис. 31. Это ограничение, очевидно, состоит в том, что точка должна лежать на треугольнике или внутри треугольника, образованного тремя линиями $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -1$. Рис. 32 иллюстрирует это.

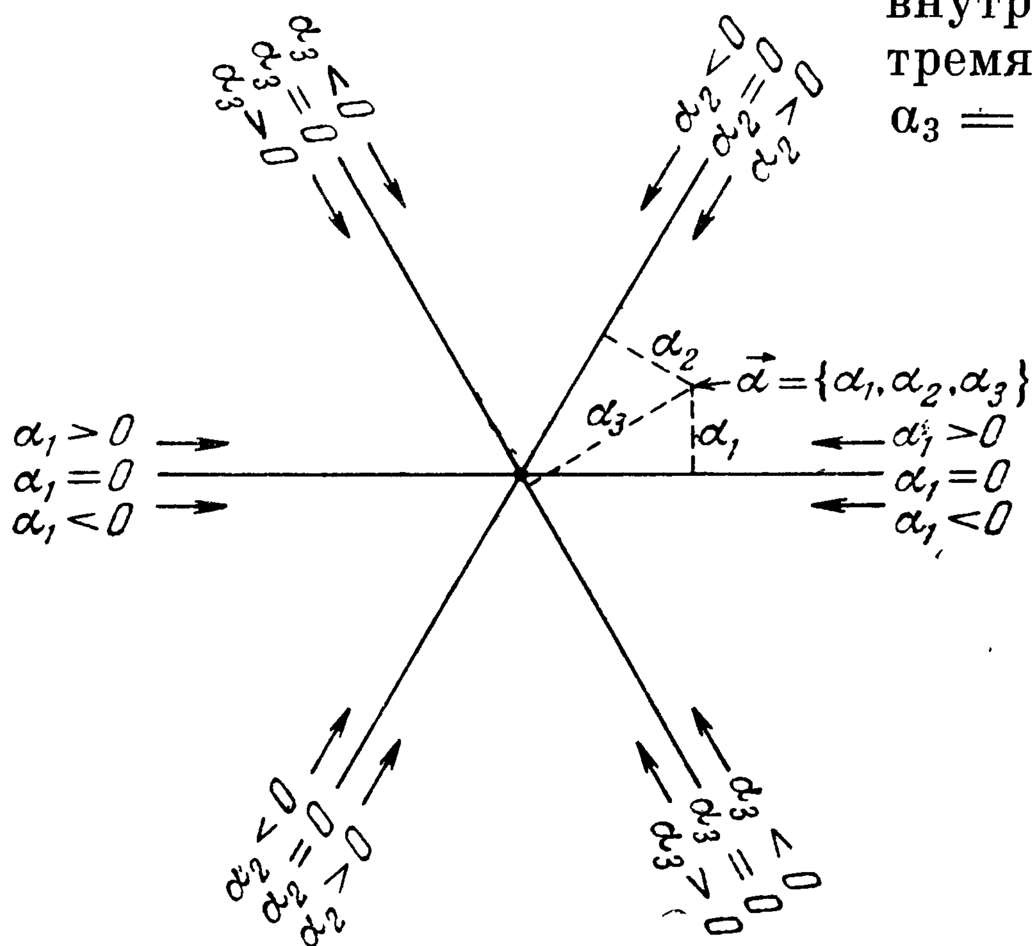



Рис. 31.

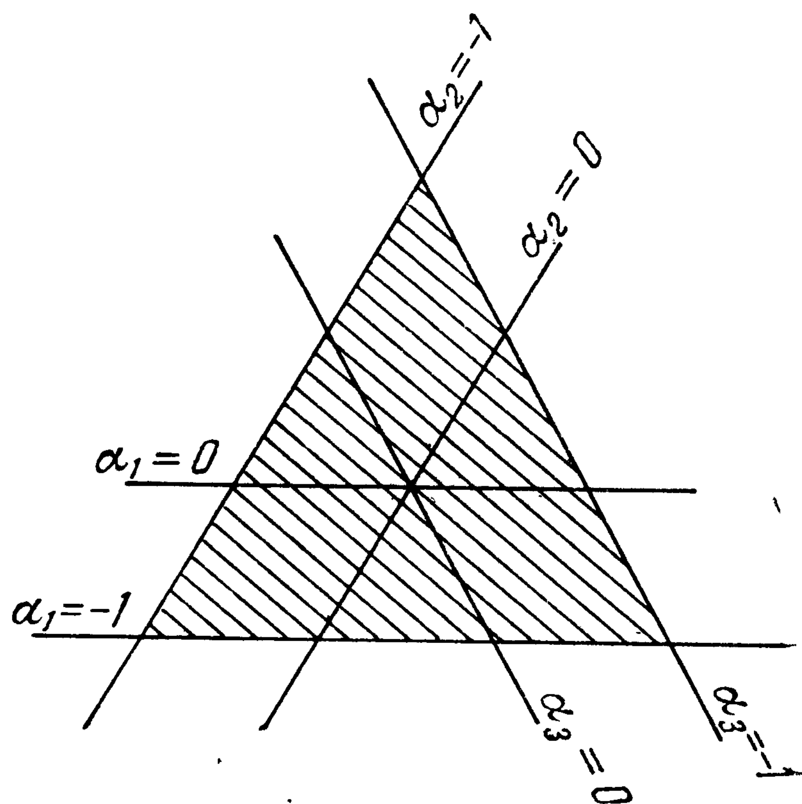



Рис. 32.

Таким образом, заштрихованная область, которую мы называем *фундаментальным треугольником*, представляет векторы $\vec{\alpha}$, которые удовлетворяют условиям (32:2) и (32:3), т. е. все дележи.

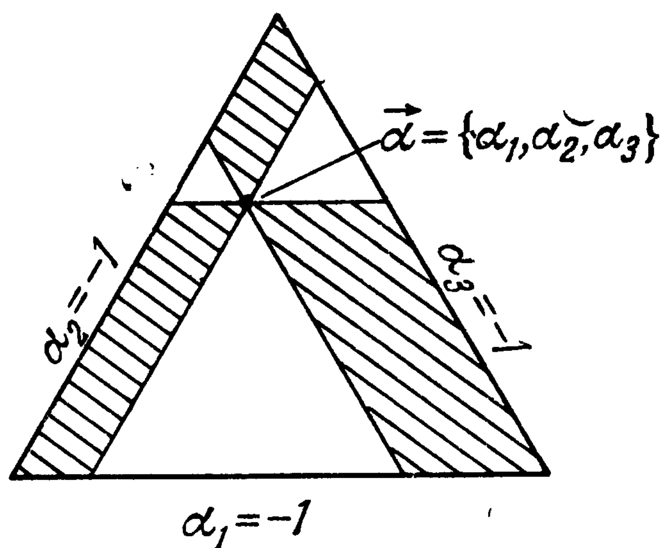



Рис. 33.

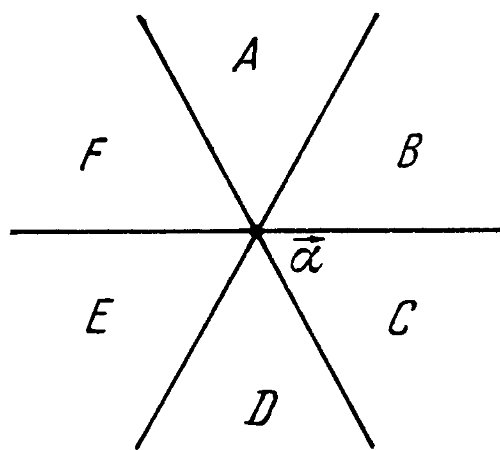



Рис. 34.

**32.1.3.** Опишем теперь в этом графическом представлении отношение доминирования. Так как $n = 3$, мы знаем из (31:H) (см. также обсуждение (31:8) в конце п. 31.1.5), что среди подмножеств $S$ множества $I = (1, 2, 3)$ подмножества из двух элементов являются заведомо необходимыми, а все остальные — заведомо не необходимыми. Другими словами, множества, которые мы должны рассмотреть при нахождении всех решений **V**, таковы: (1, 2); (1, 3); (2, 3). Таким образом, для

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \vec{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

доминирование

$$\vec{\alpha} \in\!\!- \vec{\beta}$$

означает, что

(32:4) Либо $\alpha_1 > \beta_1$, $\alpha_2 > \beta_2$; либо $\alpha_1 > \beta_1$, $\alpha_3 > \beta_3$; либо $\alpha_2 > \beta_2$, $\alpha_3 > \beta_3$.

Графически: на рис. 33 $\vec{\alpha}$ доминирует точки в заштрихованных областях и не доминирует никакие другие точки[1]).

Следовательно, точка $\vec{\alpha}$ доминирует три из шести секторов, обозначенных на рис. 34 (а именно $A$, $C$, $E$). Отсюда легко получить, что $\vec{\alpha}$ доминируется тремя другими секторами (а именно $B$, $D$, $F$). Итак, все те точки, которые не доминируют $\vec{\alpha}$ и не доминируются $\vec{\alpha}$, лежат на трех прямых (т. е. на шести полупрямых), которые разделяют эти секторы. Это означает следующее:

(32:5) Если ни один из дележей $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ не доминирует другого, то направление от $\vec{\alpha}$ к $\vec{\beta}$ параллельно одной из сторон фундаментального треугольника.

**32.1.4.** Теперь можно начать систематические поиски всех решений. Рассмотрим решение **V**, т. е. множество в фундаментальном треугольнике, которое удовлетворяет условиям (30:5:a) и (30:5:b) из п. 30.1.1. В дальнейшем мы будем все время использовать эти условия, не ссылаясь на них явно в каждом случае.

Поскольку игра является существенной, множество **V** должно содержать хотя бы две точки[2]), скажем $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$. На основании (32:5) направление от $\vec{\alpha}$ к $\vec{\beta}$ параллельно одной из сторон фундаментального треугольника; переставляя номера игроков 1, 2, 3, мы можем считать ее стороной $\alpha_1 = -1$, т.е. горизонтальной. Стало быть, точки $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ лежат на горизонтальной прямой $l$. Теперь появляются две возможности, и мы рассмотрим их отдельно: (a) каждая точка множества **V** лежит на $l$; (b) некоторые точки множества **V** не лежат на $l$.

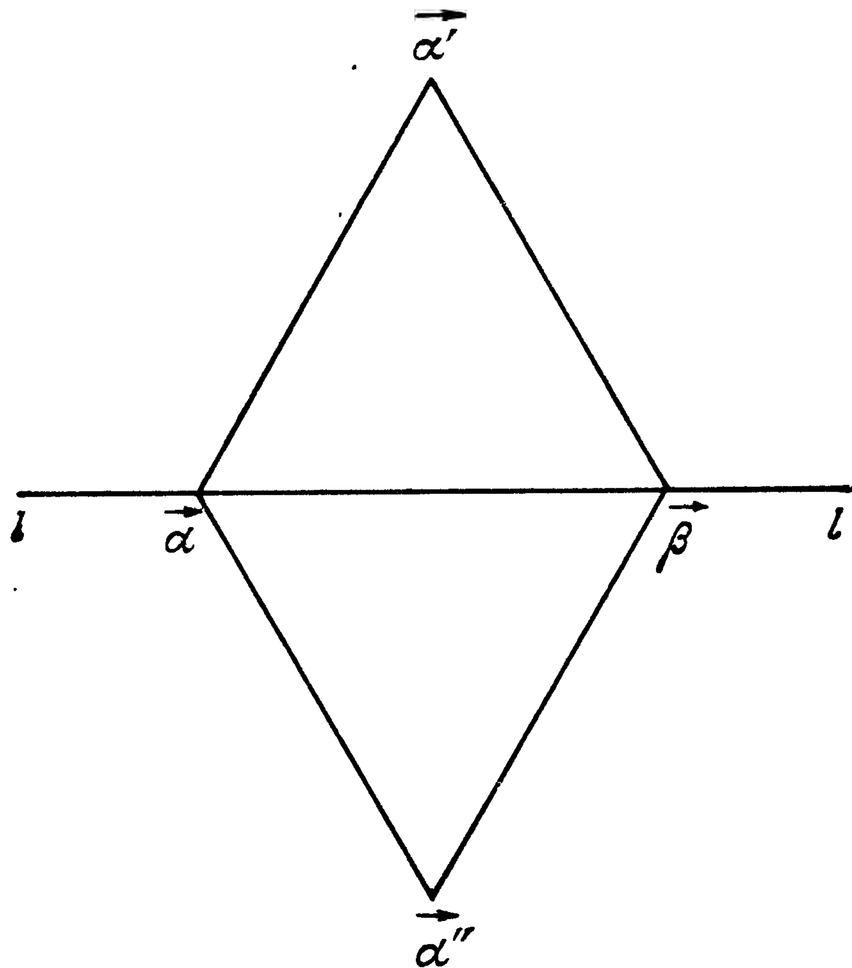



Рис. 35.

## 32.2. Нахождение всех решений

**32.2.1.** Рассмотрим сначала (b). Всякая точка, не лежащая на $l$, должна удовлетворять условию (32:5) по отношению к $\vec{\alpha}$ и к $\vec{\beta}$, т. е. она должна быть третьей вершиной одного из двух равносторонних треугольников с основанием $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, т. е. одной из двух точек $\vec{\alpha}'$, $\vec{\alpha}''$ на рис. 35. Итак, либо $\vec{\alpha}'$, либо $\vec{\alpha}''$ принадлежит множеству **V**. Любая точка множества **V**,

[1]) В частности, не доминирует точек на границах этих областей.

[2]) Это также непосредственно видно из рис. 33.

отличная от точек $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ и $\vec{\alpha}'$ или $\vec{\alpha}''$, должна снова удовлетворять условию (32:5), но теперь уже по отношению ко всем трем точкам $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ и $\vec{\alpha}'$ или $\vec{\alpha}''$. Это, однако, невозможно, как показывает непосредственное рассмотрение рис. 35. Итак, множество **V** состоит ровно из этих трех точек, т. е. из трех вершин треугольника, который расположен либо в виде треугольника *I*, либо в виде треугольника *II* на рис. 36 и 37. Сравнение рис. 36, 37 с рис. 33 или 34 показывает, что вершины треугольника *I* оставляют недоминируемыми точки из внутренности этого треугольника. Это исключает из рассмотрения треугольник *I* [1]).

То же самое сравнение показывает, что вершины треугольника *II* не доминируют области, заштрихованные на рис. 38. Следовательно, треугольник *II* должен быть помещен относительно фундаментального треугольника таким образом, чтобы эти заштрихованные области оказались полностью вне фундаментального треугольника. Это означает, что три вершины треугольника *II* должны лежать на трех сторонах фундаментального треугольника, как это показано на рис. 39. Следовательно, эти три вершины являются средними точками трех сторон фундаментального треугольника.

Сравнение рис. 39 с рис. 33 или 34 показывает, что множество **V** действительно является решением. Легко проверить, что эти три средние точки являются точками (векторами)

$$(32{:}6)\qquad \left\{-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\},\ \left\{\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2}\right\},\ \left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\ -1\right\},$$

т. е. что это решение **V** является множеством, представленным табл. 23.

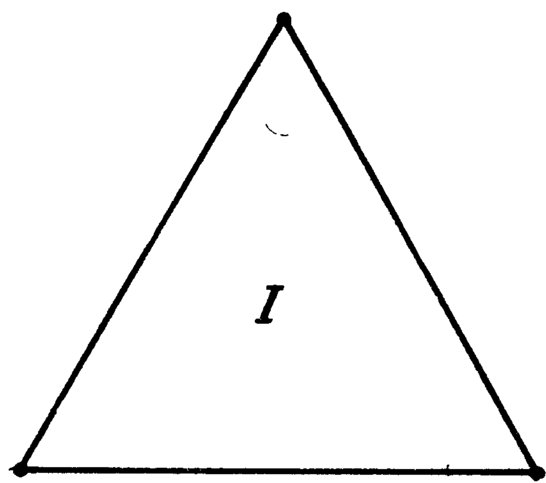


Рис. 36.

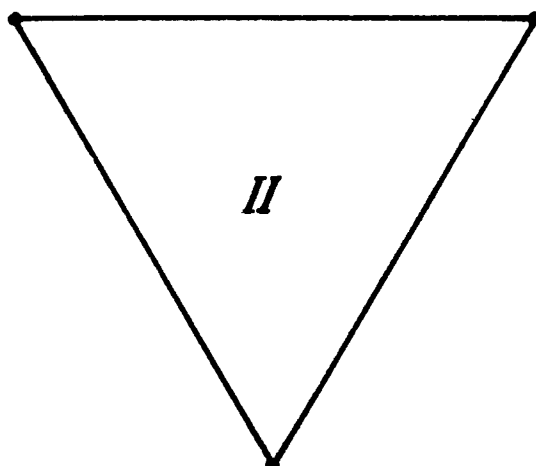


Рис. 37.



Рис. 38.

**32.2.2.** Рассмотрим теперь случай (а) из п. 32.1.4. В этом случае все элементы множества **V** лежат на горизонтальной прямой $l$. На основании (32:5) никакие две точки прямой $l$ не доминируют друг друга, так что никакая точка на $l$ не доминируется множеством **V**. Следовательно, каждая точка прямой $l$ (в фундаментальном треугольнике) должна принадлежать множеству **V**. Другими словами, множество **V** является в точности той частью прямой $l$, которая находится в фундаментальном треугольнике. Таким образом, элементы $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ множества **V** характеризуются уравнением

$$(32{:}7)\qquad \alpha_1 = c.$$

[1]) Это приводит к примеру из п. 30.3.6. Три вершины треугольника *I* не доминируют друг друга, т. е. они образуют удовлетворяющее множество в указанном выше смысле. Тем не менее они не являются подходящими в качестве подмножества решения.

Графическое изображение см. на рис. 40.

Сравнение рис. 40 с рис. 33 или 34 показывает, что прямая $l$ не доминирует заштрихованную на рис. 40 область. Следовательно, прямая $l$ должна быть помещена в фундаментальном треугольнике таким образом,



Рис. 39.

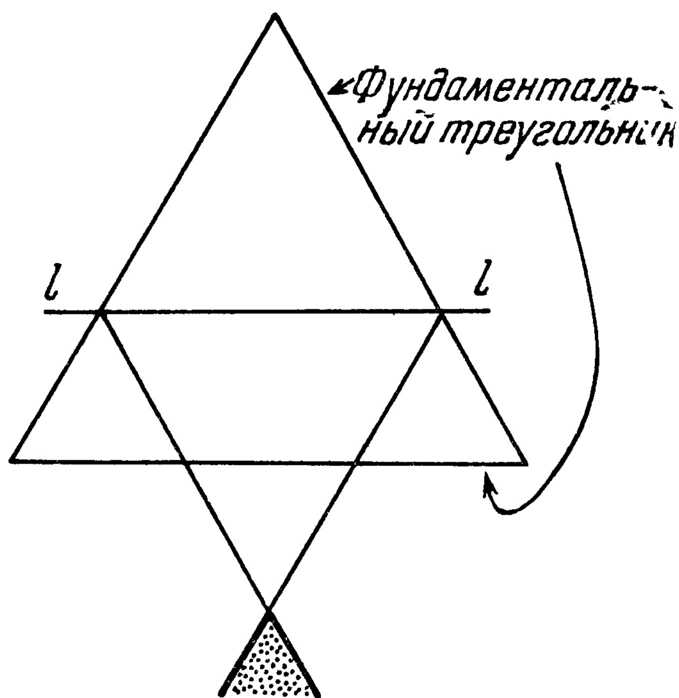


Рис. 40.

чтобы выделенная область оказалась целиком вне фундаментального треугольника. Это означает, что прямая $l$ должна лежать ниже средних точек тех двух сторон фундаментального треугольника, которые она пересекает [1]). В обозначениях (32:7) $c < 1/2$. С другой стороны, чтобы прямая $l$ вообще пересекала фундаментальный треугольник, должно быть $c \geqq -1$; таким образом, мы имеем:

(32:8) $$-1 \leqq c < 1/2.$$

Сравнение рис. 40 с рис. 33 или 34 показывает, что при таких условиях [2]) множество $\mathbf{V}$, т. е. прямая $l$, действительно является решением. Но представление (32:7) этого решения было получено при помощи подходящей перестановки чисел 1, 2, 3. Следовательно, мы имеем еще два решения, соответственно характеризуемых равенствами

(32:7*) $$a_2 = c,$$

(32:7**) $$a_3 = c,$$

причем всегда вместе со свойством (32:8).

**32.2.3.** Резюмируем полученные результаты.

Вот полный список решений:

(32:A) Для каждого $c$, удовлетворяющего условию (32:8), три множества (32:7), (32:7*), (32:7**).

(32:B) Множество (32:6).

---

[1]) Предельное положение прямой $l$, когда она проходит через сами средние точки, должно быть исключено. Причина состоит в том, что в таком положении вершина заштрихованной области лежала бы на фундаментальном треугольнике, а это недопустимо, поскольку эта точка также не доминируется множеством $\mathbf{V}$, т. е. прямой $l$.

Отметим, что в случае (b), т. е. для заштрихованных областей на рис. 38, аналогичного запрещения не существует. Вершины заштрихованных областей также не доминировались множеством $\mathbf{V}$, но они принадлежали множеству $\mathbf{V}$. С другой стороны, в данном случае рассматриваемая вершина не принадлежит $\mathbf{V}$, т. е. прямой $l$. Это исключение предельного положения влечет знак $<$, а не $\leqq$ в последующем неравенстве.

[2]) При (32:8), т. е. прямая $l$ пересекает фундаментальный треугольник, но ниже его середины.

# § 33. ВЫВОДЫ

## 33.1. Множественность решений. Дискриминация и ее смысл

**33.1.1.** Результат в § 32 требует более тщательных рассмотрений и толкований. Мы нашли все решения существенной игры трех лиц с нулевой суммой. В п. 29.1, до того как были сформулированы точные определения в п. 30.1, мы уже установили, какое решение нам желательно, и это решение появилось теперь в виде решения (32:B). Однако, кроме того, мы нашли и другие решения: решения (32:A), которых имеется бесконечное множество и каждое из которых само является бесконечным множеством дележей. Что означают эти дополнительные решения?

Рассмотрим, например, вид (32:7) решения (32:A). Для каждого $c$ при ограничениях (32:8) существует решение такого вида, состоящее из всех дележей $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, которые удовлетворяют условию (32:7), т. е. $\alpha_1 = c$. Кроме того, они должны удовлетворять лишь требованиям (30:1) и (30:2) из п. 30.1.1, т. е. (32:2) и (32:3) из п. 32.1.1. Другими словами, наше решение состоит из всех дележей

(33:1) $$\vec{\alpha} = \{c,\ a,\ -c-a\},\quad -1 \leqq a \leqq 1-c.$$

Интерпретация этого решения состоит, очевидно, в следующем. Один из игроков (в данном случае 1) дискриминируется двумя другими (в данном случае 2 и 3). Они *назначают* ему выигрыш $c$, который тот получает. Этот выигрыш является одним и тем же для всех дележей решения, т. е. принятой нормы поведения. Место игрока 1 в объединении предписывается двумя другими игроками; он исключается из всех переговоров, которые могут привести к коалициям. Такие переговоры происходят далее, однако, между двумя другими игроками, и распределение их доли, — $c$, полностью зависит от их способности торговаться. Решение, т. е. принятая норма поведения, не налагает абсолютно никаких ограничений на способ, каким они делят эту долю между собой: оно выражается в виде $a$, $-c-a$ [1]). Это и не удивительно. Поскольку на исключенного игрока наложено абсолютное «табу», с каждого участника коалиции снимается угроза измены партнера. Не существует способа найти какое-нибудь определенное разделение прибылей [2, 3]).

Между прочим, весьма поучительно посмотреть, как наше понятие решения в смысле множества дележей может учесть также и эту ситуацию.

**33.1.2.** Следует ещё кое-что сказать о «дискриминации» какого-либо игрока.

Во-первых, она совершается не совсем произвольным образом. Величина $c$, в которой дискриминация находит свое количественное выражение, ограничена интервалом (32:8) из п. 32.2.2. Смысл неравенства $c \geqq -1$ из (32:8) достаточно ясен, но смысл другого неравенства $c < 1/2$ [4]) значи-

---

[1]) За исключением того, что обе эти величины должны быть $\geqq -1$, т. е. того, что игрок может получить сам, без всякой помощи извне. Условие $a$, $-c-a \geqq -1$ есть, конечно, то же самое, что и $-1 \leqq a \leqq 1-c$ из (33:1).

[2]) См. рассуждение в конце п. 25.2. Отметим, что аргументы, которые мы привели там, чтобы объяснить первостепенное значение функции v $(S)$, перестали действовать в этом частном случае,— а функция v $(S)$ тем не менее определяет решения!

[3]) Отметим, что благодаря условию (32:8) из п. 32.2.2 «прибыль», т. е. величина $-c$, может быть как положительной, так и отрицательной.

[4]) И то, что знак «=» исключен в $c < 1/2$, но не исключен в $c \geqq -1$.

тельно менее понятен (см., однако, ниже). Все это сводится к следующему. Даже произвольная система дискриминаций может быть совместима с устойчивой нормой поведения — т. е. с принятым порядком общества, — но она, возможно, должна удовлетворять некоторым количественным условиям, чтобы она не смогла нарушить эту устойчивость.

Во-вторых, эта дискриминация не должна быть несомненно неблагоприятной для игрока, который ей подвергается. Она не может быть, несомненно благоприятной, т. е. фиксированное ее значение $c$ не может быть равно или быть лучше, чем то наилучшее, что могут ожидать остальные. На основании (33:1) это означало бы, что $c \geqq 1 - c$, т. е. $c \geqq 1/2$, что как раз запрещается условием (32:8). Но дискриминация была бы несомненно неблагоприятной лишь при $c = -1$; это одно из возможных значений $c$ (вследствие (32:8)), но отнюдь не единственное. $c = -1$ означает, что игрок не только исключается, но и эксплуатируется на все 100%. Остальные значения $c$ (из (32:8)), $-1 < c < 1/2$, соответствуют постепенно менее и менее неблагоприятным формам сегрегации.

**33.1.3.** Представляется замечательным тот факт, что наше понятие решения способно выразить все эти нюансы недискриминирующей (32:B) и дискриминирующей (32:A) норм поведения, причем последняя — как в своей стопроцентно несправедливой форме (при $c = -1$), так и в форме непрерывного семейства все меньших и меньших несправедливостей (при $-1 < c < 1/2$). Особенно существенно то, что ничего подобного мы не ожидали; эвристические рассуждения в п. 29.1 проводились, конечно, не в таком духе, но, несмотря на это, сама строгая теория привела нас к таким результатам. И эта ситуация возникает даже в рамках исключительно простой игры трех лиц с нулевой суммой!

При $n \geqq 4$ следует ожидать гораздо большего обилия возможностей для всех видов систем дискриминации, предубеждений, привилегий и т. д. Кроме того, мы всегда должны внимательно искать аналоги решения (32:B), т. е. недискриминирующие, «объективные» решения. Но мы увидим, что соответствующие условия далеко не просты. Кроме того, мы увидим также, что именно исследование дискриминирующих, «необъективных» решений ведет к подлинному пониманию общих игр с ненулевой суммой, а следовательно, и к применению их в экономике.

### 33.2. Статика и динамика

**33.2.** Теперь может оказаться полезным вспомнить рассуждения п. 4.8.2, относящиеся к статике и динамике. То, что мы говорили тогда, применяется теперь; на самом деле это и имелось в виду для той стадии развития нашей теории, которой она теперь достигла.

В п. 29.2 и в других упомянутых там разделах рассматривались переговоры, надежды и опасения, которые предшествуют образованию коалиции и которые определяют ее условия. Все это носило квазидинамический характер, описанный в п. 4.8.2. То же самое применяется к рассуждениям п. 4.6, а также п. 30.2 о том, как различные дележи могут или не могут доминировать друг друга в зависимости от их положения относительно решения; другими словами, как действия, принятые установившейся нормой поведения, не вступают в конфликт друг с другом, но могут быть использованы, чтобы дискредитировать непринятые множества действий.

Оправдание, а также и необходимость использования таких рассмотрений в статической теории были уже изложены. Поэтому нет нужды в их повторении здесь.

*Глава VII*

# ИГРЫ ЧЕТЫРЕХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

## § 34. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ОБЗОР

### 34.1. Общая точка зрения

**34.1.** Теперь мы располагаем общей теорией игр $n$ лиц с нулевой суммой, но состояние нашей информации все еще далеко от удовлетворительного. За исключением формального изложения определений, мы мало проникли вглубь. Рассмотренные приложения, т. е. частные случаи, в которых нам удалось определить решения, можно оценить только как предварительную ориентировку. Как отмечалось в п. 30.4.2, эти приложения покрывают все случаи $n \leqq 3$, но из наших предыдущих обсуждений мы знаем, сколь мало это по сравнению с общей проблемой. Таким образом, мы должны обратиться к играм, для которых $n \geqq 4$, и именно здесь можно ожидать проявления всей сложности взаимоотношения коалиций. Более глубокое понимание природы наших задач будет достигнуто только после того, как мы изучим механизмы, управляющие этими явлениями.

Настоящая глава посвящена играм четырех лиц с нулевой суммой. В нашей информации об этих играх еще имеется много пробелов. Это вынуждает проводить неполное и преимущественно казуистическое рассмотрение с его очевидными недостатками [1]). Но даже такое несовершенное изложение обнаружит различные существенные качественные черты общей теории, которые нельзя было встретить раньше (в случае $n \leqq 3$). В самом деле, как выяснится, интерпретация математических результатов этих игр вполне естественно приводит к конкретным «социальным» понятиям и формулировкам.

### 34.2. Формализация существенной игры четырех лиц с нулевой суммой

**34.2.1.** Для того чтобы составить представление о природе игр четырех лиц с нулевой суммой, мы начнем с чисто описательной классификации.

Итак, пусть дана произвольная игра четырех лиц с нулевой суммой Γ, которую мы с таким же успехом можем рассматривать в ее редуцированной форме; пусть выбрано $\gamma = 1$ [2]). Эти высказывания соответствуют, как мы знаем из (27.7*) и (27.7**) в п. 27.2, следующим утверждениям, касающимся характеристических функций:

$$\text{(34:1)} \qquad \mathrm{v}(S) = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \text{ если } S \text{ имеет } \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \text{ элементов.}$$

---

[1]) Например, делается, значительный упор на эвристические схемы.

[2]) См. пп. 27.1.4 и 27.3.2. Читатель заметит аналогию между этим обсуждением и обсуждением в п. 29.1.2, касающимся игры трех лиц с нулевой суммой. Подробнее об этом будет сказано ниже.

Таким образом, при выбранном нормировании значение v ($S$) остается неопределенным только для двухэлементных множеств $S$. Обратим поэтому наше внимание на эти множества.

Множество $I = (1, 2, 3, 4)$ всех игроков имеет шесть двухэлементных подмножеств:

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4).$$

Значения v ($S$) на этих множествах нельзя рассматривать как независимые переменные, так как для каждого из таких множеств $S$ в этой же последовательности имеется дополнение. Именно, первое и последнее, второе и пятое, третье и четвертое соответственно дополняют друг друга. Поэтому их значения v ($S$) отличаются только знаком. Следует также вспомнить, что на основании неравенства (27:7) в п. 27.2 (с $n = 4$, $p = 2$) $-2 \leqq \mathrm{v}(S) \leqq 2$. Следовательно, если мы положим

(34:2) $$\begin{cases} \mathrm{v}((1, 4)) = 2x_1, \\ \mathrm{v}((2, 4)) = 2x_2, \\ \mathrm{v}((3, 4)) = 2x_3, \end{cases}$$

то будем иметь

(34:3) $$\begin{cases} \mathrm{v}((2, 3)) = -2x_1, \\ \mathrm{v}((1, 3)) = -2x_2, \\ \mathrm{v}((1, 2)) = -2x_3 \end{cases}$$

и, кроме того,

(34:4) $$-1 \leqq x_1,\ x_2,\ x_3 \leqq 1.$$

Обратно: если даны любые три числа $x_1$, $x_2$, $x_3$, удовлетворяющие (34:4), то мы можем определить функцию v ($S$) (для всех подмножеств $S$ из $I = (1, 2, 3, 4)$) по (34:1) — (34:3); однако мы должны еще показать, что эта функция v ($S$) является характеристической функцией игры. Согласно п. 26.1 это означает, что наше представление v ($S$) удовлетворяет условиям (25:3:a) — (25:3:c) из п. 25.3.1. В данном случае условия (25:3:a) и (25:3:b), очевидно, выполнены, так что остается проверить только условие (25:3:c). Из п. 25.4.2 следует, что нужно показать, что

$$\mathrm{v}(S_1) + \mathrm{v}(S_2) + \mathrm{v}(S_3) \leqq 0,$$

если $S_1$, $S_2$, $S_3$ является разложением $I$. (См. также (25:6) в п. 25.4.1.) Если какое-нибудь из множеств $S_1$, $S_2$, $S_3$ пусто, то два других являются взаимными дополнениями, и потому в условиях (25:3:a), (25:3:b) из п. 25.3.1 мы имеем равенство. Поэтому мы можем предполагать, что ни одно из множеств $S_1$, $S_2$, $S_3$ не пусто. Так как всего в нашем распоряжении имеется четыре элемента, одно из множеств, скажем $S_1 = S$, должно иметь два элемента, а два остальных являются одноэлементными. Таким образом, наше неравенство принимает вид

$$\mathrm{v}(S) - 2 \leqq 0, \quad \text{т. е.} \quad \mathrm{v}(S) \leqq 2.$$

Если мы запишем это неравенство для всех двухэлементных множеств $S$, то (34:2), (34:3) преобразуют его в следующие:

$$2x_1 \leqq 2, \qquad 2x_2 \leqq 2, \qquad 2x_3 \leqq 2,$$
$$-2x_1 \leqq 2, \qquad -2x_2 \leqq 2, \qquad -2x_3 \leqq 2,$$

что эквивалентно предположению (34:4). Таким образом, нами доказано следующее.

(34:A) Существенные игры четырех лиц с нулевой суммой (в их редуцированной форме при выборе $\gamma = 1$) в точности соответствуют тройкам чисел $x_1$, $x_2$, $x_3$, удовлетворяющих неравенствам (34:4). Это соответствие между игрой, т. е. ее характеристической функцией, и числами $x_1$, $x_2$, $x_3$ описывается уравнениями (34:1) — (34:3) [1]).

**34.2.2.** Проведенное выше представление существенной игры четырех лиц с нулевой суммой тройками чисел $x_1$, $x_2$, $x_3$ можно проиллюстрировать простым геометрическим рисунком. Мы можем рассматривать $x_1$, $x_2$, $x_3$ как декартовы координаты некоторой точки [2]). В этом случае неравенства (34:4) описывают часть пространства, точно заполняющую куб $Q$. Этот куб имеет центр в начале координат, а длина ребер равна 2, потому что шестью его гранями являются шесть плоскостей

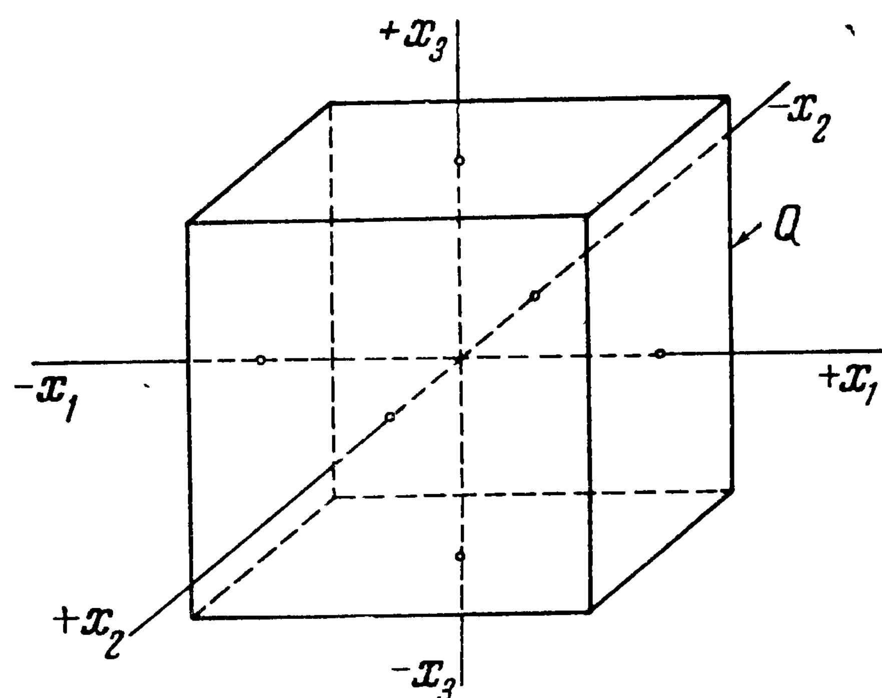


Рис. 41.

$$x_1 = \pm 1, \quad x_2 = \pm 1, \quad x_3 = \pm 1,$$

как это показано на рис. 41.

Таким образом, каждая существенная игра Г четырех лиц с нулевой суммой описывается ровно одной точкой внутри этого куба или на его поверхности, и наоборот. Представляется полезным именно так рассматривать эти игры и пытаться связывать их особенности с геометрическими условиями в $Q$. Особенно поучительным будет выделение игр, соответствующих тем или иным особенным точкам из $Q$.

Но перед тем, как приступить к осуществлению этой программы, мы рассмотрим некоторые вопросы симметрии. Мы хотим обнаружить связи между подстановками игроков 1, 2, 3, 4 и геометрическими преобразованиями (движениями) куба $Q$. В самом деле, согласно п. 28.1 подстановки соответствуют симметриям игры Г, а преобразования куба, очевидно, выражают симметрии геометрического объекта.

## 34.3. Перестановки игроков

**34.3.1.** При рассмотрении геометрического представления существенной игры четырех лиц с нулевой суммой нам пришлось ввести несколько произвольную операцию, т. е. операцию, которая частично нарушает симметрию исходной ситуации. В самом деле, описывая значения v $(S)$ на двухэлементных множествах $S$, мы должны были выбрать три этих множества (которых всего шесть), чтобы получить координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$. Мы так и сделали в (34:2) и (34:3), приписывая игроку 4 особую роль и устанавливая затем соответствие между игроками 1, 2, 3 и величинами $x_1$, $x_2$, $x_3$ (см. (34:2)). Таким образом, перестановка игроков 1, 2, 3 будет индуцировать такую же перестановку координат $x_1$, $x_2$, $x_3$, и в этих пределах система симметрична. Но таких перестановок только 6 из общего

[1]) Читатель может теперь сравнить наш результат с результатом п. 29.1.2, касающимся игр трех лиц с нулевой суммой. Можно заметить, как выросло разнообразие возможностей.

[2]) Мы можем также рассматривать эти числа как компоненты вектора в $L_3$ в смысле п. 16.1.2 и след. Такой подход иногда будет удобнее, как в замечании на стр. 319.

числа 24 всех перестановок игроков 1, 2, 3, 4 [1]. Поэтому подстановку, которая заменяет игрока 4 на другого, представить таким способом нельзя.

**34.3.2.** Рассмотрим одну из таких подстановок. По причинам, которые выяснятся немедленно, рассмотрим подстановку $A$, меняющую местами игроков 1 и 4, а также 2 и 3 [2]. Из уравнений (34:2) и (34:3) сразу следует, что эта подстановка не изменяет $x_1$, а $x_2$ и $x_3$ заменяются на $-x_2$, $-x_3$. Аналогично проверяется, что подстановка $B$, меняющая местами 2 и 4, а также 1 и 3, не изменяет $x_2$ и заменяет $x_1$, $x_3$ на $-x_1$, $-x_3$. Наконец, подстановка $C$, меняющая местами 3 и 4, а также 1 и 2, не изменяет $x_3$ и заменяет $x_1$, $x_2$ на $-x_1$, $-x_2$.

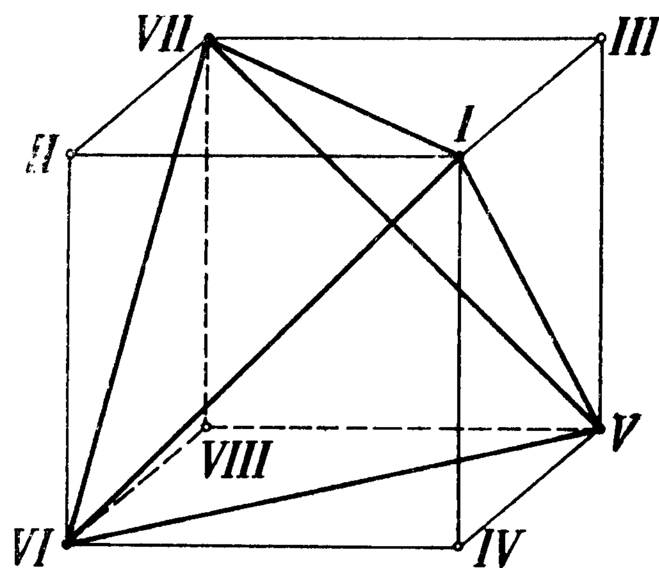



Рис. 42.

Таким образом, каждая из трех подстановок $A$, $B$, $C$ воздействует только на знаки переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, причем каждая изменяет ровно два знака, сохраняя третий. Так как эти подстановки заменяют 4 соответственно на 1, 2, 3, они при комбинировании их с шестью перестановками игроков 1, 2, 3 охватывают все перестановки игроков 1, 2, 3, 4. Теперь мы видим, что перестановки игроков 1, 2, 3 соответствуют шести перестановкам $x_1$, $x_2$, $x_3$ (без изменения знака). Следовательно 24 перестановки 1, 2, 3, 4 соответствуют шести перестановкам $x_1$, $x_2$, $x_3$, причем каждая из них либо не меняет знаков, либо меняет ровно два [3].

**34.3.3.** Мы можем также сформулировать это следующим образом. Если мы рассматриваем все движения в пространстве, переводящие куб в себя, то легко проверить, что они состоят из подстановок координатных осей $x_1$, $x_2$, $x_3$ в комбинации с некоторыми отражениями координатных плоскостей (т. е. плоскостей $x_2$, $x_3$; $x_1$, $x_3$; $x_1$, $x_2$). Математически — это перестановки $x_1$, $x_2$, $x_3$ в комбинации с некоторыми изменениями знаков $x_1$, $x_2$, $x_3$. Всего существует 48 таких возможностей [4]. Только половина из них, те 24, для которых число перемен знаков четно (т. е. 0 или 2), соответствует перестановкам игроков.

Легко проверить, что эти 24 возможности соответствуют не только преобразованиям куба $Q$ в себя, но также, как показано на рис. 42, и тетраэдра $I$, $V$, $VI$, $VII$. Такое движение можно также охарактеризовать, замечая, что оно всегда переводит вершину куба $Q$, обозначенную черной точкой, в вершину, обозначенную черной точкой, и вершину, обозначенную светлой точкой, в вершину, обозначенную светлой точкой, но не переводит черную точку в светлую [5].

---

[1]) См. определения (28:A:a), (28:A:b) в пп. 28.1.1.

[2]) В обозначениях п. 29.1

$$A=\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 4, 3, 2, 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 3, 4, 1, 2\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 2, 1, 4, 3\end{pmatrix}.$$

[3]) Возможностей для таких изменений знаков в каждом случае имеется $1 + 3 = 4$, так что мы имеем $6 \times 4 = 24$ операции на $x_1$, $x_2$, $x_3$ для представления каждой из 24 перестановок 1, 2, 3, 4 — как это и должно быть.

[4]) Для каждой из переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$ имеются две возможности: изменить знак или нет. Это дает $2^3 = 8$ возможностей. Комбинация с шестью перестановками $x_1$, $x_2$, $x_3$ приводит к $8 \times 6 = 48$ операциям.

[5]) Данная группа движений хорошо известна в теории групп и особенно в кристаллографии, но мы далее не будем развивать этот подход.

## § 35. ОБСУЖДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТОЧЕК КУБА $Q$

### 35.1. Вершина I (и V, VI, VII)

**35.1.1.** Мы начнем с определения игр, соответствующих четырем вершинам, обозначенным черными точками: *I*, *V*, *VI*, *VII*. Мы видели, что эти вершины получаются одна из другой соответствующими перестановками игроков 1, 2, 3, 4. Следовательно, достаточно рассмотреть одну из них, скажем вершину *I*.

Точка *I* соответствует значениям 1, 1, 1 координат $x_1$, $x_2$, $x_3$. Таким образом характеристическая функция этой игры $\mathrm{v}(S)$ равна

(35:1)
$$\mathrm{v}(S)=\begin{cases}0\\-1\\2\\ \\-2\\ \\1\\0\end{cases}\text{если } S \text{ имеет элементов}\begin{cases}0\\1\\2 \text{ (и игрок 4 принадлежит } S)\\ \\2 \text{ (и игрок 4 не принадлежит } S)\\ \\3\\4\end{cases}$$

(проверка осуществляется непосредственно с помощью (34:1), (34:2), (34:3) в п. 34.2.1).

Вместо того чтобы применить к этой игре математическую теорию гл. VI, посмотрим сначала, не допускает ли она непосредственную интуитивную интерпретацию.

Заметим сначала, что игрок, предоставленный самому себе, проигрывает 1. Для него это, очевидно, самый плохой случай, так как он может гарантировать себя от дальнейших проигрышей без чьей либо помощи [1]). Таким образом, мы можем рассматривать игрока, получающего выигрыш —1, как проигрывающего. Коалиция из двух игроков может считаться проигрывающей, если она получает выигрыш —2, так как тогда каждый ее игрок должен обязательно получить —1 [2, 3]). В этой игре коалиция любых двух игроков, если она не включает игрока 4, является проигрывающей в этом смысле.

Перейдем теперь к рассмотрению дополнительных множеств. Если коалиция является в указанном выше смысле проигрывающей, то дополнительное к ней множество естественно считать выигрывающей коалицией. Следовательно, двухэлементные множества, содержащие игрока 4, должны расцениваться как выигрывающие коалиции. Аналогично коалиция из трех игроков всегда выигрывает, так как любой изолированный игрок должен расцениваться как проигрывающий. Это несущественно для тех трехэлементных коалиций, которые содержат игрока 4, так как в таких коалициях выигрывают уже два члена, если только игрок 4 нахо-

---

[1]) Этот подход подтверждается и нашими результатами, касающимися игры трех лиц в § 23 и п. 33.2, и более глубоко — определением дележа в п. 30.1.1 (см. в особенности условие (30:1)).

[2]) Так как ни игрок, ни его партнер не должны получить меньше чем —1 и они вместе получают —2, это единственный возможный способ разделения выигрыша.

[3]) В терминологии п. 31.1.4 это линейная коалиция. Конечно, выигрыша от объединения игроки не получают, и потому нет причин для них составлять такую коалицию. Но если окажется, что объединившиеся два других игрока не обнаруживают намерения присоединить к себе третьего, то и в этом случае мы можем рассматривать остающихся двух игроков как коалицию.

дится среди них. Однако существенно, что (1, 2, 3) является выигрывающей коалицией, хотя все ее собственные подмножества проигрывают.

Замечание. Мы предупреждаем читателя, что, хотя мы использовали слова «проигрывающий» и «выигрывающий» почти как *технические термины*, это не входило в наши намерения. Фактически эти понятия очень хорошо приспособлены для точного рассмотрения. «Проигрывающие» и «выигрывающие» коалиции действительно совпадают с теми множествами $S$, которые были рассмотрены в (31:F) и в (31:G) из п. 31.1.5; именно они совпадают с теми коалициями, для которых соответственно либо $S$, либо $-S$ было линейным. Однако мы будем рассматривать этот вопрос таким способом только в гл. X.

В настоящий момент наши рассуждения абсолютно эвристичны и должны восприниматься в том же духе, что и эвристические обсуждения игр трех лиц с нулевой суммой в §§ 21, 22. Единственное отличие состоит здесь в том, что мы будем теперь значительно более краткими, так как наш опыт и методика существенно возросли в результате проведенных рассуждений.

Так как мы сейчас уже располагаем точной теорией решений игр, мы обязаны после этого предварительного эвристического анализа дать точный анализ, строго основанный на математической теории. Мы к этому придем (см. сноску 3 на предыдущей стр. и также начало п. 36.2.3).

**35.1.2.** Таким образом, правдоподобно понимать сказанное как борьбу за участие в любой из различных возможных коалиций:

(35:2) $$(1, 4),\ (2, 4),\ (3, 4),\ (1, 2, 3),$$

где получаемые коалициями выигрыши равны

(35:3) $$\mathrm{v}((1, 4)) = \mathrm{v}((2, 4)) = \mathrm{v}((3, 4)) = 2,\quad \mathrm{v}((1, 2, 3)) = 1.$$

Заметим, что все это очень похоже на ситуацию, которую мы получили в существенной игре трех лиц с нулевой суммой, где выигрывающими коалициями были

(35:2*) $$(1, 2),\ (1, 3),\ (2, 3)$$

и выигрыши, получаемые этими коалициями, были равны

(35:3*) $$\mathrm{v}((1, 2)) = \mathrm{v}((1, 3)) = \mathrm{v}((2, 3)) = 1.$$

В игре трех лиц мы определили распределение дохода (35:3*) между выигравшими участниками при помощи следующего предположения: игрок из выигрывающей коалиции, должен получать один и тот же выигрыш независимо от того, в какой выигрывающей коалиции он находится. Обозначим через $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ соответственно величины, которые получает каждый из игроков 1, 2, 3, 4, если ему удается попасть в выигрывающую коалицию. Тогда равенства (35:3) дают нам

(35:4) $$\alpha+\delta=\beta+\delta=\gamma+\delta=2,\quad \alpha+\beta+\gamma=1,$$

откуда следует

(35:5) $$\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3},\quad \delta=\frac{5}{3}.$$

Здесь можно повторить все эвристические аргументы, использованные §§ 21, 22 для случая игры трех лиц [1]).

**35.1.3.** Подведем итоги.

(35:A) Мы имеем дело с игрой, в которой игрок 4 находится в особо благоприятном положении: присоединения к нему любого игрока достаточно для него, чтобы образовать выигрывающую коалицию. С другой стороны, без кооперации с ним должны объединяться

[1]) Конечно, не делая этого посредством строгого обсуждения на основе п. 30.1.

три игрока. Это преимущество выражается также посредством выигрышей, которые должен получить каждый из игроков 1, 2, 3, 4, когда он находится среди выигрывающих,— если можно довериться нашей эвристической дедукции. Эти выигрыши равны соответственно 1/3, 1/3, 1/3, 5/3. Следует заметить, что преимущество игрока 4 относится только к случаю победы; при поражении все игроки находятся в одинаковом положении (т. е. получают —1).

Обстоятельство, упомянутое последним, конечно, обусловлено нашим нормированием посредством редуцирования. Однако независимо ни от какого нормирования эта игра имеет следующую особенность: количественное преимущество одного игрока над другим, когда оба они выигрывают, может отличаться от того преимущества, когда оба они проигрывают.

Этого не может случиться в игре трех лиц, что ясно из формулировки, составляющей п. 22.3.4. Таким образом, мы впервые обнаруживаем важную новую особенность, возникающую, когда число участников достигает четырех.

**35.1.4.** Еще одно замечание, которое представляется существенным. В рассмотренной игре стратегическое преимущество четвертого игрока состояло в том, что ему для победы достаточно было только одного союзника, в то время как без него необходим союз из трех партнеров. Можно было бы даже попытаться построить еще более резкую форму игры, при которой проигрывает любая коалиция, не содержащая игрока 4. Существенно отдать себе отчет в том, что это ничего не дает, так как такое преимущество уже не имеет стратегической природы. В самом деле, в такой игре должно быть

$$\mathrm{v}(S)=\begin{cases}0\\-1\\-2\\-3\end{cases}\text{ если } S \text{ имеет }\begin{cases}0\\1\\2\\3\end{cases}\text{ элементов и игрок 4 не принадлежит } S,$$

следовательно,

$$\mathrm{v}(S)=\begin{cases}3\\2\\1\\0\end{cases}\text{ если } S \text{ имеет }\begin{cases}1\\2\\3\\4\end{cases}\text{ элементов и игрок 4 принадлежит } S.$$

Эта игра не является редуцированной, так как

$$\mathrm{v}((1))=\mathrm{v}((2))=\mathrm{v}((3))=-1, \quad \mathrm{v}((4))=3.$$

Если мы применим процесс редуцирования из п. 27.1.4 к этой $\mathrm{v}(S)$, то найдем, что ее редуцированная форма будет $\bar{\mathrm{v}}(S)\equiv 0$, т. е. игра оказывается несущественной. (Это можно увидеть сразу по (27:B) из п. 27.4.) Таким образом, эта игра имеет однозначно определенное значение для каждого игрока 1, 2, 3, 4; оно равно соответственно —1, —1, —1, 3.

Другими словами, преимущество игрока 4 в этой игре является преимуществом в фиксированном платеже (т. е. в деньгах), а не в его стратегических возможностях. Первая формулировка, конечно, более определенна и ясна, чем вторая, но теоретически менее интересна, так как к ней нельзя применить наш процесс редуцирования.

**35.1.5.** В начале этого параграфа мы заметили, что вершины *V*, *VI*, *VII* отличаются от вершины *I* только перестановкой игроков. Легко проверить, что особая роль игрока 4 в *I* заменяется игроками 1, 2, 3 соответственно в вершинах *V*, *VI*, *VII*.

## 35.2. Вершина *VIII* (и *II*, *III*, *IV*). Игра трех лиц и «болвана»

**35.2.1.** Рассмотрим теперь игры, соответствующие четырем вершинам *II*, *III*, *IV*, *VIII*, обозначенным светлыми точками. Так как они получаются друг из друга подходящей подстановкой игроков 1, 2, 3, 4, достаточно рассмотреть одну из них, например *VIII*.

Точка *VIII* соответствует значениям —1, —1, —1 координат $x_1$, $x_2$, $x_3$. Таким образом, характеристической функцией этой игры $\mathrm{v}(S)$ будет

$$(35{:}6)\qquad \mathrm{v}(S)=\begin{cases} 0 \\ -1 \\ -2 \\ \\ 2 \\ \\ 1 \\ 0 \end{cases} \text{если } S \text{ имеет элементов } \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \text{ (и игрок 4 принадлежит } S) \\ \\ 2 \text{ (и игрок 4 не принадлежит } S) \\ \\ 3 \\ 4 \end{cases}$$

(проверка осуществляется непосредственно с помощью (34:1), (34:2), (34:3) из п. 34.2.1). Снова вместо применения к этой игре математической теории гл. VI посмотрим сначала, не допускает ли она непосредственную интуитивную интерпретацию.

Важная черта этой игры состоит в том, что неравенство (25:3:c) в п. 25.3 превращается в равенство, т. е.

$$(35{:}7)\qquad \mathrm{v}(S \cup T)=\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T), \quad \text{если} \quad S \cap T=\varnothing$$

при $T = (4)$. Это означает следующее. Если $S$ представляет собой коалицию, не содержащую игрока 4, то добавление игрока 4 к этой коалиции не дает ей преимущества, т. е. оно никак не влияет на стратегическое положение ни этой коалиции, ни ее противников. В этом и состоит смысл аддитивности, выраженной в (35:7).

Замечание. Заметим, что безразличие в отношении присоединения к коалиции игрока 4 выражается именно формулой (35:7), но не равенством

$$\mathrm{v}(S \cup T) = \mathrm{v}(S).$$

Это означает, что игрок «безразличен» как партнер не тогда, когда его добавление не изменяет выигрыша коалиции, а тогда, когда он добавляет в коалицию ровно ту величину (и не больше), которой он «стоит» сам по себе.

Это замечание может показаться тривиальным; однако существует некоторая опасность неверного понимания, особенно в нередуцированных играх, где $\mathrm{v}((4)) > 0$, т. е. где добавление игрока 4 (хотя стратегически и несущественное!) фактически увеличивает выигрыш коалиции. Заметим также, что безразличие $S$ и $T = (4)$ друг к другу является строго взаимным отношением.

**35.2.2.** Это обстоятельство приводит к следующему выводу, который, конечно, чисто эвристичен [1]). Так как добавление игрока 4 к любой

[1]) Впоследствии мы предпримем точное обсуждение на основе п. 30.1. Тогда же будет также найдено, что все такие игры являются частными случаями более общих довольно важных классов игр (см. гл. IX, особенно п. 41.2).

коалиции оказывается совершенно безразличным для обеих сторон, представляется правдоподобным предполагать, что игрок 4 не принимает участия в сделках, составляющих стратегию игры. Он изолирован от других, и величина, которую он может получить сам по себе, т. е. $\mathrm{v}(S) = -1$, действительно равна значению игры для него. С другой стороны, остальные игроки 1, 2, 3 могут играть игру только между собой, следовательно, они разыгрывают игру трех лиц. Значения первоначальной характеристической функции $\mathrm{v}(S)$, описывающие исходную игру трех лиц, равны

(35:6*)
$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{v}((\varnothing)) = 0, \\ &\mathrm{v}((1)) = \mathrm{v}((2)) = \mathrm{v}((3)) = -1, \\ &\mathrm{v}((1,2)) = \mathrm{v}((1,3)) = \mathrm{v}((2,3)) = 2, \\ &\mathrm{v}((1,2,3)) = 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} I' = (1, 2, 3) \text{ является теперь} \\ \text{множеством всех игроков.} \end{array}$$

(Проверить это по (35:6).)

На первый взгляд кажется странным, что значение $\mathrm{v}(I')$ (теперь $I'$ является множеством всех игроков!) отлично от нуля. Это, однако, вполне понятно: исключая игрока 4, мы приходим к игре с ненулевой суммой, так как мы предназначили для игрока 4 значение, равное $-1$, а остальные получают вместе величину 1. Мы все еще не занимаемся систематическим описанием этой ситуации (см. сноску 1 на стр. 315). Однако очевидно, что это условие можно обойти при помощи небольшого обобщения преобразования, использованного в п. 27.1. Мы модифицируем игру с игроками 1, 2, 3, предполагая, что каждый игрок заранее получает выигрыш, равный 1/3, и это компенсируется эквивалентным уменьшением значений $\mathrm{v}(S)$ в (35:6*). Так же, как и в.п. 27.1, это не может повлиять на стратегию игры, т. е. приводит к стратегически эквивалентной игре.

Замечание. В терминологии п. 27.1.1 $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \alpha_3^0 = -1/3$. Условием, которое мы здесь нарушили, является (27:1): $\sum_i \alpha_i^0 = 0$. Это неизбежно, так как мы начали с игры с ненулевой суммой. Условие $\sum_i \alpha_i^0 = 0$ как раз могло бы быть сохранено, если включить в рассмотрение игрока 4, полагая $\alpha_4^0 = 1$. Это оставило бы его, как и раньше, изолированным, но необходимая компенсация привела бы к тому, что $\mathrm{v}((4))$ стало бы равным 0, результаты чего очевидны. Резюмируя, можно сказать, что в данной ситуации редуцированная форма игры не является наилучшей основой для обсуждения всех стратегически эквивалентных форм.

После рассмотрения упомянутых выше компенсаций[1]) мы получаем новую характеристическую функцию:

(35:6**)
$$\begin{aligned} &\mathrm{v}'((\varnothing)) = 0, \\ &\mathrm{v}'((1)) = \mathrm{v}'((2)) = \mathrm{v}'((3)) = -\frac{4}{3}, \\ &\mathrm{v}'((1,2)) = \mathrm{v}'((1,3)) = \mathrm{v}'((2,3)) = \frac{4}{3}, \\ &\mathrm{v}'((1,2,3)) = 0. \end{aligned}$$

Она является редуцированной формой существенной игры трех лиц с нулевой суммой, обсужденной в § 32 (за исключением различия в единице измерения). Теперь мы имеем $\gamma = 4/3$ вместо $\gamma = 1$ из (32:1) в п. 32.1.1. Таким образом, мы можем применить эвристические результаты из

[1]) То есть вычитание величины 1/3 из $\mathrm{v}(S)$ столько раз, сколько элементов имеет $S$.

п. 23.1.3 или же строгие результаты из § 32 [1]). Во всяком случае, мы ограничимся решением, имеющим место в обоих случаях и являющимся простейшим; это решение (32:B) из п. 32.2.3. Оно является множеством дележей (32:6) из п. 32.2.1, которое мы должны умножить на имеющееся значение $\gamma = 4/3$, т. е.

$$\left\{\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \quad \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \quad \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right\}.$$

(Игроками здесь, конечно, будут 1, 2, 3.) Другими словами, цель стратегии игроков 1, 2, 3 — образовать какую-нибудь коалицию из двух; игрок, попадающий в нее, т. е. выигрывающий, получает 2/3; проигрывающий же игрок получает —4/3. Итак, каждый из игроков 1, 2, 3 нашей исходной игры получает выигрыш на 1/3 больше; следовательно, полученные выше величины 2/3, —4/3 нужно заменить на 1, —1.

**35.2.3.** Резюмируем:

(35:B) Это игра, в которой игрок 4 исключается из всех коалиций. Стратегическая цель остальных игроков 1, 2, 3 состоит в образовании какой-нибудь коалиции из двух игроков. Игрок 4 в любом случае получает —1. Каждый из остальных игроков 1, 2, 3 получает величину 1, если он находится среди выигрывающих, и —1, если он проигрывающий. Все это основано на эвристических рассмотрениях.

Можно было бы сказать более выразительно, что эта игра четырех лиц есть всего лишь «раздутая» игра трех лиц; именно, существенная игра трех лиц из игроков 1, 2, 3, расширенная добавлением «болвана» в лице игрока 4. Далее мы увидим, что эта концепция имеет более общее значение (см. сноску 1 на стр. 315).

**35.2.4.** Можно было бы сравнить роль «болвана» для игрока 4 в этой игре с исключением, которому подвергается игрок в дискриминирующем решении (32:A) в п. 32.2.3, как это обсуждалось в п. 33.1.2. Однако существует важное различие между этими двумя явлениями. При нашем настоящем подходе игрок 4 не имеет никаких оснований для участия в какой-либо коалиции вообще; он остается в стороне из-за характеристической функции v $(S)$. Наши эвристические рассмотрения показывают, что он должен быть исключен из всех коалиций во всех допустимых решениях. Мы увидим в п. 46.9, что точная теория устанавливает именно это. Исключенный игрок в дискриминирующем решении в случае п. 33.1.2 исключается только в конкретной рассматриваемой ситуации. Насколько показывает характеристическая функция этой игры, его роль не отличается от роли каждого из остальных игроков. Другими словами, «болван» в рассматриваемой нами игре исключается из-за объективных явлений ситуации (характеристической функции v$(S)$) [2]).

Исключенный игрок в дискриминирующем решении исключается только произвольными «предубеждениями», которые выражает особая норма поведения (решения).

В начале этого параграфа мы заметили, что вершины *II*, *III*, *IV* отличаются от *VIII* только перестановками игроков. Легко проверить, что особая роль игрока 4 в *VIII* отводится в *II*, *III*, *IV* соответственно игрокам 1, 2, 3.

---

[1]) Конечно, данное обсуждение эвристично во всех отношениях. Что касается строгого рассмотрения, см. сноску 1 на стр. 315.

[2]) Это—«физическая подоплека» в смысле п. 4.6.3.

### 35.3. Некоторые замечания, касающиеся внутренности $Q$

**35.3.1.** Рассмотрим теперь игру, соответствующую центру $Q$, т. е. значениям координат $x_1$, $x_2$, $x_3$, равным 0, 0, 0. Ясно, что эта игра не изменяется при любой подстановке игроков 1, 2, 3, 4, т. е. что она симметрична. Заметим, что это единственная из таких игр в $Q$, так как полная симметрия означает инвариантность при всех подстановках $x_1$, $x_2$, $x_3$ или изменениях знака любых двух из них (см. п. 34.3); следовательно, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Характеристическая функция этой игры $\mathrm{v}(S)$ равна

$$(35:8)\qquad \mathrm{v}(S) = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \text{если } S \text{ имеет } \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \text{элементов}$$ [1].

(Проверка производится непосредственно с помощью соотношений (34:1), (34:2), (34:3) из п. 34.2.1.) Точные решения этой игры многочисленны; приходится даже признать, что их разнообразие немного ошеломляет. Пока еще не удается упорядочить и систематизировать их последовательным применением имеющейся общей теории в такой мере, как хотелось бы. Тем не менее найденные примеры решений приводят к поучительному проникновению в различные ответвления теории. Мы рассмотрим их более детально в §§ 37 и 38.

Пока мы сделаем лишь следующее (эвристическое) замечание. Смысл этой полностью симметричной игры состоит, очевидно, в том, что любое большинство игроков (т. е. любая коалиция из трех) выигрывает, а в случае равных коалиций (т. е. когда образуются две коалиции, каждая из двух игроков) никаких выплат не производится.

**35.3.2.** Центр $Q$ представляет единственную (полностью) симметричную (т. е. относительно всех перестановок игроков 1, 2, 3, 4) игру в нашей постановке. Геометрическая картина указывает также на другую симметрию: по отношению ко всем перестановкам координат $x_1$, $x_2$, $x_3$. Следуя этим путем, мы выбираем точки $Q$, для которых

$$(35:9)\qquad x_1 = x_2 = x_3$$

и которые образуют *главную диагональ* $Q$, т. е. прямую

$$(35:10)\qquad I\text{-центр-}VIII.$$

В начале п. 34.3.1 мы видели, что эта симметрия означает в точности то, что игра инвариантна относительно всех перестановок игроков 1, 2, 3. Сформулируем это же другими словами.

Главная диагональ (35:9), (35:10) представляет все те игры, которые симметричны по отношению к игрокам 1, 2, 3, т. е. где особую роль может иметь только игрок 4.

Куб $Q$ имеет еще три главные диагонали ($II$-центр-$V$, $III$-центр-$VI$, $IV$-центр-$VII$), и они, очевидно, соответствуют играм, в которых один из остальных игроков (соответственно, 1, 2, 3) может иметь особую роль.

Вернемся к главной диагонали (35:9), (35:10). Три ранее рассмотренные игры ($I$, $VIII$, центр) лежат на ней; в действительности во всех этих играх только игрок 4 имел особую роль [2]. Заметим, что вся эта категория

[1] Это представление еще раз показывает, что игра симметрична и однозначно характеризуется этим свойством. См. анализ в п. 28.2.1.

[2] А в центре даже он не имел.

игр является однопараметрическим многообразием. Вследствие (35.9) такая игра характеризуется значением $x_1$, где

$$(35:11) \qquad -1 \leqq x_1 \leqq 1.$$

Три упомянутые игры соответствуют крайним значениям $x_1 = 1$, $x_1 = -1$ и среднему значению $x_1 = 0$. Для того чтобы продвинуться дальше в разработке общей теории, было бы желательно определить точные решения для всех этих значений $x_1$, а затем посмотреть, как изменяются эти решения при изменении $x_1$, если двигаться вдоль (35:10). Особенно интересно было бы выяснить, как качественно различные виды решений, соответствующие частным значениям $x_1 = 1$, 0, 1, переходят один в другой. В п. 36.3.2 мы дадим пояснения по поводу информации, уже имеющейся в этом обсуждении.

**35.3.3.** Другим интересным вопросом является следующий. Рассмотрим сначала игру, т. е. точку в $Q$, в которой мы можем интуитивно представить, каким там будет решение, например вершину *VIII*. Затем рассмотрим игру в непосредственной окрестности *VIII*, т. е. игру со слегка измененными значениями $x_1$, $x_2$, $x_3$. Теперь было бы желательным найти точные решения для этих соседних игр и посмотреть, в чем они отличаются от решений исходной игры, т. е. как малое изменение $x_1$, $x_2$, $x_3$ изменяет решение [1]). Частные случаи такой постановки вопроса будут рассмотрены в п. 36.1.2, в конце п. 37.1.1, а также в п. 38.2.7.

**35.3.4.** До сих пор мы рассматривали игры, которые представляются точками $Q$ более или менее частного вида [2]). Более общая, а возможно, и более типичная задача возникает, когда представляющая точка $X$ находится внутри $Q$ в «общем» положении, т. е. в положении, не имеющем никаких особых отличительных свойств.

Можно было бы теперь подумать, что хороший эвристический путь для исследования задачи в таких точках дается следующей схемой. Мы имеем некоторые эвристические наметки относительно условий в вершинах *I* — *VIII* (см. пп. 35.1 и 35.2). Любая точка $X$ из $Q$ в какой-то мере «окружена» этими вершинами; точнее говоря, она является их центром тяжести с соответствующими весами. Следовательно, можно предположить, что стратегия игр, представляемых точками $X$, является в некотором смысле комбинацией (более знакомых) стратегий игр, представляемых точками *I* — *VIII*.

Замечание. Рассмотрим две точки $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ из $Q$. Мы можем рассматривать их как векторы в $L_3$ и именно в этом смысле понимать центр тяжести $tX+(1-t)Y=\{tx_1+(1-t)y_1, \quad tx_2+(1-t)y_2, \quad tx_3+(1-t)y_3\}$ (см. (16:A:c) в п. 16.2.1).

Теперь, если $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ определяют характеристические функции $\mathrm{v}(S)$ и $\mathrm{w}(S)$ в смысле (34:1) — (34:3) из п. 34.2.1, то точка $tX + (1 - t)Y$ будет определять по такому же правилу характеристическую функцию

$$\mathrm{u}(S) = t\mathrm{v}(S) + (1-t)\,\mathrm{w}(S).$$

(Это соотношение легко проверить с помощью указанной выше формулы.) Именно эта функция $\mathrm{u}(S)$ была введена формулой (27:10) в п. 27.6.3 как центр тяжести $\mathrm{v}(S)$ и $\mathrm{w}(S)$.

Таким образом, рассмотрения в тексте согласованы с рассмотрениями в п. 27.6. То, что мы имеем дело с центрами тяжести более чем двух точек (их восемь: *I* — *VIII*)

---

[1]) Эта процедура известна в математической физике, где она используется для нахождения решений, которые нельзя получить в общем виде в настоящее время: это *теория возмущений*.

[2]) Вершины, центр и вся главная диагональ.

вместо ровно двух, несущественно: общую операцию можно получить, итерируя частную.

Из этих замечаний следует, что трудности, с которыми мы столкнемся далее, имеют прямое отношение к п. 27.6.3, как там было отмечено.

Можно даже надеяться, что эта комбинация будет некоторым образом аналогична расположению центра тяжести $X$ точек $I$ — $VIII$.

В пп. 36.3.2 и 38.2.5—7 мы увидим, что это справедливо в отдельных частях $Q$, но, конечно, не везде в $Q$. На самом деле в некоторой внутренней области $Q$ наблюдаются явления, качественно отличные от явлений в точках $I$ — $VIII$. Все это показывает, сколь тщательно следует подходить к понятиям, связанным со стратегиями или с предположениями о них. Математический подход в настоящий момент находится в таком зачаточном состоянии, что требуется накопление большого опыта, прежде чем можно будет почувствовать себя уверенно в этой области.

## § 36. РАССМОТРЕНИЕ ГЛАВНЫХ ДИАГОНАЛЕЙ

### 36.1. Участок, примыкающий к вершине *VIII*. Эвристическое описание

**36.1.1.** Систематическая теория игр четырех лиц еще не разработана настолько, чтобы представить полный список решений для всех игр, описываемых точками $Q$. Мы не в состоянии указать даже по одному решению для каждой такой игры. До сих пор исследования достигали успеха только в определении решений (иногда одного, иногда нескольких) в некоторых частях $Q$. Только для каждой из восьми вершин $I$ — $VIII$ установлен полный список решений. В настоящее время части $Q$, для которых решения известны, образуют, вообще говоря, довольно случайные линейные, плоские и пространственные области. Они распределены по всему $Q$, но не заполняют его полностью.

Полный список решений, известных для вершин $I$ — $VIII$, можно легко установить с помощью результатов гл. IX и X, где эти игры будут рассматриваться в рамках некоторых более обширных разделов общей теории. Пока мы ограничимся фрагментным подходом, который состоит в описании частных решений в тех случаях, когда они известны. Цель этого описания будет заключаться отнюдь не в точной оценке современного состояния этих исследований [1]), к тому же это заняло бы очень много места. Мы только рассмотрим отдельные случаи, которые, как мы надеемся, достаточно наглядны.

**36.1.2.** Мы рассмотрим сначала условия на главной диагонали $I$-центр-$VIII$ в $Q$ вблизи ее конца в вершине $VIII$, где $x_1 = x_2 = x_3 = -1$ (см. п. 35.3.3), и попытаемся произвести распространение, насколько это возможно, на $x_1 = x_2 = x_3 > -1$ (рис. 43). На этой диагонали

(36:1)
$$\mathrm{v}(S) = \begin{cases} 0 & \\ -1 & \\ 2x_1 & \\ & \text{если } S \text{ имеет элементов} \\ -2x_1 & \\ 1 & \\ 0 & \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \text{ (и игрок 4 принадлежит } S) \\ \\ 2 \text{ (и игрок 4 не принадлежит } S). \\ 3 \\ 4 \end{cases}$$

[1]) Это будет сделано одним из нас в последующих математических публикациях.

(заметим, что это дает (35:1) из п. 35.1.1 для $x_1 = 1$ и (35:6) из п. 35.2.1 для $x_1 = -1$). Мы предполагаем, что $x_1$ больше, чем $-1$, но не очень намного; как велико может быть это отклонение, выяснится позже. Рассмотрим сначала эту ситуацию эвристически.

Так как предполагается, что $x_1$ не очень отличается от $-1$, рассуждения п. 35.2 могут все еще оставаться в силе. Образование двухэлементной коалиции из игроков 1, 2, 3 может даже теперь являться важнейшей стратегической целью, но не единственной: формула (35:7) из п. 35.2.1 перестает быть верной; вместо нее мы имеем

(36:2) $$\mathrm{v}(S \cup T) > \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(T), \quad \text{если } S \cap T = \varnothing$$

при $T = (4)$ [1]). В самом деле, из (36:1) легко найти, что это превышение всегда равно [2]) $2(1 + x_1)$. Для $x_1 = -1$ оно обращается в нуль, но мы имеем $x_1$ немного $> -1$; поэтому это выражение немного $>0$. Заметим, что для упомянутой выше коалиции из двух игроков, куда не входит игрок 4, превышение в (36:2) [3]), согласно (36:1), всегда равно $2(1 - x_1)$. Для $x_1 = -1$ это выражение равно 4, а так как $x_1$ немного больше $-1$, то оно будет только немного меньше 4.

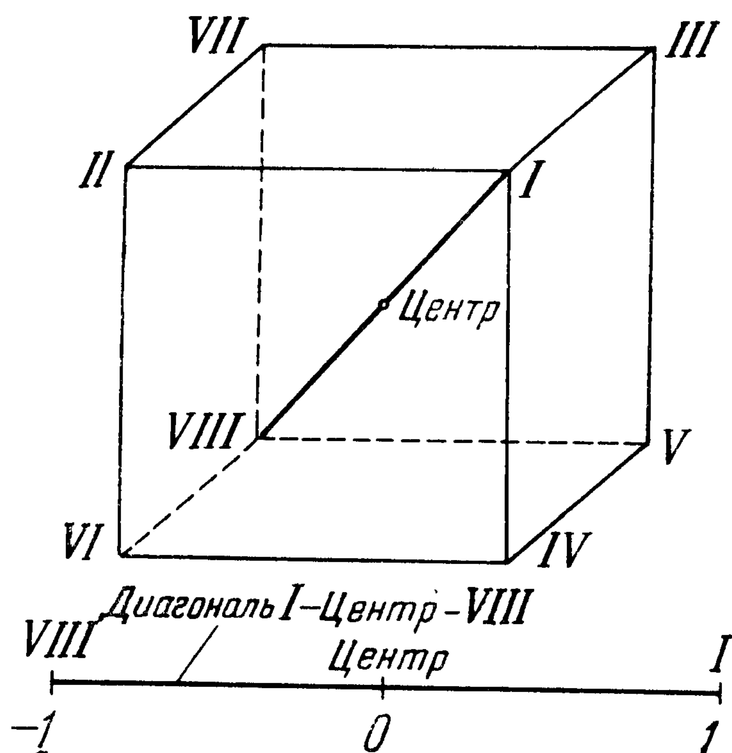



Рис. 43.

Таким образом, первая коалиция (из двух игроков, отличных от игрока 4) является намного более сильной, чем любая другая (где появляется игрок 4). Тем не менее последними коалициями не следует пренебрегать. Так как первая коалиция сильнее, можно ожидать, что она образуется с самого начала и что, как только она образовалась, она будет действовать как один игрок по отношению к двум оставшимся. Следовательно, можно ожидать, что в конце концов образуется некоторого рода игра трех лиц.

**36.1.3.** Если взять в качестве первой коалиции (1, 2), то предположительная игра трех лиц будет происходить между игроками (1, 2), 3, 4 [4]). В этой игре значения $a$, $b$, $c$ из п. 23.1 равны

$$a = \mathrm{v}((3, 4)) = 2x_1, \quad b = \mathrm{v}((1, 2, 4)) = 1, \quad c = \mathrm{v}((1, 2, 3)) = 1\ ^{5)}.$$

Следовательно, если мы можем применить полученные там результаты (все это чрезвычайно эвристично!), то игрок (1, 2) получает величину $\alpha = (-a + b + c)/2 = 1 - x_1$ в случае успеха (в образовании одной из последних коалиций) и $-a = -2x_1$ при неудаче. Игрок 3 получает

[1]) Если $S = \varnothing$ или $-T$, то в этом случае в (36:2) всегда имеет место знак $=$. То есть в рассматриваемой ситуации коалиция $S$ должна состоять из одного или двух элементов.

[2]) Согласно предыдущей сноске $S$ имеет один или два элемента и не содержит игрока 4.

[3]) То есть теперь $S$, $T$ — два одноэлементных множества, не содержащих игрока 4.

[4]) Можно было бы сказать, что игрок (1, 2) — это юридическое лицо, в то время как игроки 3, 4 в нашем примере — физические лица.

[5]) Напомним, что во всех последующих формулах $x_1$ близко к $-1$, т. е. по предположению отрицательно; следовательно, $-x_1$ — это выигрыш, а $x_1$ — проигрыш.

величину $\beta = (a - b + c)/2 = x_1$ в случае успеха и $-b = -1$ при неудаче. Игрок 4 получает величину $\gamma = (a + b - c)/2 = x_1$ в случае успеха, и $-c = -1$ при неудаче.

Так как «первыми» могут являться коалиции (1, 3), (2, 3), так же как и (1, 2), вследствие тех же самых эвристических причин, что и при обсуждении игры трех лиц (в §§ 21, 22), можно ожидать, что партнеры в этих коалициях разделят выигрыш поровну. Таким образом, когда коалиция добивается успеха (см. выше), ее члены могут надеяться на выигрыш $(1 - x_1)/2$ каждый, а в случае проигрыша — на $x_1$ каждый.

**36.1.4.** Резюмируем. Если наши предположения подтвердятся, то ситуация будет следующей.

Если «первой» является коалиция (1, 2) и ей удается найти союзника и если тем игроком, который соединяется в окончательной коалиции с игроками 1, 2, оказывается игрок 3, то игроки 1, 2, 3, 4 получают соответственно выигрыши $(1 - x_1)/2$, $(1 - x_1)/2$, $x_1$, $-1$. Если таким присоединяющимся к игрокам 1, 2 оказывается игрок 4, то эти величины заменяются на $(1 - x_1)/2$, $(1 - x_1)/2$, $-1$, $x_1$. Если «первая» коалиция (1, 2) неудачна, т. е. если игроки 3, 4 объединяются против нее, то все игроки получают соответственно выигрыши $-x_1$, $-x_1$, $x_1$, $x_1$.

Если «первой» является коалиция (1, 3) или (2, 3), то к приведенному описанию нужно применить соответствующую подстановку игроков 1, 2, 3.

## 36.2. Участок, примыкающий к вершине *VIII*. Точное описание

**36.2.1.** Теперь необходимо строго проверить все сказанное. Эвристический набросок, очевидно, соответствует следующему предположению.

Пусть **V** — следующее множество дележей:

(36:3)
$$\vec{\alpha}' = \left\{\frac{1-x_1}{2},\ \frac{1-x_1}{2},\ x_1,\ -1\right\}$$
$$\vec{\alpha}'' = \left\{\frac{1-x_1}{2},\ \frac{1-x_1}{2},\ -1,\ x_1\right\}$$
и дележи, получающиеся из этих перестановкой игроков (т. е. компонент) 1, 2, 3
$$\vec{\alpha}''' = \{-x_1,\ -x_1,\ x_1,\ x_1\}$$

(см. сноску 5, стр. 321). Мы ожидаем, что это множество **V** является решением в строгом смысле п. 30.1, если $x_1$ близко к $-1$; мы должны установить, так ли это и для какого именно промежутка изменения $x_1$.

Установление этого (если вообще возможно) приводит к следующему результату.

(36:A) Множество **V**, состоящее из векторов (36:3), является решением в том и только в том случае, если $-1 \leqq x_1 \leqq -1/5$.

Это является ответом на вопрос, в каком по размеру промежутке (от начальной точки $x_1 = -1$, т. е. от вершины *VIII*) приведенное выше эвристическое рассмотрение приводит к правильному результату.

Замечание. Мы хотим подчеркнуть, что (36:A) не утверждает, что **V** является (в данном промежутке изменения $x_1$) единственным решением рассматриваемой игры. Однако многочисленные попытки с аналогично построенными множествами найти другие решения для $x_1 \leqq -1/5$ (т. е. в области (36:A)) потерпели неудачу. Для $x_1$ немного $> -1/5$ (т. е. немного выходящего за пределы (36:A)), где множество **V** из (36:A) больше не является решением, справедлив тот же результат для решения, которое его заменяет. (См. (36:B) в п. 36.3.1.)

Мы, конечно, не сомневаемся, что другие решения «дискриминирующего» типа, как обсуждалось неоднократно, всегда существуют. Но они совершенно отличны от конечных решений **V**, которые здесь рассматриваются.

По-видимому, именно эти аргументы оправдывают нашу точку зрения, что в природе решений имеется некоторое качественное изменение при

$$x_1 = -\frac{1}{5} \text{ (на диагонали } I\text{-центр-}VIII\text{)}.$$

**36.2.2.** Доказательство (36:A) можно провести строго без какой-либо особой технической трудности. Оно состоит в несколько механическом перечислении ряда частных случаев и не проясняет принципиальной стороны вопроса [1]). Следовательно, читатель при желании может пропустить чтение доказательства, не теряя связи с основным направлением изложения. Он должен только помнить формулировку результатов в (36:A).

Тем не менее мы приведем доказательство полностью по следующей причине. Множество **V** из (36:3) было найдено эвристически, т. е. вообще без использования точной теории п. 30.1. Последующее строгое доказательство основывается только на теории п. 30.1 и посредством нее возвращает нас в конечном счете к единственно удовлетворительной точке зрения — к точной теории. Эвристические рассмотрения были только схемой для угадывания решения из-за недостатка лучших методов, и это — счастливая черта точной теории, раз оказывается возможным угадать этим способом даваемые ею решения. Но такую догадку нужно затем проверить точным методом или, вернее, точный метод должен быть использован для определения того, в какой области значений параметров догадка справедлива. Мы приводим строгое доказательство, чтобы дать возможность читателю подробно сопоставить и сравнить эти две процедуры: эвристическую и строгую.

**36.2.3.** Доказательство состоит в следующем.

Если $x_1 = -1$, то мы находимся в вершине *VIII* и множество **V** из (36:3) совпадает с множеством, которое мы ввели эвристически (как решение) в п. 35.2.3, что легко можно строго проверить (см. также сноску 1 на стр. 315). Следовательно, теперь мы можем исключить этот случай и предположить, что

(36:4) $$x_1 > -1.$$

Мы сначала должны установить, какие из множеств $S \subseteq I = (1, 2, 3, 4)$ заведомо необходимы или заведомо не необходимы (в смысле п. 31.1.2), так как мы проводим доказательство как раз такого типа, который рассматривался там.

Непосредственно можно сделать следующие замечания:

(36:5) Вследствие (31:H) в п. 31.1.5 трехэлементные множества $S$ заведомо необходимы, двухэлементные сомнительны, а все остальные заведомо не необходимы [2]).

(36:6) Всякий раз, когда двухэлементное множество заведомо необходимо, мы должны исключить все трехэлементные множества, подмножеством которых оно является вследствие (31:C) из п. 31.1.3.

---

[1]) Читатель может сопоставить это доказательство с доказательством, проводимым в связи с теорией игр двух лиц с нулевой суммой, например, комбинацию п. 16.4 с п. 17.6. Такое доказательство более прозрачно; оно обычно охватывает больше случаев и дает некоторое качественное разъяснение предмета и его связи с другими разделами математики. В ходе дальнейшего изложения теории такое доказательство встретится, например, в § 46. Однако бо́льшая часть теории все еще остается в примитивном и технически неудовлетворительном состоянии, типичными примерами чего являются последующие рассмотрения.

[2]) Ввиду того, что $n = 4$.

Поэтому мы будем теперь проверять двухэлементные множества. Это, конечно, следует сделать для всех $\vec{\alpha}$ в множестве $\mathbf{V}$ из (36:3).

Рассмотрим сначала те двухэлементные множества $S$, которые встречаются в дележе $\vec{\alpha}'$ [1]). Так как $\alpha'_4 = -1$, мы можем по (31:A) из п. 31.1.3 исключить возможность того, что $S$ содержит игрока 4. Множество $S = (1, 2)$ было бы эффективным, если бы $\alpha'_1 + \alpha'_2 \leqq v((1, 2))$, т. е. $1 - x_1 \leqq -2x_1$, $x_1 \leqq -1$, что противоречит (36:4). $S = (1, 3)$ эффективно, если $\alpha'_1 + \alpha'_3 \leqq v((1, 3))$, т. е. $(1 + x_1)/2 \leqq -2x_1$, $x_1 \leqq -1/5$. Таким образом, впервые появляется условие

(36:7) $$x_1 \leqq -\frac{1}{5},$$

соблюдение которого мы предполагали. $S = (2, 3)$ мы можем не рассматривать, так как игроки 1 и 2 играют в $\vec{\alpha}'$ одинаковую роль (см. сноску 1).

Перейдем теперь к $\vec{\alpha}''$. Так как $\alpha''_3 = -1$, то мы исключаем теперь множества $S$, содержащие игрока 3 (см. выше). $S = (1, 2)$ не рассматривается по прежней причине, так как $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\alpha}''$ совпадают на этих компонентах. $S = (1, 4)$ было бы эффективным, если бы было $\alpha''_1 + \alpha''_4 \leqq v((1, 4))$ т. е. $(1 + x_1)/2 \leqq 2x_1$, $x_1 \geqq 1/3$, что противоречит (36:7). $S = (2, 4)$ исключается по той же причине.

Возьмем, наконец, $\alpha'''$. $S = (1, 2)$ эффективно: $\alpha'''_1 + \alpha'''_2 = v((1, 2))$, т. е. $-2x_1 = -2x_1$. $S = (1, 3)$ не нужно рассматривать по следующей причине: мы уже рассмотрели $S = (1, 2)$ для $\vec{\alpha}'''$; если мы поменяем местами игроков 2 и 3 (см. сноску 1 на этой стр.), то это $S$ перейдет в (1, 3) с компонентами $-x_1$, $-x_1$. Таким образом, наше первоначальное $S = (1, 3)$ для $\vec{\alpha}'''$ становится не необходимым по (31:B) из п. 31.1.3, так как вследствие (36:7) $-x_1 \geqq x_1$. $S = (2, 3)$ исключается по той же причине. $S = (1, 4)$ было бы эффективным, если бы было $\alpha'''_1 + \alpha'''_4 \leqq v((1, 4))$, т. е. $0 \leqq 2x_1$, $x_1 \geqq 0$, что противоречит (36:7). $S = (2, 4)$ исключается по той же причине. $S = (3, 4)$ эффективно: $\alpha'''_3 + \alpha'''_4 = v((3, 4))$, т. е. $2x_1 = 2x_1$.

Резюмируем:

(36:8) Среди двухэлементных множеств $S$ три, перечисленные ниже, заведомо необходимы (а все остальные заведомо не необходимы): (1, 3) для $\vec{\alpha}'$, (1, 2) и (3, 4) для $\vec{\alpha}'''$.

Что касается трехэлементных множеств $S$, то по (31:A) из п. 31.1.3 мы можем исключить множества, содержащие 4 для $\vec{\alpha}'$ и 3 для $\vec{\alpha}''$. Следовательно, для $\vec{\alpha}'$ остается только (1, 2, 3), а для $\vec{\alpha}''$ — только (1, 2, 4). Из этих двух первое исключается по (36:6), так как оно содержит множество (1, 3) из списка (36:8). Для $\vec{\alpha}'''$ любое трехэлементное множество содержит множество (1, 2) или множество (3, 4) из списка (36:8), следовательно, мы можем исключить их согласно (36:6).

---

[1]) Здесь и во всем последующем рассуждении мы для сокращения доказательства сохраним свободу выполнения перестановок игроков 1, 2, 3 (см. (36:3)). Следовательно, читатель должен будет впоследствии применить к нашим результатам эти перестановки игроков 1, 2, 3.

Резюмируем:

(36:9) Среди трехэлементных множеств $S$ одно, данное ниже, заведомо необходимо (а все остальные заведомо не необходимы) [1]: (1, 2, 4) для $\vec{\alpha}''$.

**36.2.4.** Проверим теперь условие (30:5:a) из п. 30.1.1, т. е. что никакое $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$ не доминирует ни одно $\vec{\beta} \in \mathbf{V}$.

$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}'$. На основании (36:7) и (36:9) мы должны использовать $S = (1, 3)$. Может ли $\vec{\alpha}$ по этому множеству $S$ доминировать $\vec{\alpha}'$, или $\vec{\alpha}''$, или $\vec{\alpha}'''$, подвергнутый какой-нибудь из перестановок игроков 1, 2, 3? Для этого, прежде всего нужно существование компоненты меньшей, чем $x_1$ (это 3-я компонента $\vec{\alpha}'$), среди компонент 1, 2, 3 рассматриваемого дележа. Таким образом, $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\alpha}''$ исключаются [2]. Также в $\vec{\alpha}''$ исключаются компоненты 1, 2 (см. сноску 2 на этой стр.), но компонента 3 остается. Но теперь другая из компонент 1, 2, 3 этого дележа $\vec{\alpha}''$ должна быть $< (1 - x_1)/2$ (это 1-я компонента $\vec{\alpha}'$), что невозможно, так как обе компоненты 1, 2 дележа $\vec{\alpha}''$ равны $(1 - x_1)/2$.

$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}''$. По (36:8) и (36:9) мы должны использовать $S = (1, 2, 4)$. Может ли $\vec{\alpha}''$ по этому $S$ доминировать какой-либо дележ $\vec{\alpha}'$, или $\vec{\alpha}''$, или $\vec{\alpha}'''$, подвергнутый перестановке игроков 1, 2, 3? Для этого прежде всего требуется, чтобы компонента 4 рассматриваемого дележа была $< x_1$ (это 4-я компонента $\vec{\alpha}''$). Таким образом, $\vec{\alpha}''$ и $\vec{\alpha}'''$ исключаются. Для $\vec{\alpha}'$ мы, далее, должны потребовать, чтобы две из ее компонент 1, 2, 3 были $< (1 - x_1)/2$ (это 1-я и 2-я компоненты $\vec{\alpha}''$), что невозможно, так как только одна из этих компонент $\neq (1 - x_1)/2$.

$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}'''$. По (36:8) и (36:9) мы должны использовать $S = (1, 2)$, а затем $S = (3, 4)$. Пусть $S = (1, 2)$; может ли $\vec{\alpha}'''$ доминировать по такому $S$ в том же смысле, что и выше? Для этого требуется существование двух компонент $< -x_1$ (это 1-я и 2-я компоненты $\vec{\alpha}'''$) среди компонент 1, 2, 3 рассматриваемого дележа. Это невозможно для $\vec{\alpha}'''$, так как там только одна из этих компонент $\neq -x_1$. Это также невозможно для $\vec{\alpha}'$ или $\vec{\alpha}''$, так как в этих случаях только одна из компонент $\neq (1 - x_1)/2$ [3]. Пусть $S = (3, 4)$; может ли $\vec{\alpha}'''$ доминировать по этому $S$? Для этого требуется прежде всего чтобы 4-я компонента рассматриваемого дележа была $< x_1$ (это 4-я компонента $\vec{\alpha}'''$). Таким образом, $\vec{\alpha}''$ и $\vec{\alpha}'''$ исключаются. Для $\vec{\alpha}'$ мы, далее, должны потребовать существование компоненты $< x_1$ (это 3-я компонента $\vec{\alpha}'''$) среди его компонент 1, 2, 3, и это невозможно, так как все эти компоненты $\geqq x_1$ (см. сноску 2 на этой стр.).

Это завершает проверку (30:5:a).

---

[1]) Так как по (36:5) трехэлементное множество заведомо необходимо, это является другой стороной явления, упомянутого в конце замечания на стр. 293.

[2]) В самом деле, по (36:7) $(1 - x_1)/2 \geqq x_1$, т. е. $x_1 \leqq 1/3$ и $-x_1 \geqq x_1$, т. е. $x_1 \leqq 0$.

[3]) И $(1 - x_1)/2 \geqq -x_1$, т. е. $x_1 \geqq -1$.

**36.2.5.** Далее мы проверяем (30:5:b) из п. 30.1.1, т. е. то, что дележ $\vec{\beta}$, который не доминируется элементами **V**, должен принадлежать **V**.

Рассмотрим дележ $\vec{\beta}$, не доминируемый элементами **V**. Предположим сначала, что $\beta_4 < x_1$. Если бы какая-нибудь из компонент $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ была $< x_1$, то мы могли бы сделать (переставляя 1, 2, 3), чтобы $\beta_3 < x_1$. Это дает нам $\vec{\alpha}''' \in\!\!- \vec{\beta}$ по $S = (3, 4)$ из (36:8). Следовательно,

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geqq x_1.$$

Если бы какие-нибудь две компоненты из числа $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ были $< (1 - x_1)/2$, то мы могли бы сделать (переставляя 1, 2, 3), чтобы $\beta_1$, $\beta_2 < (1 - x_1)/2$. Поэтому $\vec{\alpha}'' \in\!\!- \vec{\beta}$ по $S = (1, 2, 4)$ из (36:9). Следовательно, не более чем одна из компонент $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ будет $< (1 - x_1)/2$, т. е. хотя бы две из них $\geqq (1 - x_1)/2$. Перестановкой 1, 2, 3 мы, таким образом, можем добиться, чтобы стало

$$\beta_1, \beta_2 \geqq \frac{1 - x_1}{2}.$$

Ясно, что $\beta_4 \geqq -1$. Таким образом, каждая компонента $\vec{\beta}$ будет $\geqq$ соответствующей компоненты $\vec{\alpha}'$, и так как оба вектора являются дележами[1]), они совпадают: $\vec{\beta} = \vec{\alpha}'$. Поэтому $\beta$ принадлежит **V**.

Предположим теперь, что $\beta_4 \geqq x_1$. Если бы какие-нибудь две компоненты из числа $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ были $< -x_1$, то мы могли бы добиться (переставляя 1, 2, 3), чтобы $\beta_1$, $\beta_2 < -x_1$. Поэтому $\vec{\alpha}''' \in\!\!- \vec{\beta}$ по $S = (1, 2)$ из (36:8). Следовательно, не более чем одна из компонент $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ будет $< -x_1$, т. е. две из них $\geqq -x_1$. Переставляя 1, 2, 3, мы можем добиться того, чтобы было

$$\beta_1, \beta_2 \geqq -x_1.$$

Если $\beta_3 \geqq x_1$, то из всего этого следует, что каждая компонента $\vec{\beta}$ будет $\geqq$ соответствующей компоненты $\vec{\alpha}'''$, и так как оба вектора являются дележами (см. сноску 1), то они совпадают: $\vec{\beta} = \vec{\alpha}'''$, и поэтому $\vec{\beta} \in$ **V**.

Предположим поэтому, что $\beta_3 < x_1$. Если какая-нибудь из компонент $\beta_1$, $\beta_2$ была бы $< (1 - x_1)/2$, то мы могли бы добиться (переставляя, если нужно, 1, 2), чтобы $\beta_1 < (1 - x_1)/2$. Это дает нам $\vec{\alpha}' \in\!\!- \vec{\beta}$ по $S = (1, 3)$ из (36:8). Следовательно,

$$\beta_1, \beta_2 \geqq \frac{1 - x_1}{2}.$$

Ясно, что $\beta_3 \geqq -1$. Таким образом, каждая компонента $\vec{\beta}$ будет $\geqq$ соответствующей компоненты $\vec{\alpha}''$, и так как оба вектора являются дележами (см. сноску 1), они совпадают: $\vec{\beta} = \vec{\alpha}''$, и поэтому $\beta \in$ **V**.

Это завершает проверку (30:5:b)[2]).

Таким образом, мы установили критерий (36:A)[3]).

---

[1]) Следовательно, сумма компонент для обоих векторов одинакова: она равна нулю.

[2]) Читатель заметит, что в процессе этого анализа использовались все множества из (36:8), (36:9), а $\vec{\beta}$ последовательно приравнивалось всем трем $\vec{\alpha}'$, $\vec{\alpha}''$, $\vec{\alpha}'''$ из (36:3).

[3]) Что касается $x_1 = -1$, см. замечания, сделанные в начале доказательства.

### 36.3. Другие участки главной диагонали

**36.3.1.** Когда $x_1$ выходит за пределы области (36:A) из п. 36.2.1, т. е. когда эта переменная переходит границу в $x_1 = -1/5$, множество **V** из (36:3) перестает быть решением. В самом деле, можно найти решение, которое справедливо в некоторой области при $x_1 > -1/5$ (присоединяя $x_1 = -1/5$) и которое получается добавлением к **V** из (36:3) следующих дележей:

(36:10) $\vec{\alpha}^{IV} = \left\{\frac{1-x_1}{2},\ -x_1,\ \frac{-1+x_1}{2},\ x_1\right\}$ и перестановок, как в (36:3) [1]).

Точная формулировка теперь такова:

(36:B) Множество **V** из (36:3) и (36:10) является решением в том и только в том случае, когда $-1/5 < x_1 \leqq 0$ [2]).

Доказательство (36:B) имеет тот же вид, что и приведенное выше доказательство (36:A), и мы не предполагаем здесь его обсуждать.

Области (36:A) и (36:B) исчерпывают ту часть всего допустимого интервала $-1 \leqq x_1 \leqq 1$, на которой $x_1 \leqq 0$, т. е. половину *VIII*-центр диагонали *VIII*-центр-*I*.

**36.3.2.** Решения, аналогичные множеству **V**, описанному в (36:A) из п. 36.2.1 и в (36:B) из п. 36.3.1, можно найти по другую сторону $x_1 > 0$ диагонали, т. е. в половине центр-*I*. Оказывается, что в этой половине встречаются такие же качественные изменения, как в первой половине, описанной в (36:A) и в (36:B). Фактически существуют три таких интервала, именно:

(36:C) $0 \leqq x_1 < \frac{1}{9}$,

(36:D) $\frac{1}{9} < x_1 \leqq \frac{1}{3}$,

(36:E) $\frac{1}{3} \leqq x_1 \leqq 1$

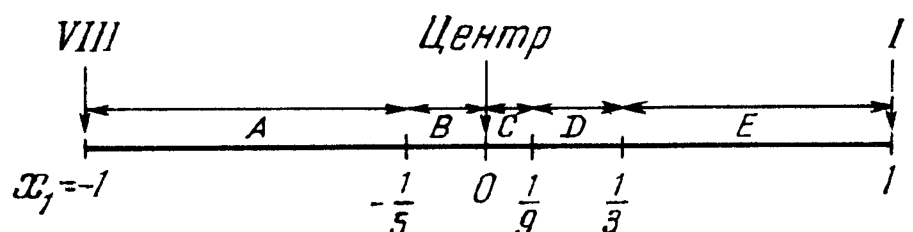


Рис. 44.

(см. рис. 44, который следует сравнить с рис. 43).

Мы не будем обсуждать решения, соответствующие областям (36:C), (36:D), (36:E) [3]).

Читатель, однако, может заметить, что $x_1 = 0$ принадлежит обеим (соседним) областям (36:B) и (36:C) и аналогично, $x_1 = 1/3$ принадлежит обеим областям (36:D) и (36:E). Как показывает тщательная проверка соответствующих решений, это происходит потому, что, хотя в $x_1 = 0$ и 1/3 имеются качественные изменения, эти изменения не являются разрывными.

---

[1]) Анализ проведенного выше доказательства показывает, что когда $x_1$ становится $> -1/5$, это оказывается неверным: множество $S = (1, 3)$ (и вместе с ним (2, 3)) перестает быть эффективным для $\vec{\alpha}'$. Зато, конечно, восстанавливается трехэлементное множество $S = (1, 2, 3)$, которое было раньше исключено, так как множество (1, 3) (и (2, 3)) содержалось в нем.

Таким образом, доминирование этим элементом $\vec{\alpha}'$ из **V** теперь становится более трудным, и, следовательно, неудивительно, что в поисках решения приходится рассматривать некоторое расширение множества **V**.

[2]) Заметим, что разрыв в $x_1 = -1/5$ принадлежит (36:A), а не (36:B)! Точная теория совершенно недвусмысленна, даже в таких вопросах.

[3]) Другое семейство решений, также покрывающих часть этой же области, будет рассматриваться в п. 38.2. См., в частности, п. 38.2.7 и сноску 2 на стр. 342.

С другой стороны, точка $x_1 = 1/9$ не принадлежит ни одной из соседних областей (36:С) или (36:D). Оказывается, что оба решения **V**, справедливые в этих двух областях, неприменимы в точке $x_1 = 1/9$. Условия в этой точке до сих пор еще недостаточно ясны.

## § 37. ЦЕНТР И ЕГО ОКРЕСТНОСТИ

### 37.1. Первоначальная ориентировка в отношении условий около центра

**37.1.1.** Рассмотрения предыдущего параграфа ограничивались одномерным подмножеством куба $Q$, именно диагональю *VIII*-центр-*I*. Используя перестановки игроков 1, 2, 3, 4 так, как описано в п. 34.3, эти рассуждения можно распространить на все четыре главные диагонали $Q$. Методами, аналогичными методам предыдущего параграфа, можно также найти решения вдоль некоторых других одномерных линий в $Q$. Таким образом, в $Q$ существует обширная сеть линий, на которых решения известны. Мы не предполагаем их перечислять по той причине, что информация, которую можно на этом пути получить, вероятно, соответствует теперь только временному состоянию дел.

Однако нужно заметить, что такой поиск решений вдоль отдельных изолированных одномерных линий, когда исследования ждет весь трехмерный массив куба $Q$, может быть разве лишь первым подходом к задаче. Если мы сможем найти такую трехмерную часть куба, хотя бы и малую, для всех точек которой годится один и тот же качественный тип решения, то мы будем иметь некоторое представление об условиях, которые следует ожидать. Оказывается, существует такая трехмерная часть вблизи центра $Q$. По этой причине мы будем обсуждать условия около центра.

**37.1.2.** Центр соответствует значениям координат $x_1$, $x_2$, $x_3$, равным 0, 0, 0, и представляет собой, как было выяснено в п. 35.3.1, единственную (полностью) симметричную игру в нашем множестве. Характеристическая функция этой игры принимает значение

$$(37:1)\qquad \mathbf{v}(S) = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 0, \\ 1 \\ 0 \end{cases} \text{ если } S \text{ имеет } \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \text{ элементов}$$

(см. (35:8)). Как и в соответствующих случаях в пп. 35.1, 35.2, 36.1, мы снова начинаем с эвристического анализа.

Очевидно, в этой игре целью всех стратегических усилий является образование коалиции из трех лиц. Ясно, что игрок, остающийся в одиночестве, проигрывает; в этом же смысле любая коалиция из трех лиц выигрывает; если же окончательно образуются две коалиции по два игрока в каждой, то, очевидно, этот случай интерпретируется как ничья.

Здесь возникает следующий качественный вопрос. Целью в описанной игре является образование коалиции из трех лиц. Возможно, что в переговорах, предшествующих каждой из партий, сначала будет составляться коалиция из двух лиц. Эта коалиция будет затем договариваться с двумя остающимися игроками, пытаясь войти в соглашение с одним из них против другого. После того, как участие этого третьего игрока обеспечено, встает вопрос, будет ли он допущен в окончательную коалицию на тех же самых условиях, что и два первоначальных члена, или нет. Если ответ

утвердителен, то общий выигрыш окончательной коалиции, равный 1, будет разделен поровну между тремя участниками: 1/3, 1/3, 1/3. Если же ответ отрицателен, то два исходных члена (принадлежащих начальной коалиции из двух лиц), вероятно, получат одинаковый выигрыш, но больший чем 1/3. Таким образом, единица будет разделена на части: $\frac{1}{3}+\varepsilon, \frac{1}{3}+\varepsilon, \frac{1}{3}-2\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

**37.1.3.** Первая альтернатива аналогична той, которую мы рассмотрели при анализе точки $I$ в п. 35.1. Здесь участники входят в коалицию (1, 2, 3), если она вообще образуется, на равных правах. Вторая альтернатива соответствует ситуации в интервале, проанализированном в пп. 36.1—2. Здесь первоначально объединяются любые два игрока (причем ни один из них не может быть игроком 4), и эта коалиция затем допускает к участию одного из оставшихся игроков на менее благоприятных условиях.

**37.1.4.** Ситуация, с которой мы имеем дело сейчас, не вполне аналогична каждой из упомянутых.

В первом случае коалиция (1, 2) не смогла бы предъявить жесткие требования игроку 3, так как он им совершенно необходим: если 3 объединится с 4, то 1 и 2 полностью проиграют; точно так же (1, 2) как коалиция не смогла бы объединиться с 4 против 3, так как игроку 4 нужен для победы только один из них (см. описание в п. 35.1.3). В рассматриваемой теперь игре это не так: коалиция (1, 2) может использовать как 3, так и 4, и даже если 3 и 4 объединятся против нее, то получится лишь ничья.

Во втором случае дискриминация участника, который присоединяется к коалиции последним, правдоподобна, так как исходная коалиция из двух имеет гораздо более прочное строение, чем окончательная коалиция из трех. В самом деле, когда $x_1$ стремится к —1, последняя коалиция перестает чего-либо стоить (см. замечания в конце п. 36.1.2). В нашей игре такого качественного различия усмотреть нельзя. Первая коалиция (из двух) рассчитывает на поражение или ничью, а образование окончательной коалиции (из трех) решает, будет ли ничья или победа.

Мы не имеем удовлетворительного основания для решения, кроме опробования обеих альтернатив. Однако перед тем, как это сделать, обратим внимание на важное ограничение наших рассмотрений.

## 37.2. Две альтернативы и роль симметрии

**37.2.1.** Заметим, что мы предполагаем, что одна и та же из двух вышеупомянутых альтернатив имеет место для всех четырех коалиций из трех игроков. В самом деле, сейчас мы ищем только симметричные решения, т. е. решения, которые содержат вместе с дележом $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ все его перестановки.

Далее, из симметрии игры, вообще говоря, никоим образом не следует симметрия каждого из ее решений. Дискриминирующие решения, обсуждавшиеся в п. 33.1.1, делают это ясным уже для игры трех лиц. В п. 37.6 мы найдем дальнейшие примеры этого для симметричной игры четырех лиц, которую мы сейчас рассматриваем.

Однако следует ожидать, что асимметричные решения симметричной игры имеют слишком неясный характер, чтобы их можно было обнаружить при таком эвристическом обзоре, который мы сейчас проводим. (См. аналогичные явления в игре трех лиц, на которую ссылались выше.) Из-за этого мы сейчас ищем только симметричные решения.

**37.2.2.** Нужно сказать еще одну вещь: вполне допустимо, что, в то время как асимметричные решения существуют, общие организационные принципы, подобные принципам, соответствующим нашим двум альтернативам, либо справедливы для совокупности всех участников, либо вообще неверны. Это допущение вытекает из того, что число участников все еще очень мало, и действительно, может быть, слишком мало, чтобы оказалось возможным образование нескольких групп участников с различными принципами организации. Действительно, мы имеем дело только с четырьмя участниками, а, с другой стороны, ясно, что три — это минимальное число для какой-либо организации. Эти несколько неопределенные соображения найдут точное подтверждение по крайней мере в одном частном случае в (43:L) и в следствии из п. 43.4.2. В данный момент, однако, мы не в состоянии снабдить их каким-либо строгим доказательством.

## 37.3. Первая альтернатива в центре

**37.3.1.** Рассмотрим теперь две альтернативы из п. 37.1.2. Мы будем разбирать их в обратном порядке.

Предположим сначала, что два исходных участника принимают в свою коалицию третьего, только на менее благоприятных условиях. Тогда первую коалицию (из двух) нужно рассматривать как ядро, вокруг которого формируется окончательная коалиция (из трех). В этой последней фазе от первой коалиции следует ожидать, что она будет действовать в своих отношениях с двумя другими игроками как единый игрок, делая, таким образом, игру похожей на игру трех лиц. Если эта точка зрения является здравой, то мы можем повторить соответствующие рассуждения из п. 36.1.3.

Например, при выборе в качестве «первой» коалиции игроков (1, 2) предполагаемая игра трех лиц происходит между игроками (1, 2), 3, 4. Следовательно, рассуждения, на которые делалась ссылка выше, переносятся сюда полностью, только с измененными численными значениями: $a = 0$, $b = c = 1$, откуда $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$ [1]).

Так как «первая» коалиция может состоять из любых двух игроков, эвристические обоснования, аналогичные обоснованиям, примененным при обсуждении игры трех лиц (в §§ 21, 22), позволяют ожидать, что партнеры в этой игре разобьются поровну: когда будет найден союзник равно как и в случае ничейного результата, причем подлежащий разделу выигрыш будет соответственно равен 1 или 0.

Замечание. В этом случае аргументация гораздо слабее, чем в ранее рассмотренном случае (или в соответствующем приложении в п. 36.1.3), так как любая «первая» коалиция может теперь достигнуть конца двумя различными способами (с ничьей или с победой). Единственное удовлетворительное решение о ценности аргументации получается лишь при применении точной теории. Желательная проверка фактически содержится в доказательстве пп. 38.2.1—3; в самом деле, это частный случай

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$$

из (38:D) в п. 38.2.3.

**37.3.2.** Резюмируем: если сделанные выше предположения оправдываются, то положение дел таково.

Если «первая» коалиция есть (1, 2) и ей удается найти союзника и если игроком, который соединяется с ней в окончательной коалиции, является игрок 3, то игроки 1, 2, 3, 4 получают соответственно выигрыши 1/2,

---

[1]) Существенная разница между этим рассуждением и тем, на которое мы ссылались, состоит в том, что теперь игрок 4 больше не исключается из «первой» коалиции.

1/2, 0, —1. Если первая коалиция не имеет в этом отношении успеха, т. е. если происходит ничья, то эти выигрыши заменяются на 0, 0, 0, 0.

Если имеется другое распределение игроков, то к изложенному нужно применить соответствующую перестановку игроков 1, 2, 3, 4.

Теперь необходимо подвергнуть все сказанное строгой проверке. Наши эвристические догадки, очевидно, соответствуют следующему предположению.

Пусть **V** — множество следующих дележей:

(37:2) $\vec{\alpha}' = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -1\right\}$, и дележи, получающиеся из этих перестановкой игроков (т. е. компонент) 1, 2, 3, 4.

$\vec{\alpha}'' = \{0, 0, 0, 0\}$

Мы ожидаем, что это множество **V** является решением.

Строгое рассмотрение, аналогичное проведенному в п. 36.2, показывает, что это множество **V** действительно оказывается решением в смысле п. 30.1. Мы не приводим его здесь главным образом из-за того, что оно содержится в более общем доказательстве, которое будет дано позже (см. замечание на стр. 330).

### 37.4. Вторая альтернатива в центре

**37.4.1.** Предположим теперь, что в окончательной коалиции из трех игроков все ее участники имеют равные права. Тогда, если, например, эта коалиция образована из игроков 1, 2, 3, то игроки 1, 2, 3, 4 получают соответственно выигрыши 1/3, 1/3, 1/3, —1.

Было бы поспешным вывести из этого, что полученное множество дележей **V** будет являться решением, т. е. что решением будет множество следующих дележей $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$:

(37:3) $\vec{\alpha}''' = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right\}$ и такие же перестановки, как в (37:2).

Мы еще не предприняли попыток понять, как может произойти «мгновенное» образование окончательной коалиции, не предполагая предварительного существования привилегированного ядра из двух лиц.

**37.4.2.** В предыдущем решении (37:2) такое объяснение вполне естественно. Слоистая форма окончательной коалиции выражается дележом $\vec{\alpha}'$, и мотив для оправдания этой схемы лежит в угрозе ничьей, выраженной дележом $\vec{\alpha}''$. Точнее говоря, дележ $\vec{\alpha}'$ образует решение только вместе с $\vec{\alpha}''$, но не сам по себе.

В (37:3) этот второй элемент отсутствует. Прямая проверка в смысле п. 30.1 обнаруживает, что $\vec{\alpha}'''$ удовлетворяет условию (30:5:a), но не (30:5:b), т. е. что эти дележи не доминируют друг друга, но остаются некоторые другие недоминируемые дележи. Следовательно, к **V** должны быть еще добавлены некоторые элементы [1]).

---

[1]) Для избежания неверного понимания заметим, что, вообще говоря, ни в каком отношении не является верным, что любое множество недоминируемых друг другом дележей можно пополнить до решения. В самом деле, задача о том, является ли данное множество дележей подмножеством некоторого (неизвестного) решения, еще не решена. В настоящем случае мы только выражаем надежду, что такое обобщение окажется возможным для конкретного **V** из (37:3), и эта надежда в дальнейшем оправдается. См. п. 30.3.7.

В это добавление, конечно, не входит $\vec{\alpha}'' = \{0, 0, 0, 0\}$ из (37:2), так как этот дележ может доминироваться дележом $\vec{\alpha}'''$ [1]). Другими словами, расширение (т. е. стремление к устойчивости в смысле п. 4.3.3) $\vec{\alpha}'''$ до решения должно быть достигнуто при помощи совершенно других дележей (т. е. угрозами) как в случае $\vec{\alpha}'''$ из (37:3), так и в случае $\vec{\alpha}'$ из (37:2).

Представляется очень трудным найти эвристическую мотивировку для шагов, которые становятся теперь необходимыми. К счастью, однако, с этого места можно перейти к строгой процедуре, делая, таким образом, дальнейшие эвристические рассмотрения необязательными.

В самом деле, можно строго доказать, что существует ровно одно симметричное расширение множества **V** из (37:3) до решения. Это происходит добавлением следующих дележей $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$:

(37:4) $\vec{\alpha}^{IV} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$ и перестановки, как и в (37:2).

**37.4.3.** Если желательна интерпретация этого решения, т. е. его составляющей $\vec{\alpha}^{IV}$ из (37:4), с точки зрения здравого смысла, то нужно сказать, что оно вовсе не оказывается ничьей (аналогично соответствующему $\vec{\alpha}''$ из (37:2)); более того, оно оказывается некоторым компромиссом между частью (двумя членами) возможной выигрывающей коалиции и двумя остальными игроками. Однако, как отмечено выше, мы не пытаемся найти полную эвристическую интерпретацию множества **V** из (37:3) и (37:4); в самом деле, вполне может оказаться, что эта часть точной теории уже выходит за пределы таких возможностей [2]). Кроме того, несколько последующих примеров проиллюстрируют специфические особенности решения на гораздо более широкой основе. Мы снова воздерживаемся от приведения здесь строгого доказательства по указанным выше причинам.

## 37.5. Сравнение двух центральных решений

**37.5.1.** Два решения (37:2) и (37:3), (37:4), которые мы нашли для игры, описываемой центром, дают нам новый пример возможной множественности решений. Конечно, это явление мы наблюдали и раньше, именно в случае существенной игры трех лиц в п. 33.1.1. Но там все решения, за исключением одного, были в некотором смысле аномальными (мы обозначали это, употребляя термин «дискриминирующий»). Только одно решение в этом случае состояло из конечного множества дележей; это единственное решение обладало такой же симметрией, как и сама игра (т. е. оно было симметричным относительно всех игроков). На этот раз условия совершенно иные. Мы нашли здесь два решения, каждое из которых является конечным множеством дележей [3]) и обладает полной симметрией игры. Обсуждение п. 37.1.2 показывает, что каждое из этих решений трудно рассматривать как «аномальное» или как «дискриминирующее»

---

[1]) По множеству $S = (1, 2, 3)$.

[2]) Это явление широко распространено в математических теориях физического происхождения, даже если они берут начало из эвристических рассмотрений.

[3]) Простой подсчет указанных дележей и их различных перестановок показывает, что решение (37:2) состоит из 13 элементов, а решение (37:3), (37:4) — из 10.

в каком бы то ни было смысле; они существенно различаются по способу присоединения последнего участника коалиции из трех лиц и, следовательно, по всей видимости, соответствуют двум совершенно нормальным принципам социальной организации.

**37.5.2.** Менее нормальным, если вообще в этом плане может идти речь, представляется решение (37:3), (37:4). Как в (37:2), так и в (37:3), (37:4) характер решения определялся теми дележами $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\alpha}'''$, которые соответственно описывают полное решение. К этим дележам нужно было добавить еще «устойчивые» дележи $\vec{\alpha}''$ и $\vec{\alpha}^{IV}$. Далее, в первом решении этот дополнительный дележ $\vec{\alpha}''$, очевидно, эвристически интерпретировался как ничья, в то время как во втором решении природа дополнительного $\vec{\alpha}^{IV}$ оказалась более сложной.

Более подробный анализ обнаруживает, однако, что первое решение появляется в окружении особых явлений, которые нельзя ни объяснить, ни предвидеть при помощи эвристической процедуры, естественно приводящей к нему.

Эти явления весьма поучительны также и с общей точки зрения, так как они иллюстрируют несколько неожиданным образом некоторые возможности и интерпретации нашей теории. Поэтому мы в дальнейшем проанализируем их детально. Добавим, что аналогичное расширение второго решения до настоящего времени не найдено.

### 37.6. Несимметричные центральные решения

**37.6.1.** Начнем с того, что существуют некоторые конечные, но асимметричные решения, тесно связанные с (37:2) в п. 37.3.2, так как они содержат некоторые из дележей $\{1/2, 1/2, 0, -1\}$[1]. Одно из этих решений — это то, которое получается при подходе к центру по диагонали $I$-центр-$VIII$ с любой стороны и использовании там решения, указанного в п. 36.3. Иными словами, оно получается непрерывным приспособлением к упоминаемым там областям (36:B) и (36:C). (Вспомним, что точка $x_1 = 0$, т. е. центр, принадлежит обеим этим областям; см. п. 36.3.2.) Так как это решение можно также рассматривать как выражающее некоторый самостоятельный принцип социальной организации, мы кратко опишем его.

Это решение обладает той же симметрией, что и решение, принадлежащее играм на диагонали $I$-центр-$VIII$, поскольку оно действительно является одним из них: симметричным относительно игроков 1, 2, 3, в то время как игрок 4 занимает особое положение[2]. Поэтому мы опишем его тем же способом, что и решения игр на диагонали, например, как (36:3) в п. 36.2.1. Здесь не допускаются только перестановки игроков 1, 2, 3, в то время как в описаниях (37:3) и (37:4) запрещались все перестановки игроков 1, 2, 3, 4.

**37.6.2.** В целях лучшего сравнения переформулируем в этих обозначениях (т. е. допуская только перестановки игроков 1, 2, 3) определение нашего первого полностью симметричного решения (37:2) из п. 37.3.2.

---

[1]) То есть некоторые, но не все из 12 перестановок этого дележа.

[2]) Именно тем, что положение игрока 4 в решении совершенно отлично от положения других, это решение отличается от двух ранее упомянутых симметричных решений.

Оно состоит из следующих дележей [1]):

$$(37{:}2^*)\quad \begin{aligned} \vec{\beta}' &= \left\{\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ 0,\ -1\right\}, \\ \vec{\beta}'' &= \left\{\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ -1,\ 0\right\}, \\ \vec{\beta}''' &= \left\{\tfrac{1}{2},\ 0,\ -1,\ \tfrac{1}{2}\right\}, \\ \vec{\beta}^{VI} &= \{0,\ 0,\ 0,\ 0\} \end{aligned}$$

и дележей, получающихся из этих перестановкой игроков 1, 2, 3.

Итак, асимметричное решение, о котором мы упоминали, состоит из дележей

$$(37{:}5)\quad \begin{aligned} &\vec{\beta}',\ \vec{\beta}'',\ \vec{\beta}^{IV},\ \text{как в } (37{:}2^*), \\ &\vec{\beta}^{V} = \left\{\tfrac{1}{2},\ 0,\ -\tfrac{1}{2},\ 0\right\}^{2)} \end{aligned}$$

и дележей, получающихся из этих перестановкой игроков 1, 2, 3.

Мы снова опускаем доказательство того, что дележи из (37:5) составляют решение. Вместо этого приведем интерпретацию различия между этим решением и решением из (37:2), т. е. первым (симметричным) решением в п. 37.3.2.

**37.6.3.** Это различие состоит в замене

$$\vec{\beta}''' = \left\{\tfrac{1}{2},\ 0,\ -1,\ \tfrac{1}{2}\right\} \text{ на } \vec{\beta}^{V} = \left\{\tfrac{1}{2},\ 0,\ -\tfrac{1}{2},\ 0\right\}.$$

Таким образом, дележ $\vec{\beta}'''$, в котором игрок 4 принадлежал бы «первой» коалиции (см. п. 37.3.1), т. е. группе, выигрывающей максимальную величину 1/2, удаляется и заменяется другим дележом, $\vec{\beta}^{V}$. Игрок 4 получает теперь несколько меньше, а проигрывающий среди игроков 1, 2, 3 (в этом размещении — игрок 3) получает несколько больше, чем в $\vec{\beta}'''$. Эта разность в точности равна 1/2, так что игрок 4 переходит в ничейную позицию, а игрок 3 из позиции полного проигрыша — 1 переходит в промежуточную позицию — 1/2.

В результате игроки 1, 2, 3 образуют «привилегированную» группу, и никто извне в «первую» коалицию не допускается. Но даже среди трех членов привилегированной группы продолжаются споры о коалиции, так как в «первую» коалицию могут войти только два участника. Стоит заметить, что член привилегированной группы может даже полностью проиграть, как в $\vec{\beta}''$, но только с помощью большинства его «класса», образующего «первую» коалицию и могущего привлечь «непривилегированного» игрока 4 в качестве третьего члена «окончательной» коалиции.

**37.6.4.** Читатель заметит, что это описывает вполне возможную форму социальной организации. Несомненно, эта форма является дискри-

---

[1]) Наши $\vec{\beta}'$, $\vec{\beta}''$, $\vec{\beta}'''$ исчерпывают $\alpha'$ из (37:2) в п. 37.3.2, в то время как $\vec{\beta}^{IV}$ равно $\vec{\alpha}''$ тождественно. Дележ $\vec{\alpha}'$ должен быть представлен тремя дележами $\vec{\beta}'$, $\vec{\beta}''$, $\vec{\beta}'''$, так как в этой системе представления необходимо отметить, в какой из трех возможных позиций этого дележа (т. е. значений $\frac{1}{2}$, 0, —1) находится игрок 4.

[2]) Этот дележ $\vec{\beta}^{V}$ по расположению выигрышей напоминает дележ $\vec{\alpha}^{IV}$ в (37:4) из п. 37.4.2, однако это аналогия ни к чему не ведет.

минирующей, хотя и не так просто, как «дискриминирующие» решения игры трех лиц. Она описывает более сложный и тонкий тип социальных взаимоотношений, причем скорее именно решением, чем самой игрой [1]). Ее можно считать несколько произвольной, но, так как мы рассматриваем «общество» очень малых размеров, все возможные нормы поведения должны очень точно и тонко соответствовать узости его возможностей.

Едва ли нужно останавливаться на том, что аналогичную дискриминацию любого другого игрока (1, 2, 3 вместо 4) можно выразить соответствующими решениями, которые мы смогли бы связать с тремя другими диагоналями куба $Q$.

## § 38. СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОКРЕСТНОСТИ ЦЕНТРА

### 38.1. Преобразование решения, принадлежащего первой альтернативе в центре

**38.1.1.** Мы продолжаем анализ разветвлений решения (37:2) из п. 37.3.2. Окажется, что его можно подвергнуть некоторому специфическому преобразованию без потери его характерных свойств как решения.

Это преобразование состоит в умножении дележей (37:2) из п. 37.3.2 на общий (положительный) численный множитель $z$. В результате получается следующее множество дележей:

(38:1)
$$\vec{\gamma}' = \left\{\frac{z}{2},\ \frac{z}{2},\ 0,\ -z\right\},\qquad \vec{\gamma}'' = \{0,\ 0,\ 0,\ 0\}$$
и дележи, получающиеся из этих перестановкой игроков 1, 2, 3, 4.

Для того чтобы эти векторы являлись дележами, нужно, чтобы все их компоненты были $\geqq -1$ (т. е. $\geqq$ общего значения v $(i)$). Поскольку $z > 0$, это имеет место только при $-z \geqq -1$, т. е. мы должны иметь

(38:2)
$$0 < z \leqq 1.$$

Для $z = 1$ наше множество (38:1) совпадает с (37:2) из п. 37.3.2. Априори не видно, должно ли быть множество (38:1) решением той же игры для какого-либо другого $z$, удовлетворяющего (38:2). Прямая проверка показывает, что оно оказывается решением в том и только в том случае, когда $z > 2/3$, т. е. когда (38:2) заменяется на

(38:3)
$$\frac{2}{3} < z \leqq 1.$$

Важность этого семейства решений возрастает еще и оттого, что его можно распространить на некоторую трехмерную часть куба $Q$, окружающую его центр. Мы приведем полностью необходимое рассуждение, так как оно дает возможность продемонстрировать метод, который может иметь более широкие приложения в этих исследованиях.

Интерпретация этих результатов будет предпринята впоследствии.

**38.1.2.** Мы начинаем с замечания, что рассмотрение множества **V**, определенного в (38:1) для игры, описанной соотношениями (37:1) в п. 37.1.2 (т. е. соответствующей центру куба $Q$), можно заменить рассмотрением исходного множества **V** из (37:2) в п. 37.3.2 для другой игры. В самом деле, наше множество (38:1) было получено из (37:2) умножением на $z$. Вместо этого мы могли бы оставить (37:2) и умножить на $1/z$

[1]) По этому поводу см. рассуждение в п. 35.2.4.

характеристическую функцию (37:1); при этом, правда, была бы нарушена нормировка $\gamma = 1$, которая была необходима для геометрического представления $Q$ (см. п. 34.2.2), но мы идем на это.

Итак, основные идеи можно сформулировать следующим образом. До сих пор мы исходили из данной игры и искали решения. Теперь мы предполагаем этот процесс обратить и, исходя из данного решения, искать игру. Точнее, мы начинаем с данного множества дележей **V** и ищем такую характеристическую функцию v $(S)$ (т. е. такую игру), для которой это множество **V** является решением.

Замечание. Эта обратная процедура вполне характеризует гибкость математического метода в отношении той некоторой степени свободы, которая в нем существует. Хотя сначала он отклоняет исследование в направлении, которое следует рассматривать как неестественное с любой точки зрения, кроме строго математической, тем не менее он эффективен; при помощи технических выкладок он в конце концов обнаруживает решение, которое не удавалось найти каким-либо другим путем.

После наших предыдущих примеров, где мы руководствовались эвристическими рассмотрениями, чрезвычайно поучительно разобрать этот случай, не связанный ни с какими эвристическими догадками, где решения найдены чисто математическим приемом, т. е. описанным выше обращением.

Для читателя, который, может быть, не удовлетворен таким приемом (т. е. исключительно техническим, а не концептуальным), мы указываем, что в математическом анализе он узаконен и широко применяется.

Мы неоднократно обнаруживали, что с эвристической процедурой справляться проще, чем со строгой. Настоящий случай дает нам пример обратного.

Умножение v $(S)$ из (37:1) в п. 37.1.2 на общий множитель означает, что мы по-прежнему требуем, чтобы было

(38:4) v $(S) = 0$, если $S$ — двухэлементное множество, и, кроме того, чтобы игра имела редуцированную форму (см. п. 27.1.4), т. е. чтобы было

(38:5) $$\text{v}((1)) = \text{v}((2)) = \text{v}((3)) = \text{v}((4)).$$

В самом деле, общее значение (38:5) равно $-1/z$ и из (38:4), (38:5) и (25:3:a), (25:3:b) в п. 25.3.1 следует, что это v $(S)$ такое же, как и в (37:1), только умноженное на $1/z$. Наше утверждение (38:3) означает, что множество **V** из (37:2) в п. 37.3.2 является решением для (38:4), (38:5) в том и только в том случае, если общее значение (38:5) (т. е. $-1/z) \leqq -1$ и $> -3/2$.

**38.1.3.** Сделаем теперь следующий шаг и отбросим требование редуцированности, т. е. (38:5). Таким образом, от v $(S)$ мы требуем только выполнения (38:4), налагая ограничения на значения для двухэлементных множеств $S$. Сформулируем снова окончательный вид нашего вопроса:

(38:A) Рассмотрим все игры четырех лиц с нулевой суммой, где

(38:6) v $(S) = 0$ для всех двухэлементных множеств $S$.

Для каких из них множество **V** из (37:2) в п. 37.3.2 является решением?

Заметим, что, так как мы опустили требования нормировки и редуцированности v $(S)$, мы порвали все связи с геометрическим представлением в кубе $Q$. Поэтому в конце будет необходимо специальное преобразование, для того чтобы полученные результаты можно было вместить в рамки куба.

## 38.2. Строгое рассмотрение

**38.2.1.** Очевидно, что неизвестными в задаче (38:A) являются значения

(38:7) $\mathrm{v}((1)) = -y_1, \quad \mathrm{v}((2)) = -y_2, \quad \mathrm{v}((3)) = -y_3, \quad \mathrm{v}((4)) = -y_4.$

Перейдем к выяснению того, как ограничение в условиях (38:A) влияет на числа $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$.

Эта игра больше не является симметричной [1]. Здесь перестановки игроков 1, 2, 3, 4 оказываются законными, только если они сопровождаются соответствующими перестановками $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ [2].

Начнем с того, что наименьшая компонента векторов (37:2) в п. 37.3.2, связанная с данным игроком $k$, равна —1. Следовательно, эти векторы будут дележами в том и только в том случае, если $-1 \geqq \mathrm{v}((k))$, т. е.

(38:8) $$y_k \geqq 1 \quad \text{для} \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Мы видим, какой оказывается характеристика **V** как множества дележей; посмотрим теперь, является ли оно решением. Это исследование аналогично доказательству, проведенному в пп. 36.2.3—5.

**38.2.2.** Снова применим замечания (36:5), (36:6) из п. 36.2.3. Двухэлементное множество $S = (i, j)$ является эффективным для $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, когда $\alpha_i + \alpha_j \leqq 0$ (см. (38:A)). Следовательно, для $\vec{\alpha}'$, $\vec{\alpha}''$ из (37:2) мы имеем: в $\vec{\alpha}''$ любое двухэлементное множество $S$ является эффективным; в $\vec{\alpha}'$ никакое двухэлементное множество $S$, не содержащее игрока 4, не является эффективным, а те множества $S$, которые содержат его, т. е. $S = (1, 4), (2, 4), (3, 4)$, очевидно, являются эффективными. Однако если мы рассматриваем $S = (1, 4)$, то мы можем отбросить два других; $S = (2, 4)$ получается из него перестановкой 1 и 2, которая не влияет на $\vec{\alpha}'$ [3]; $S = (3, 4)$ хуже, чем $S = (1, 4)$, после того как 1 и 3 поменяются местами, так как $1/2 \geqq 0$ [4].

Резюмируем:

(38:B) Среди двухэлементных множеств $S$ следующие заведомо необходимы (а все остальные заведомо не необходимы): (1, 4) для $\vec{\alpha}'$ [5], все для $\vec{\alpha}''$.

Обратимся к трехэлементным множествам. По изложенному выше на основании (36:6) мы можем исключить для $\vec{\alpha}''$ все трехэлементные множества, а для $\vec{\alpha}'$ — множества, содержащие (1, 4) или (2, 4) [6]. Для $\vec{\alpha}'$ остается только $S = (1, 2, 3)$.

---

[1] Кроме случая, когда $y_1 = y_2 = y_3 = y_4$.

[2] Но против применения таких перестановок 1, 2, 3, 4 нечего возразить, как в формулировке (37:2) из п. 37.3.2.

[3] Эта перестановка и дальнейшие, аналогичные ей, очевидно, законны, несмотря на сказанное в сноске 1 на стр. 337. См. сноску 1 на стр. 324 и сноску 2 на стр. 337.

[4] Так как $\alpha'_4 = -1$, мы можем исключить все множества, включая $S = (1, 4)$, когда $\mathrm{v}((4)) = -1$, т. е. когда $y_4 = 1$, что возможно. Но мы не обязательно должны делать это. Мы предпочитаем этого не делать, чтобы одновременно рассматривать случаи $y_4 = 1$ и $y_4 > 1$.

[5] И все перестановки 1, 2, 3, 4; они также видоизменяют $\vec{\alpha}'$.

[6] Второе получается из первого перестановкой 1 и 2, не изменяющей $\vec{\alpha}'$.

Резюмируем:

(38:C) Среди трехэлементных множеств $S$ одно, приводимое ниже, заведомо необходимо (а все остальные заведомо не необходимы): (1, 2, 3) для $\vec{\alpha}'$.

Мы предоставляем читателю проверить утверждение (30:5:a) из п. 30.1.1, т. е. что никакое $\vec{\alpha}' \in \mathbf{V}$ не доминирует $\vec{\beta} \in \mathbf{V}$. (См. соответствующую часть доказательства в п. 36.2.4. Фактически последующее доказательство (30:5:b) также содержит необходимые шаги.)

**38.2.3.** Проверим теперь (30:5:b) из п. 30.1.1, т. е. что дележ $\vec{\beta}$, не доминируемый элементами $\mathbf{V}$, должен принадлежать множеству $\mathbf{V}$.

Рассмотрим дележ $\vec{\beta}$, не доминируемый элементами $\mathbf{V}$. Если бы какие-нибудь два числа из $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ были бы $<0$, то мы всегда могли бы добиться (перестановкой 1, 2, 3, 4), чтобы было $\beta_1, \beta_2 < 0$. Это дает нам по (38:B), что $\vec{\alpha}'' \succ \vec{\beta}$ по множеству $S = (1, 2)$. Следовательно, не более одного из чисел $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ будет $<0$. Если ни одно из них не $<0$, то все они $\geqq 0$. Тогда каждая компонента $\vec{\beta}$ будет $\geqq$ соответствующей компоненты $\vec{\alpha}''$, и, так как оба вектора являются дележами (см. сноску 1 на стр. 326), они совпадают: $\vec{\beta} = \vec{\alpha}''$; и поэтому $\vec{\beta} \in \mathbf{V}$.

Следовательно, ровно одно из чисел $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ будет $<0$. Перестановкой 1, 2, 3, 4 мы можем добиться того, чтобы было $\beta_4 < 0$.

Если бы какие-нибудь два числа из $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ были бы $< 1/2$, то мы могли бы добиться (перестановкой 1, 2, 3), чтобы $\beta_1, \beta_2 < 1/2$. Кроме того, $\beta_4 < 0$. Поэтому при перестановке 3 и 4 получаем по (38 : C), что $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$ по множеству $S = (1, 2, 3)$. Следовательно, не более одного из $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ будет $<1/2$. Если ни одно из них не $<1/2$, то $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geqq 1/2$. Следовательно, $\beta_4 \leqq -3/2$. Но $\beta_4 \geqq \mathrm{v}((4)) = -y_4$, откуда $-y_4 \leqq -3/2$, т. е. $y_4 \geqq 3/2$. Таким образом, чтобы исключить эту возможность, необходимо, чтобы $y_4 < 3/2$, и, так как мы можем свободно переставлять 1, 2, 3, 4, необходимо даже, чтобы

$$y_k < \frac{3}{2} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{38:9}$$

Если это условие выполняется, то мы можем заключить, что ровно одно из $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ будет $<1/2$. Перестановкой 1, 2, 3 сделаем, чтобы $\beta_3 < 1/2$.

Итак $\beta_1, \beta_2 \geqq 1/2$, $\beta_3 \geqq 0$. Если $\beta_4 \geqq -1$ [1]), то каждая компонента $\vec{\beta}$ будет $\geqq$ соответствующей компоненты $\vec{\alpha}'$, и, так как оба вектора являются дележами (см. сноску 1 на стр. 326) они совпадают: $\vec{\beta} = \vec{\alpha}'$. Поэтому $\vec{\beta} \in \mathbf{V}$.

Следовательно, $\beta_4 < -1$ и $\beta_3 < 1/2$. Перестановка 1 и 3 дает, что на основании (38:B) $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$ по множеству $S = (1, 4)$.

Это, наконец, является противоречием и поэтому завершает проверку (30:5:b) из п. 30.1.1.

---

[1]) Если $\mathrm{v}((4)) = -1$, т. е. если $y_4 = 1$, то это, конечно, имеет место; мы, однако, не хотим предполагать этого (см. сноску 4 на стр. 337).

Условие (38:9), которое нам было нужно для этого доказательства, действительно необходимо: легко проверить, что

$$\vec{\beta}' = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$$

не доминируется нашим множеством **V**, и единственная возможность для того, чтобы этот вектор не являлся дележом, состоит в $-3/2 < \mathrm{v}((4)) = -y_4$, т. е. $y_4 < 3/2$ [1]). Перестановка 1, 2, 3, 4 дает тогда (38:9).

Таким образом, нам необходимы (38:8) и (38:9). Резюмируем:

(38:D) Множество **V** из (37:2) в п. 37.3.2 является решением для игры (38:A) (вместе с (38:6), (38:7)) в том и только в том случае, если

(38:10) $$1 \leqq y_k < \frac{3}{2} \quad \text{для } k = 1, 2, 3, 4.$$

**38.2.4.** Введем вновь в рассмотрение нормировку и редуцирование, чем мы временно пренебрегли, но что необходимо, для того чтобы связать эти результаты с кубом $Q$, как это было указано сразу после (38:A).

Формулы редуцирования из п. 27.1.4 показывают, что доля игрока $k$ должна быть заменена величиной $\alpha_k^0$, где

$$\alpha_k^0 = -\mathrm{v}((k)) + \frac{1}{4}\{\mathrm{v}((1)) + \mathrm{v}((2)) + \mathrm{v}((3)) + \mathrm{v}((4))\} =$$
$$= y_k - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

и

$$\gamma = -\frac{1}{4}\{\mathrm{v}((1)) + \mathrm{v}((2)) + \mathrm{v}((3)) + \mathrm{v}((4))\} = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4).$$

Для двухэлементного множества $S = (i, j)$ значение $\mathrm{v}(S)$ увеличивается по сравнению со своим первоначальным значением 0 на величину

$$\alpha_i^0 + \alpha_j^0 = y_i + y_j - \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{2}(y_i + y_j - y_k - y_l)$$

($k$, $l$ — игроки, отличные от $i$, $j$).

Ясно, что для указанного выше $\gamma$ будет $\gamma \geqq 1 > 0$ (на основании (38:10)); следовательно, игра существенная. Нормировка проводится теперь делением характеристической функции и долей каждого из игроков на $\gamma$. Таким образом, для $S = (i, j)$ значения $\mathrm{v}(S)$ преобразуются далее к значениям

$$\frac{\alpha_i^0 + \alpha_j^0}{\gamma} = 2 \cdot \frac{y_i + y_j - y_k - y_l}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}.$$

---

[1]) Заметим, что тот факт, что **V** не доминирует $\vec{\beta}'$ нельзя исправить добавлением к **V** дележа $\vec{\beta}'$ (когда $y_4 \leqq 3/2$). В самом деле, $\vec{\beta}'$ доминирует $\vec{\alpha}'' = \{0, 0, 0, 0\}$ по множеству $S = (1, 2, 3)$, так что было бы необходимо удалить $\vec{\alpha}''$ из **V**, таким образом создавая новые недоминируемые дележи и т. д.

Если $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 3/2$, то замена единицы на 2/3 приводит нашу игру обратно к форме (37:1) из п. 37.1.2, и этот дележ $\vec{\beta}'$ превращается в $\vec{\alpha}^{\mathrm{IV}} = \{1/3, 1/3, 1/3, -1\}$ из (37:3) в п. 37.4.1. Таким образом, дальнейшие попытки сделать множество **V** решением, вероятно, последовательно превращали бы его в (37:3), (37:4) из п. 37.4.1—2. Это стоит отметить, так как мы начали с (37:2) из п. 37.3.2.

Эти связи между двумя решениями (37:2) и (37:3), (37:4) следует разобрать далее.

Итак, эти значения представляют собой нормированную и редуцированную форму характеристической функции, которая и используется в п. 34.2.1 для представления в кубе $Q$. (34.2) вместе с написанным выше выражением дают формулы

(38:11)
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}, \\ x_2 = \dfrac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4} \\ x_3 = \dfrac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4} \end{cases}$$

для координат $x_1$, $x_2$, $x_3$ в $Q$.

**38.2.5.** Таким образом, равенства (38:10) и (38:11) определяют вместе область $Q$, в которой имеют место эти решения, т. е. решения (37:2) из п. 37.3.2, преобразованные так, как было указано выше. Это определение исчерпывающее, но неявное. Постараемся сделать его явным. Именно, если дана точка $Q$ с координатами $x_1$, $x_2$, $x_3$, проверим, могут ли равенства (38:10) и (38:11) выполняться совместно (с подходящими $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$).

Полагаем, что для предположительных $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ выполняется равенство

(38:12)
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{4}{z},$$

где $z$ неопределено. Тогда уравнения (38:11) принимают вид

(38:12*)
$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 + y_4 = \dfrac{4x_1}{z}, \\ -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = \dfrac{4x_2}{z}, \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = \dfrac{4x_3}{z}. \end{cases}$$

Систему уравнений (38:12) и (38:12*) можно решить относительно $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$:

(38:13)
$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1 + x_1 - x_2 - x_3}{z}, & y_2 = \dfrac{1 - x_1 + x_2 - x_3}{z}, \\ y_3 = \dfrac{1 - x_1 - x_2 + x_3}{z}, & y_4 = \dfrac{1 + x_1 + x_2 + x_3}{z}. \end{cases}$$

Теперь (38:11) удовлетворяется, и мы должны использовать имеющуюся свободу для выбора такого $z$, чтобы удовлетворялось (38:10).

Пусть $w$ — наибольшее, а $v$ — наименьшее из четырех чисел

(38:14)
$$\begin{cases} u_1 = 1 + x_1 - x_2 - x_3, & u_2 = 1 - x_1 + x_2 - x_3, \\ u_3 = 1 - x_1 - x_2 + x_3, & u_4 = 1 + x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$$

Это известные величины, так как предполагается, что $x_1$, $x_2$, $x_3$ заданы.

Ясно, что теперь (38:10) означает, что $1 \leqq v/z$ и что $w/z < 3/2$, т. е. что

(38:15)
$$\frac{2}{3} w < z \leqq v.$$

Очевидно, это условие может выполняться (для $z$) в том и только в том случае, если

(38:16) $$\frac{2}{3}w < v.$$

Но если (38:16) удовлетворяется, то из условия (38:15) следует, что $z$ может принимать бесконечное число значений — целый интервал.

**38.2.6.** Прежде чем сделать какие-либо выводы из (38:15), (38:16), мы приведем явные формулы, выражающие, что стало с решением (37:2) из п. 37.3.2 при наших преобразованиях. Мы должны взять фигурирующие там дележи $\vec{\alpha}'$, $\vec{\alpha}''$, добавить к $k$-й компоненте (т. е. к выигрышу игрока $k$) величину $\alpha_k$ и разделить все это на $\gamma$.

Эти действия преобразуют возможные значения компоненты $k$, которые по (37.2) равны 1/2, 0, —1, следующим образом. Рассмотрим сначала $k = 1$ и используем имеющиеся выше выражения для $\alpha_k$ и $\gamma$ так же, как и в (38:13). Тогда

$$\frac{1}{2} \text{ переходит в } \frac{\frac{1}{2}+\alpha_1}{\gamma} = \frac{2+4y_1-(y_1+y_2+y_3+y_4)}{y_1+y_2+y_3+y_4} = \frac{z}{2}+x_1-x_2-x_3,$$

$$0 \text{ переходит в } \frac{\alpha_1}{\gamma} = \frac{4y_1-(y_1+y_2+y_3+y_4)}{y_1+y_2+y_3+y_4} = x_1-x_2-x_3,$$

$$-1 \text{ переходит в } \frac{-1+\alpha_1}{\gamma} = \frac{-4+4y_1-(y_1+y_2+y_3+y_4)}{y_1+y_2+y_3+y_4} = -z+x_1-x_2-x_3.$$

Для остальных $k = 2, 3, 4$ эти выражения изменяются только в том, что $x_1 - x_2 - x_3$ заменяется в них соответственно [1]) на $-x_1 + x_2 - x_3$, $-x_1 - x_2 + x_3$, $x_1 + x_2 + x_3$.

Резюмируя (и вспоминая (38:14)), мы имеем следующее:

(38:E) Компонента $k$ преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{2} \text{ переходит в } \frac{z}{2}+u_k-1,$$

$$0 \text{ переходит в } u_k-1,$$

$$-1 \text{ переходит в } -z+u_k-1,$$

где $u_1, u_2, u_3, u_4$ из (38:14).

Мы предоставляем читателю переформулировать (37:2) с модификацией (38:E), обращая особое внимание на правильное выполнение требуемых там перестановок 1, 2, 3, 4.

Заметим, что для центра, т. е. для случая $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, модификация (38:E) воспроизводит формулы (38:1) из п. 38.1.1 так, как это нужно.

**38.2.7.** Вернемся теперь к обсуждению (38:15) и (38:16).

Условие (38:16) выражает, что четыре числа $u_1, u_2, u_3, u_4$ из (38:14) не слишком удалены друг от друга: их минимум превосходит 2/3 их максимума, т. е. относительное изменение их величин меньше, чем 2:3.

Это, конечно, справедливо в центре, где $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; там все $u_1, u_2, u_3, u_4 = 1$. Следовательно, в этом случае $v = w = 1$, и (38:15) превращается в $2/3 < z \leqq 1$, доказывая тем самым ранее сделанные утверждения в этом обсуждении (см. (38:3) в п. 38.1.1).

---

[1]) Это непосредственно следует из вида уравнений (38:13) и из рассмотрения влияния перестановок игроков 1, 2, 3, 4 на координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$, что описано в п. 34.3.2.

Обозначим ту часть $Q$, в которой справедливо (38:16), через $Z$. Тогда даже достаточно малая окрестность центра принадлежит $Z$ [1]). Поэтому $Z$ является трехмерной частью внутренности $Q$, содержащей центр внутри себя.

Мы можем также выразить связь $Z$ с диагоналями $Q$, например с диагональю $I$-центр-$VIII$. $Z$ содержит следующие участки диагонали (см. рис. 44): в одну сторону ровно $C$, а в другую — немного меньше, чем половину $B$ [2]). Добавим, что эти решения отличаются от семейства решений, справедливых в (36:B) и (36:C), о которых упоминалось в п. 36.3.

### 38.3. Интерпретация решений

**38.3.1.** Семейство решений, которое мы таким образом нашли, обладает несколькими замечательными особенностями.

Заметим сначала, что для любой игры (т. е. для любой точки $Z$), для которой это семейство вообще дает решение, оно дает бесконечно много решений [3]). Все сказанное в п. 37.5.1 снова приложимо: эти решения представляют собой конечные множества дележей [4]) и обладают полной симметрией игры [5]). Таким образом, ни в одном из этих решений нет «дискриминации». Также им не могут быть предписаны различия в «организационных принципах», которые мы обсуждали выше. Тем не менее для различения этих решений имеется простой «организационный принцип», который можно представить в качественной словесной формулировке. Переходим к его формулировке.

**38.3.2.** Рассмотрим (38:E), где описаны преобразования, которым должно быть подвергнуто (37:2) из п. 37.3.2. Очевидно, что наихудшим возможным исходом для игрока $k$ в этом решении является последнее выражение (так как оно соответствует $-1$), т. е. $-z+u_k-1$. Это выражение $>$ или $=-1$, смотря по тому, будет $z <$ или $= u_k$. Далее, $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ — это четыре числа из (38:14), наименьшее из которых есть $v$. По (38:15) $z \leqq v$, т. е. всегда $-z+u_k-1 \geqq -1$, и знак $=$ имеет место только для наибольшего возможного значения $z$, $z=v$, и то лишь для тех $k$, для которых $u_k$ достигает своего минимума $v$.

---

[1]) Если $x_1$, $x_2$, $x_3$ отличаются от 0 менее чем на $\frac{1}{15}$, то каждое из четырех чисел $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ из (36:14) $< 1+\frac{3}{15}=\frac{6}{5}$ и $> 1-\frac{3}{15}=\frac{4}{5}$; следовательно, относительная их величина изменяется $< \frac{6}{5}:\frac{4}{5}=\frac{3}{2}$. Поэтому мы все еще находимся в $Z$. Другими словами, $Z$ содержит куб с тем же центром, что и у $Q$, но имеющий 1/15 (линейного) размера $Q$. В действительности $Z$ несколько шире; его объем равен примерно 1/1000 объема $Q$.

[2]) На этой диагонали $x_1=x_2=x_3$; поэтому $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ равны (трижды) $1-x_1$ и $1+3x_1$. Так как для $x_1 \geqq 0$ должно быть $v=1-x_1$ и $w=1+3x_1$, неравенство (38:16) принимает вид $x_1 < 1/2$. Для $x_1 \leqq 0$ мы имеем $v=1+3x_1$, $w=1-x_1$; следовательно, (38:16) становится $> -1/11$. Поэтому пересечение равно

$$0 \leqq x_1 < \frac{1}{9} \text{ (это в точности } C\text{)},$$

$$0 \geqq x_1 > -\frac{1}{11} \left(\text{а } B \text{ — это } 0 \geqq x_1 > -\frac{1}{5}\right).$$

[3]) Решение, которое мы нашли, содержит четыре параметра: $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, а игры, для которых оно справедливо,— только три параметра: $x_1$, $x_2$, $x_3$.

[4]) Каждое насчитывает 13 элементов, как в (37:2) из п. 37.3.2.

[5]) В центре $x_1=x_2=x_3=0$ мы имеем $y_1=y_2=y_3=y_4$ (см. (38:13)), т. е. симметрию относительно 1, 2, 3, 4. На диагонали $x_1=x_2=x_3$ мы имеем $y_1=y_2=y_3$ (см. (38:13)), т. е. симметрию относительно 1, 2, 3.

Сформулируем сказанное:

(38:F) В этом семействе решений, даже в случае наихудшего возможного исхода, игрок $k$ получает, в общем, выигрыш несомненно лучший, чем он мог бы сам себе гарантировать, т. е. $\mathrm{v}((k)) = -1$. Это преимущество исчезает только тогда, когда $z$ принимает наибольшее возможное значение, $z = v$, и то только для тех $k$, для которых соответствующее число $u_1, u_2, u_3, u_4$ в (38:14) минимально.

Другими словами: в этих решениях проигрывающий игрок вообще не полностью «эксплуатируется»; его выигрыш не сводится к наименьшему возможному уровню, к тому уровню, который он может себе гарантировать самостоятельно, т. е. $\mathrm{v}((k)) = -1$. Мы раньше наблюдали такое ограничение со стороны выигрывающей коалиции в «мягком» варианте «дискриминирующих» решений игры трех лиц, рассмотренной в п. 33.1. (т. е. когда $c > -1$, см. конец п. 33.1.2). Но там только один игрок мог быть объектом такого неравноправия в каком-либо решении, и это явление со своим исключительным свойством произошло из конкуренции коалиций. Теперь нет больше дискриминации или сегрегации; вместо этого данное ограничение применяется вообще ко всем игрокам, и в центре $Q$ (см. (38:1) в п. 38.1.1, где $z < 1$) решение даже симметрично!

Замечание. Существует также количественное различие, имеющее некоторую значимость. Как в нашем настоящем изложении (игра четырех лиц, соответствующая центру куба $Q$), так и в ранее рассмотренном случае (игра трех лиц в смысле п. 33.1), наилучшее, что игрок в состоянии получить (в тех решениях, которые мы нашли), это 1/2, а наихудшее —1.

Верхний предел величины, получаемой в случае поражения в тех наших решениях, где игрок не полностью «эксплуатируется», теперь равен —2/3 (т. е. $-z$, где $2/3 < z \leqq 1$), а раньше он равнялся 1/2 (т. е. $c$, где $-1 \leqq c < 1/2$). Поэтому эта зона покрывает теперь $\frac{(-2/3)-(-1)}{1/2-(-1)} = \frac{1/3}{3/2}$, т. е. $22\frac{2}{9}\%$ рассматриваемого интервала, в то время как раньше она покрывала 100%.

**38.3.3.** Даже когда $z$ принимает максимальное значение $v$, в общем случае только один игрок утратит это преимущество, так как вообще четыре числа $u_1, u_2, u_3, u_4$ из (38:14) различны и только одно из них равно своему минимуму $v$. Все четыре игрока утратят его одновременно, только если все числа $u_1, u_2, u_3, u_4$ равны своему минимуму $v$, т. е. равны друг другу, и одного взгляда на (38:14) достаточно, чтобы показать, что это возможно только тогда, когда $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, т. е. в центре.

Это явление неполной «эксплуатации» проигрывающего игрока является очень важной возможной (но не необходимой) особенностью наших решений, т. е. социальных норм. По-видимому, в общей теории оно играет еще бо́льшую роль.

В заключение отметим, что некоторые из решений, упомянутых нами, но не описанных в п. 36.3.2, также обладают этой особенностью. Это решения в $C$ на рис. 44. Но тем не менее они отличаются от решений, которые мы здесь рассмотрели.

*Глава VIII*

# НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ $n \geq 5$ УЧАСТНИКОВ

## § 39. ЧИСЛО ПАРАМЕТРОВ В РАЗЛИЧНЫХ КЛАССАХ ИГР

### 39.1. Ситуация для $n = 3, 4$

**39.1.** Мы знаем, что существенные игры представляют подлинный предмет нашего исследования и что всегда можно предполагать, что они заданы в редуцированной форме с $\gamma = 1$. В этом представлении существует ровно одна игра трех лиц с нулевой суммой, а игры четырех лиц образуют трехмерное многообразие [1]). Далее мы увидели, что (единственная) игра трех лиц с нулевой суммой автоматически симметрична, а трехмерное многообразие игр четырех лиц с нулевой суммой содержит ровно одну симметричную игру.

Выразим это для каждого из перечисленных множеств игр посредством указания его размерности, т. е. числа неопределенных параметров, которым следует приписать конкретные (численные) значения, для того чтобы охарактеризовать игру этого класса. Наиболее удобной формой является табл. 24, приведенная далее для всех $n \geqq 3$ [2]). Только что сделанные утверждения приведены в строках этой таблицы, соответствующих случаям $n = 3, 4$.

### 39.2. Ситуация для всех $n \geqq 3$

**39.2.1.** Построим теперь интересующую нас таблицу, определяя число параметров игры $n$ лиц с нулевой суммой, как для класса всех таких игр, так и для класса всех симметричных игр.

Характеристическая функция является совокупностью стольких чисел $\mathrm{v}(S)$, сколько существует подмножеств $S$ в $I = (1, \ldots, n)$, т. е. $2^n$. Эти числа подчинены ограничениям (25:3:a) — (25:3:c) из п.25.3.1, а также ограничениям, вытекающим из редуцированности формы и нормировки $\gamma = 1$, что выражено в (27:5) из п. 27.2. Согласно (25:3:b) можно найти $\mathrm{v}(-S)$ по данному $\mathrm{v}(S)$; следовательно, число параметров уменьшается в два раза [3]), и мы имеем $2^{n-1}$ вместо $2^n$. Затем ограничение (25:3:a) фиксирует одно из остающихся $\mathrm{v}(S)$, именно $\mathrm{v}((\varnothing))$; (27:5) фиксирует $n$ из остающихся $\mathrm{v}(S)$, именно $\mathrm{v}((1)), \ldots, \mathrm{v}((n))$; следовательно, все перечисленные ограничения уменьшают число параметров на $n + 1$ [4]). Таким образом, мы имеем $2^{n-1} - n - 1$ параметров. Наконец, ограничение (25:3:c) рассматривать не нужно, так как оно содержит только неравенства.

---

[1]) Что касается общих замечаний, см. пп. 27.1.4 и 27.3.2; относительно игры трех лиц с нулевой суммой см. п. 29.1.2; относительно игры четырех лиц с нулевой суммой см. п. 34.2.1.

[2]) Не имеется существенных игр с нулевой суммой для случаев $n = 1, 2$!

[3]) $S$ и $-S$ никогда не являются одним и тем же множеством!

[4]) $S = \varnothing, (1), \ldots, (n)$ отличны друг от друга и от дополнений каждого из этих множеств.

**39.2.2.** Если игра симметрична, то $v(S)$ зависит только от числа элементов $p$ множества $S$: $v(S) = v_p$ (см. п. 28.2.1). Таким образом, $v(S)$ — это совокупность стольких чисел $v_p$, сколько имеется $p = 0, 1, \ldots, n$, т. е. $n+1$ чисел. Эти числа подчинены ограничениям (28:11:a) — (28:11:c) из п. 28.2.1; редуцированная форма получается автоматически, и мы также требуем, чтобы было $v_1 = -\gamma = -1$. Ограничение (28:11:b) фиксирует $v_{n-p}$ при данном $v_p$; следовательно, оно уменьшает вдвое число параметров, если $n - p \neq p$. Если $n - p = p$ [1], т. е. $n = 2p$ (что может быть только при четном $n$, и тогда $p = n/2$), из (28:11:b) следует, что это $v_p$ должно быть равно нулю. Поэтому мы имеем $\frac{n+1}{2}$ параметров, если $n$ нечетно, и $\frac{n}{2}$, если $n$ четно, вместо первоначальных $n+1$. Далее, ограничение (28:11:a) фиксирует один из остающихся параметров $v_p$, именно $v_0$; а $v_1 = -\gamma = -1$ фиксирует еще одно из остающихся $v_p : v_1$; следовательно эти ограничения уменьшают число параметров еще на 2 [2]. Таким образом, мы имеем $\frac{n+1}{2} - 2$ или $\frac{n}{2} - 2$ параметров. Наконец, ограничение (28:11:c) не нужно рассматривать, так как оно содержит только неравенства.

**39.2.3.** Сведем всю эту информацию в табл. 24. Выпишем явно эти значения для конкретных $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$, первые два из которых мы рассмотрели раньше.

Таблица 24. Существенные игры (редуцированная форма, $\gamma = 1$)

| Число игроков | Все игры | Симметричные игры |
|---|---|---|
| 3 | 0* | 0* |
| 4 | 3 | 0* |
| 5 | 10 | 1 |
| 6 | 25 | 1 |
| 7 | 56 | 2 |
| 8 | 119 | 2 |
| ... | ... | ... |
| $n$ | $2^{n-1} - n - 1$ | $\frac{n+1}{2} - 2$ для нечетного $n$<br>$\frac{n}{2} - 2$ для четного $n$ |

* Означает, что игра единственная.

Быстрое возрастание элементов в левом столбце табл. 24 может служить еще одним указанием (если таковое необходимо) на возрастание сложности игры вместе с числом ее участников. Представляется достойным упоминания, что числа в правом столбце, т. е. для симметричных игр, также возрастают, хотя и гораздо медленнее.

[1]) Сопоставьте это со сноской 3 на стр. 344.

[2]) $p = 0, 1$ отличны друг от друга и от каждого из $n - p$ (последнее только ввиду условия $n \geqq 3$).

# § 40. СИММЕТРИЧНАЯ ИГРА ПЯТИ ЛИЦ

## 40.1. Формализация симметричной игры пяти лиц

**40.1.1.** Мы не будем пытаться непосредственно исследовать игру пяти лиц с нулевой суммой. Систематическая теория еще недостаточно разработана, чтобы это осуществить, а для описательного и казуистического подхода (как это было сделано для игры четырех лиц с нулевой суммой) число параметров этой игры, именно 10, слишком велико.

Однако возможно в последнем смысле рассмотреть симметричные игры пяти лиц с нулевой суммой. Число параметров, в данном случае 1, мало, но отлично от нуля, и это представляет собой качественно новое явление, заслуживающее внимания. Для $n = 3, 4$ существовала только одна симметричная игра, так что для $n = 5$ впервые строение симметричной игры допускает некоторое разнообразие.

**40.1.2.** Симметричная игра пяти лиц с нулевой суммой характеризуется числами $v_p$ и $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ из п. 28.2.1, подчиненными сформулированным там ограничениям (28:11:a) — (25:11:c). Из ограничений (28:11:a), (28:11:b) следует, что (в случае $\gamma = 1$)

(40:1) $$v_0 = 0, \quad v_1 = -1, \quad v_4 = 1, \quad v_5 = 0$$

и $v_2 = -v_3$, т. е.

(40:2) $$v_2 = -\eta, \quad v_3 = \eta.$$

Далее из (28:11:c) вытекает, что $v_{p+q} \geqq v_p + v_q$ для $p + q \leqq 5$, и мы можем подчинить $p$ и $q$ дальнейшим ограничениям из (28:12). Следовательно, $p = 1$, $q = 1, 2$ [1]), и из этих двух неравенств получается (при использовании (40:1) и (40:2)):

$$p = 1, \quad q = 1: \ -2 \leqq -\eta; \quad p = 1, \quad q = 2: \ -1 - \eta \leqq \eta;$$

т. е.

(40:3) $$-\frac{1}{2} \leqq \eta \leqq 2.$$

Резюмируем.

(40:A) Симметричная игра пяти лиц с нулевой суммой характеризуется одним параметром $\eta$ посредством условий (40:1) и (40:2). Область изменения $\eta$ описывается неравенством (40:3).

## 40.2. Два крайних случая

**40.2.1.** Может оказаться полезным дать непосредственную картину описанных выше симметричных игр. Рассмотрим сначала два конца интервала (40:3):

$$\eta = 2, \ -\frac{1}{2}.$$

Пусть сначала $\eta = 2$. В этом случае $v(S) = -2$ для любого двухэлементного множества $S$, т. е. любая коалиция из двух игроков проигры-

[1]) Это легко проверяется при помощи (28:12) или использования неравенств из сноски 2 на стр. 278. Они дают $1 \leqq q \leqq 2$ и, следовательно, так как числа $p$ и $q$ целые, $p = 1$, $q = 1, 2$.

вает[1]). Таким образом, коалиция из трех (являющаяся дополнением к только что рассмотренной) оказывается выигрывающей. Это описывает нам всю суть дела: в постепенной кристаллизации коалиций точка, в которой происходит переход от проигрыша к победе, находится там, где размер коалиции увеличивается от двух к трем, и в этой точке переход составляет 100% [2]).

Резюмируем:

(40:B) $\eta = 2$ описывает игру, в которой единственной целью всех игроков является образование коалиции из трех игроков.

**40.2.2.** Рассмотрим теперь случай $\eta = -1/2$. В этом случае мы имеем следующее:

$$\mathrm{v}(S) = \begin{cases} 1 \\ \\ \frac{1}{2} \end{cases} \text{ если } S \text{ имеет } \begin{cases} 4 \\ \\ 2 \end{cases} \text{ элемента.}$$

Коалиция из четырех всегда выигрывает [3]).

Теперь выше приведенная формула показывает, что коалиция из двух так же хороша, в смысле доли каждого участника, как и коалиция из четырех; следовательно, разумно и первую, и последнюю коалиции считать выигрывающими в равной мере. Если мы станем на такую более широкую точку зрения относительно того, что такое выигрыш, то мы снова можем утверждать, что о процессе разыгрывания игры можно сказать все, что нужно: в образовании коалиций точка, в которой происходит переход от проигрыша к победе, находится там, где размер коалиции увеличивается от одного к двум: в этой точке мы имеем 100-процентный переход [4]).

Резюмируем:

(40:C) $\eta = -1/2$ описывает игру, в которой единственной целью всех игроков является образование коалиций из двух игроков.

**40.2.3.** На основании выводов (40:B) и (40:C) было бы совсем просто эвристически угадать решения для соответствующих им игр. Это так же просто, как и строгое доказательство того, что эти множества дележей действительно являются решениями, но мы не будем рассматривать этот вопрос более подробно.

---

[1]) См. обсуждение в п. 35.1.1, особенно замечание на стр. 313.

[2]) Один игрок проигрывает так же, как и двое; четверо выигрывают не больше троих. Конечно, у коалиции из трех нет никаких оснований принять четвертого партнера. Представляется (эвристически) правдоподобным, что если они его примут, то только на наихудших из возможных условий. Но тем не менее такая коалиция из четырех, рассматриваемая как одно целое, выигрывает, так как остающийся изолированный игрок проигрывает.

[3]) В любой игре $n$ лиц с нулевой суммой любая коалиция из $n - 1$ выигрывает, так как изолированный игрок всегда проигрывает. (См. сноску выше.)

[4]) Один игрок проигрывает, а два или четыре игрока выигрывают. Коалиция из трех игроков является составным случаем, заслуживающим некоторого внимания: $\mathrm{v}(S) = -1/2$ для трехэлементного множества $S$, т. е. это значение получается добавлением $-1$ к значению $1/2$ для двухэлементного множества. Таким образом, коалиция из трех не лучше, чем выигрывающая коалиция из двух (которая в ней содержится) плюс отдельно остающийся изолированный и проигрывающий игрок. Эта коалиция является такой комбинацией выигрывающей и проигрывающей групп, которая не изменяет прежней ситуации.

Прежде чем перейти к рассмотрению других значений $\eta$ из (40:3), заметим, что выводы (40:B) и (40:C), очевидно, представляют собой простейшие примеры общего метода определения игр. Эта процедура (более общая, чем в главе X, на которую была ссылка в замечании на стр. 313) будет исчерпывающим образом рассмотрена в другом месте (в том числе и для асимметричных игр). Она подчинена некоторым ограничениям арифметической природы; таким образом ясно, что не может быть (существенных, симметричных, с нулевой суммой) игр $n$ лиц, в которых любая коалиция из $p$ лиц выигрывает, если $p$ является делителем $n$, так как в противном случае могут образоваться $n/p$ таких коалиций, каждая из которых выигрывает, и не остается проигрывающих игроков. С другой стороны, то же самое требование при $p = n - 1$ вообще не накладывает ограничений на игру (см. сноску 3, стр. 347).

## 40.3. Связь между симметричной игрой пяти лиц и 1,2,3-симметричными играми четырех лиц

**40.3.1.** Рассмотрим теперь значение $\eta$, расположенное внутри интервала (40:3). Эта ситуация в некотором роде аналогична ситуации, рассмотренной в конце п. 35.3. У нас имеются некоторые эвристические соображения относительно условий на обоих концах (40:3) (см. выше). Любая точка $\eta$ из (40:3) в некотором смысле «окружена» этими концевыми точками. Точнее говоря, она является их центром тяжести при подходящих весах этих точек [1]). Замечания, сделанные выше, применяются снова: хотя это построение описывает все игры (40:3) в виде комбинаций крайних случаев (40:B), (40:C), тем не менее неизвестно, могут ли быть стратегии исходной игры получены непосредственно из стратегий крайних игр. Наш опыт в случае игры четырех лиц с нулевой суммой говорит сам за себя.

Имеется, однако, и другая аналогия с играми четырех лиц, дающая некоторые эвристические соображения. Число параметров в нашем случае такое же, как для игр четырех лиц с нулевой суммой, симметричных относительно игроков 1, 2, 3; мы теперь имеем единственный параметр $\eta$, пробегающий интервал

(40:3) $$-\frac{1}{2} \leqq \eta \leqq 2,$$

а упомянутые игры имели параметр $x_1$, изменяющийся в

(40:4) $$-1 \leqq x_1 \leqq 1$$ [2]).

Эта аналогия между полностью симметричной игрой пяти лиц и 1, 2, 3-симметричной игрой четырех лиц пока чисто формальная. Однако в ней скрывается более глубокий смысл. Чтобы увидеть это, поступим следующим образом.

**40.3.2.** Рассмотрим симметричную игру пяти лиц, где $\eta$ принадлежит интервалу (40:3). Модифицируем теперь эту игру, объединяя игроков 4 и 5 в одно лицо, т. е. в игрока 4'. Обозначим новую игру через Г'. Важно понять, что Г' — совершенно новая игра: мы не утверждали, что в Г игроки 4 и 5 будут обязательно действовать совместно, т. е. составят коалицию, и т. п., или что имеются какие-то общие стратегические при-

[1]) Читатель легко сможет вывести это представление в смысле замечания на стр. 319 с помощью наших уравнений (40:1), (40:2) в п. 40.1.2.

[2]) См. п. 35.3.2. В представлении на кубе $Q$, использованного там, $x_1 = x_2 = x_3$.

чины, которые мотивировали образование именно такой коалиции[1]). Мы заставили игроков 4 и 5 объединиться; мы сделали это в результате изменения правил игры и тем самым заменой игры Г на игру Г′.

Итак, Г — это симметричная игра пяти лиц, а Г′ — 1, 2, 3-симметричная игра четырех лиц[2]). По данному $\eta$ для Г мы хотим определить $x_1$ для Г′, для того, чтобы определить соответствие между (40:3) и (40:4). Затем мы будем исследовать, существуют ли, несмотря на все сказанное, какие-либо связи между стратегиями, т. е. между решениями игр Г и Г′.

Характеристическая функция $\mathrm{v}'(S)$ игры Г′ выражается непосредственно через характеристическую функцию $\mathrm{v}(S)$ игры Г. В самом деле:

$$\mathrm{v}'((1)) = \mathrm{v}((1)) = -1, \qquad \mathrm{v}'((2)) = \mathrm{v}((2)) = -1,$$
$$\mathrm{v}'((3)) = \mathrm{v}((3)) = -1, \qquad \mathrm{v}'((4')) = \mathrm{v}((4,\ 5)) = -\eta,$$
$$\mathrm{v}'((1,\ 2)) = \mathrm{v}((1,\ 2)) = -\eta, \qquad \mathrm{v}'((1,\ 3)) = \mathrm{v}((1,\ 3)) = -\eta,$$
$$\mathrm{v}'((2,\ 3)) = \mathrm{v}((2,\ 3)) = -\eta, \qquad \mathrm{v}'((1,\ 4')) = \mathrm{v}((1,\ 4,\ 5)) = \eta,$$
$$\mathrm{v}'((2,\ 4')) = \mathrm{v}((2,\ 4,\ 5)) = \eta, \qquad \mathrm{v}'((3,\ 4')) = \mathrm{v}(3,\ 4,\ 5)) = \eta,$$
$$\mathrm{v}'((1,\ 2,\ 3)) = \mathrm{v}((1,\ 2,\ 3)) = \eta, \qquad \mathrm{v}'((1,\ 2,\ 4')) = \mathrm{v}((1,\ 2,\ 4, 5)) = 1,$$
$$\mathrm{v}'((1,\ 3,\ 4')) = \mathrm{v}((1,\ 3,\ 4,\ 5)) = 1, \qquad \mathrm{v}'((2,\ 3,\ 4')) = \mathrm{v}((2,\ 3,\ 4,\ 5)) = 1$$

и, разумеется,

$$\mathrm{v}'(\varnothing) = \mathrm{v}'((1,\ 2,\ 3,\ 4')) = 0.$$

В то время как игра Г была нормирована и редуцирована, игра Г′ не является таковой, и мы должны привести ее к такой форме, так как мы хотим вычислить для нее параметры $x_1$, $x_2$, $x_3$, т. е. найти ее местоположение в кубе $Q$ из п. 34.2.2.

Поэтому применим сначала формулы редуцирования из п. 27.1.4. Они показывают, что выигрыш игрока $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4'$ должен быть заменен величиной $\alpha_k^0$, где

$$\alpha_k^0 = -\mathrm{v}'((k)) + \frac{1}{4}\{\mathrm{v}'((1)) + \mathrm{v}'((2)) + \mathrm{v}'((3)) + \mathrm{v}'((4'))\}.$$

и

$$\gamma = -\frac{1}{4}\{\mathrm{v}'((1)) + \mathrm{v}'((2)) + \mathrm{v}'((3)) + \mathrm{v}'((4'))\}.$$

Следовательно,

$$\alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \alpha_3^0 = \frac{1-\eta}{4}, \quad \alpha_4^0 = -\frac{3(1-\eta)}{4}, \quad \gamma = \frac{3+\eta}{4}.$$

Ясно, что здесь $\gamma \geqq \dfrac{3-\frac{1}{2}}{4} = \dfrac{5}{8} > 0$ по (40:3); следовательно, игра является существенной. Нормировка осуществляется теперь делением доли каждого игрока на $\gamma$.

---

[1]) Это должно контрастировать с рассуждениями п. 36.1.2, где аналогичная комбинация двух игроков была составлена при таких условиях, что это объединение казалось стратегически оправданным.

[2]) Участники игры Г — это игроки 1, 2, 3, 4, 5, все равноправные в исходной игре Г. Участники игры Г′ — это игроки 1, 2, 3 и составной игрок (4, 5), т. е. игрок 4′. Ясно, что 1, 2, 3 играют свою прежнюю роль, а 4′ — другую.

Таким образом, для двухэлементного множества $S = (i, j)$ $\text{v}'(S)$ заменяется на

$$\text{v}''(S) = \frac{\text{v}'(S) + \alpha_i^0 + \alpha_j^0}{\gamma}.$$

Теперь простое вычисление дает нам

$$\text{v}''((1, 2)) = \text{v}''((1, 3)) = \text{v}''((2, 3)) = -\frac{2(3\eta - 1)}{3 + \eta},$$

$$\text{v}''((1, 4')) = \text{v}''((2, 4')) = \text{v}''((3, 4')) = \frac{2(3\eta - 1)}{3 + \eta}.$$

Эта характеристическая функция является нормированной и редуцированной формой, которая использовалась в п. 34.2 для представления в кубе $Q$. Равенства (34:2) из п. 34.2.1 вместе с приведенным выше выражением дают формулу $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{3\eta - 1}{3 + \eta}$. При $x_1 = x_2 = x_3$ это соотношение можно также переписать в виде

(40:5) $$(3 - x_1)(3 + \eta) = 10.$$

Теперь легко проверить, что (40:5) отображает $\eta$-область (40:3) на $x_1$-область (40:4). Это отображение, очевидно, монотонно. Все подробности

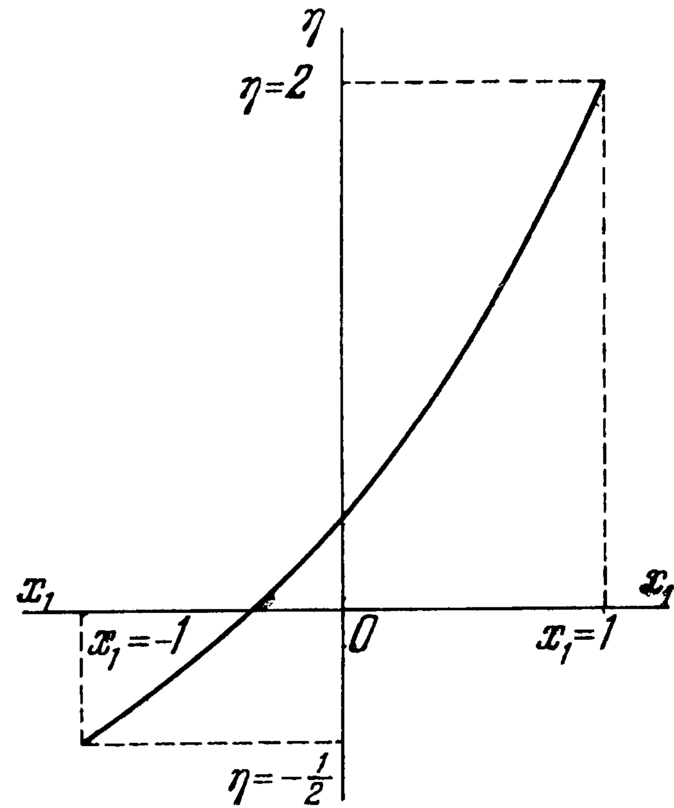



Рис. 5.

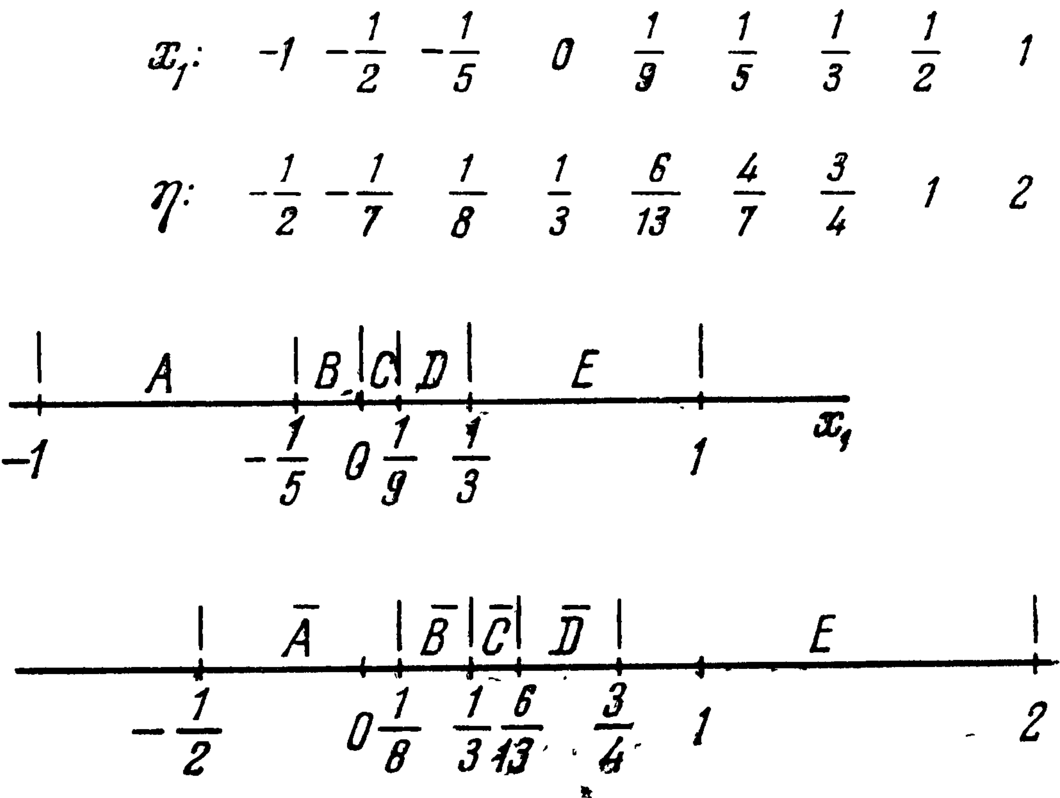



Рис. 46.

видны из рис. 45 и из таблицы соответствующих значений $x_1$ и $\eta$ на рис. 46. Кривая на рис. 45 отвечает соотношению (40:5) в плоскости $x_1$, $\eta$. Ясно, что эта кривая является гиперболой (ее дугой).

**40.3.3.** Наш анализ 1-, 2-, 3-симметричных игр четырех лиц завершился результатом, зафиксированным в п. 36.3.2: такие игры, т. е. диагональ $I$-центр-$VIII$ в $Q$, представляющая их, делятся на пять классов $A$ — $E$, каждый из которых характеризуется определенным качественным типом решений. Расположение зон $A$ — $E$ на диагонали $I$-центр-$VIII$, т. е. на интервале $-1 \leqq x_1 \leqq 1$, показано на рис. 44.

Полученные результаты наводят поэтому на мысль о рассмотрении соответствующих классов симметричных игр пяти лиц Г в надежде, что из сравнения каждого класса с классом 1,2,3-симметричных игр четырех лиц Г′ появятся некоторые эвристические соображения о нахождении их решений.

Используя таблицу на рис. 46, мы получаем зоны $\bar{A} - \bar{E}$ в интервале $-1 \leqq \eta \leqq 2$, являющиеся образами зон $A - E$ в интервале $-1 \leqq x_1 \leqq 1$. Все детали видны на рис. 46.

На этой основе можно провести детальный анализ симметричных игр пяти лиц. При этом обнаруживается, что зоны $\bar{A}$, $\bar{B}$ на самом деле играют ту роль, которую мы от них и ожидали, но зоны $\bar{C}$, $\bar{D}$ и $\bar{E}$ следует заменить другими: $\bar{C}'$ и $\bar{D}'$. Эти зоны $\bar{A} - \bar{D}'$ в интервале $-\frac{1}{2} \leqq \eta \leqq 2$ и их прообразы $A - D'$ в интервале $-1 \leqq x_1 \leqq 1$ (что получено опять с помощью таблицы на рис. 46) изображены на рис. 47.

Замечательным оказывается тот факт, что $x_1$-диаграмма рис. 47 оказывается более симметричной, чем диаграмма рис. 46, хотя именно последняя важна для 1-, 2-, 3-симметричных игр четырех лиц.

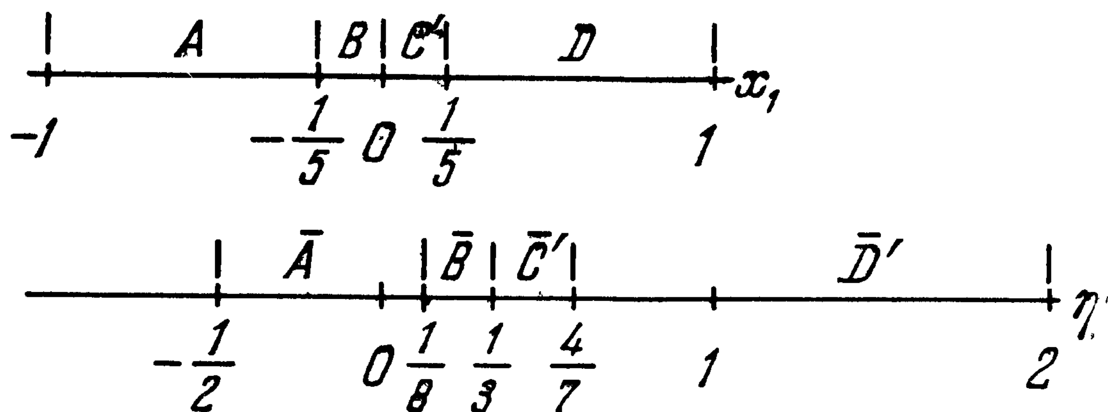


Рис. 47.

**40.3.4.** Анализ симметричных игр пяти лиц имеет также некоторую эвристическую ценность, помимо непосредственно даваемой им информации. В самом деле, сравнивая симметричную игру пяти лиц Г с соответствующей ей 1, 2, 3-симметричной игрой четырех лиц Г′ и изучая различия в их решениях, мы замечаем стратегические эффекты объединения игроков 4 и 5 в одного (составного) игрока 4′. В той мере, в которой решения не представляют никаких существенных трудностей (как указано выше, это будет в случае зон $\bar{A}$ и $\bar{B}$), можно сказать, что такое объединение не влияет на действительно существенные стратегические рассмотрения [1]. С другой стороны, когда возникают такие различия (это случается в остальных зонах), мы сталкиваемся с той интересной ситуацией, что даже если 4 и 5 кооперируются в Г, их совместная позиция разрушается возможностью их разобщения [2].

Из-за недостатка места дальнейшее обсуждение, основанное на строгом понятии решений, проводиться не будет.

---

[1]) Конечно, в решениях игры Г следует ожидать изменений, когда игроки 4 и 5 находятся в различных коалициях. Ясно, что это не может иметь аналогии в Г′. Все, что мы понимаем под отсутствием существенных различий, это то, что дележи в решениях Г, которые указывают на коалицию 4 и 5, должны соответствовать эквивалентным дележам в решении Г′.

Эти идеи требуют дальнейшей разработки, которая возможна, но которая завела бы слишком далеко, чтобы излагать ее здесь.

[2]) Уже в п. 22.2 наше первое рассмотрение игры трех лиц показало, что раздел дохода внутри коалиции определяется возможностями каждого партнера в случае его отделения. Но ситуация, которую мы сейчас наблюдаем, иная. В рассматриваемой сейчас игре Г может оказаться, что это «фактическое» положение влияет даже на общий выигрыш игроков 4 и 5.

Качественный смысл такой возможности наилучшим образом обнаруживается при рассмотрении следующего положения: когда предварительная коалиция 4 и 5 торгуется о дальнейших союзах, ее позиция при переговорах зависит от случая, когда их коалиция нерасторжима (в Г′), или когда допускается противное (в Г).

*Глава IX*

# КОМПОЗИЦИЯ И РАЗЛОЖЕНИЕ ИГР

## § 41. КОМПОЗИЦИЯ И РАЗЛОЖЕНИЕ

### 41.1. Поиски игр $n$ лиц, для которых можно найти все решения

**41.1.1.** Из двух предыдущих глав видна та скорость, с которой возрастает сложность нашей задачи при увеличении числа $n$ участников до 4, 5 и т. д. Несмотря на всю свою неполноту, приведенные рассуждения обнаружили такую тенденцию к разрастанию, что продвижение по этому пути за пределы случая пяти участников должно представляться совершенно безнадежным [1]). Кроме того, фрагментарный характер полученных этим способом результатов сильно ограничивает их пригодность для того, чтобы дать нам представление об общих возможностях теории.

С другой стороны, совершенно необходимо хотя бы в какой-то степени выяснить условия, которые начинают проявляться при больших значениях $n$. Помимо того, что это чрезвычайно важно для ожидаемых экономических и социологических приложений, необходимо учитывать также, что каждое увеличение числа $n$ вызывает качественно новые явления. Это было ясно для каждого из случаев $n = 2, 3, 4$ (см. пп. 20.1.1, 20.2, 35.1.3, а также замечание на стр. 242), и если мы не наблюдали этого при $n = 5$, то это могло произойти из-за недостатка подробной информации об этом случае. В дальнейшем (см. конец п. 46.12) будет выяснено, что весьма важная качественная особенность появится впервые при $n = 6$.

**41.1.2.** По изложенным причинам необходимо найти некоторый метод исследования игр с большими значениями $n$. При существующем состоянии дел мы не можем надеяться на какое-либо систематическое или исчерпывающее исследование. Поэтому естественный подход будет состоять в нахождении некоторых частных классов игр с многими участниками [2]), с которыми можно успешно иметь дело. Во многих областях точных и естественных наук обычная практика детального изучения подходящих частных случаев (которые практически поддаются разрешению и вместе с тем воплощают основные принципы) приводит к успехам систематической и исчерпывающей теории.

Мы опишем и обсудим два таких класса частных случаев. Их можно рассматривать как широкие обобщения двух игр четырех лиц, так что каждая из этих игр является прототипом одного из этих двух классов. Эти две игры четырех лиц соответствуют восьми вершинам куба $Q$, введенного в п. 34.2.2. В действительности мы увидим, что эти вершины представляют только два стратегически различных типа игр: с одной стороны, вершины I, V, VI, VII, рассмотренные в п. 35.1, и с другой, — вершины II, III, IV, VIII, рассмотренные в п. 35.2. Таким образом, вершины I и VIII куба $Q$ являются прототипами тех обобщений, которым будут посвящены эта и следующая главы.

---

[1]) Как было видно в главе VIII, уже для пяти участников пришлось ограничиться симметричным случаем.

[2]) Причем они участвуют в игре так, что каждый из них играет существенную роль!

### 41.2. Первый тип. Композиция и разложение

**41.2.1.** Рассмотрим сначала вершину VIII куба $Q$, изученную в п. 35.2. Как было выяснено в п. 35.2.2, эта игра имеет следующую характерную черту: множество четырех игроков распадается в ней на два отдельных подмножества (одно, состоящее из трех игроков, а другое — из одного), которые не взаимодействуют друг с другом. Иначе говоря, можно считать, что игроки, составляющие каждое множество, участвуют в отдельной игре, имеют дело друг с другом и совершенно не связаны с игроками из другого множества.

Естественным обобщением этой игры является игра $\Gamma$ $n = k + l$ лиц, обладающая следующим свойством: множество игроков распадается на два подмножества, соответственно из $k$ и $l$ элементов, причем ни один игрок из одного подмножества не взаимодействует ни с одним игроком из другого подмножества. Таким образом, можно считать, что игроки каждого подмножества участвуют в отдельной игре (эти игры можно соответственно обозначить через $\Delta$ и $\mathrm{H}$), взаимодействуют только между собой и совершенно не связаны с игроками из другого множества.

Эту связь между играми $\Gamma$, $\Delta$ и $\mathrm{H}$ мы будем описывать в следующих терминах: *композиция* игр $\Delta$ и $\mathrm{H}$ дает игру $\Gamma$ и, обратно, игру $\Gamma$ можно *разложить* на *компоненты* $\Delta$ **и** $\mathrm{H}$ [1]).

Замечание. При первоначальном описании игры в п. 35.2 второе множество состояло из одного игрока, который назывался также «болваном». Это обстоятельство наводит на мысль о следующем обобщении, отличном от описанного выше: это — игра, в которой игроки распадаются на два таких подмножества, что игроки первого подмножества взаимодействуют только между собой и т. д., а игроки второго подмножества не оказывают влияния на игру ни в отношении своей собственной судьбы, ни в отношении судьбы остальных игроков (такие игроки тогда являются «болванами»).

Это, однако, лишь частный случай обобщения, которое мы рассматриваем. Оно получится, если в качестве игры $\mathrm{H}$ второго подмножества игроков взять несущественную игру, т. е. такую игру, в которой каждому игроку приписан определенный выигрыш, на который ни один из игроков не может влиять. (См. п. 27.3.1 и конец п. 43.4.2. Возможно, что игрок в несущественной игре мог бы ухудшить свое положение, играя неподходящим образом. Для «болвана» нам следовало бы исключить эту возможность, но этот факт не имеет большого значения.)

Общее исследование, которое мы собираемся предпринять (для случая, когда обе игры $\Delta$ и $\mathrm{H}$ существенны), обнаружит явление, не проявляющееся в том частном случае, который описывает вершина VIII п. 35.2, т. е. в случае «болванов» (игра $\mathrm{H}$ несущественна). Это новое явление будет обсуждаться в пп. 46.7, 46.8, а случай «болванов», когда ничего нового не наблюдается,— в п. 46.9.

**41.2.2.** Прежде чем мы точно сформулируем приведенные выше словесные определения, уместно сделать некоторые качественные замечания.

Во-первых, надо заметить, что наш метод композиции и разложения во многом сходен с методом, который успешно применялся во многих областях современной математики [2]). Так как природа этих вопросов требует высокой математической техники, мы здесь не будем больше говорить о них. Достаточно указать на то, что предлагаемый метод частично был мотивирован именно этими аналогиями. Исчерпывающие, но не тривиальные результаты, которые мы получим, а также сможем использовать для дальнейших интерпретаций, с технической точки зрения являются довольно обнадеживающим признаком.

---

[1]) Представляется естественным распространить понятия композиции и разложения на случай более чем двух компонент. Это будет проделано в пп. 43.2 и 43.3.

[2]) См. G. Birkhoff and MacLane: A Survey of Modern Algebra, New York, 1941, Chapt. XIII.

**41.2.3.** Во-вторых, читатель сможет почувствовать, что операция композиции имеет совершенно формальную и фиктивную природу. Почему две игры Δ и Н, в которых участвуют два различных множества игроков, не имеющих абсолютно никакого влияния друг на друга, должны рассматриваться как единая игра Г?

Наше исследование обнаружит, что полное разделение игр Δ и Н в вопросах, касающихся их правил, не обязательно влечет то же для вопросов, касающихся их решений. Именно, хотя эти два множества игроков не могут влиять друг на друга непосредственно, но тем не менее, когда они рассматриваются как единое множество — одно общество, — могут существовать устойчивые нормы поведения, которые устанавливают связи между ними [1]). Значение этого обстоятельства будет более полно выяснено, когда мы дойдем до соответствующего места.

**41.2.4.** Кроме всего сказанного, нужно заметить, что этот метод композиции является довольно обычным как в естественных науках, так и в экономической теории. Так, вполне законно рассматривать как одну две отдельные механические системы, даже если одна из них расположена, скажем, на Юпитере, а другая — на Уране. Точно так же допустимо рассматривать как единое целое внутренние экономики двух государств, даже если мы пренебрегаем связями между ними. Это, конечно, является только предварительным шагом перед введением сил взаимодействия между системами. Так, в нашем первом примере в качестве двух систем мы могли бы выбрать сами планеты Юпитер и Уран (находящиеся в гравитационном поле Солнца), а затем в качестве взаимодействия ввести гравитационные силы, с которыми эти планеты воздействуют друг на друга. Во втором примере взаимодействие появляется с рассмотрением внешней торговли, международных перемещений капитала, переселений и т. п.

Точно так же мы могли бы использовать разложимую игру Г в качестве основы для изучения других, близких игр, которые, в свою очередь, не поддаются разложению [2]).

Однако в наших исследованиях эти последние возможности не будут рассматриваться. Наши интересы будут лежать в области связей между понятиями, введенными в начале этого параграфа.

### 41.3. Точные определения

**41.3.1.** Перейдем теперь к точному математическому описанию композиции и разложения игр.

Пусть $k$ игроков $1', \ldots, k'$, составляющих множество $J = (1', \ldots, k')$, участвуют в игре Δ, а $l$ игроков $1'', \ldots, l''$, составляющих множество $K = (1'', \ldots, l'')$, участвуют в игре Н. Мы еще раз подчеркиваем, что множества игроков в играх Δ и Н не пересекаются [3]) и что игры Δ и Н не оказывают никакого влияния друг на друга. Обозначим харак-

---

[1]) Имеется некоторая аналогия между этим фактом и отмеченным ранее явлением (см. пп. 21.3, 37.2.1), состоящим в том, что симметрия в правилах игры не обязательно влечет такую же симметрию в решениях.

[2]) См. п. 35.3.3 в применении к окрестности вершины $I$, которая, согласно п. 35.2, соответствует разложимой игре. Здесь уместно также напомнить замечание о возмущениях в сноске 2 на стр. 319.

[3]) Если в двух играх участвуют одновременно одни и те же игроки $1, \ldots, n$, то имеет место совершенно другая ситуация. В этом случае наблюдается суперпозиция игр, о которой шла речь в п. 27.6.2, а также в п. 35.3.4. Ее влияние на стратегии гораздо более сложно и едва ли может быть описано общими правилами, как это указывалось в п. 35.3.4.

теристические функции этих игр соответственно через $v_\Delta(S)$ и $v_H(T)$, где $S \subseteq J$ и $T \subseteq K$.

При образовании составной игры $\Gamma$ для ее $n = k + l$ игроков удобно использовать те же самые обозначения $1', \ldots, k', 1'', \ldots, l''$ [1]). Эти игроки составляют множество

$$I = J \cup K = (1', \ldots, k', 1'', \ldots, 1'', \ldots, l'').$$

Очевидно, что каждое множество $R \subseteq I$ допускает единственное представление в виде

(41:1) $$R = S \cup T, \qquad S \subseteq J, \qquad T \subseteq K,$$

а обращение этой формулы имеет вид

(41:2) $$S = R \cap J, \qquad T = R \cap K\ ^{2)}.$$

Обозначим характеристическую функцию игры $\Gamma$ через $v_\Gamma(R)$, где $R \subseteq I$. Интуитивно ясный факт, состоящий в том, что игры $\Delta$ и H объединяются в игру $\Gamma$, не влияя друг на друга, имеет следующее количественное выражение: значение коалиции $R \subseteq I$ в игре $\Gamma$ получается сложением значения ее части $S$ $(\subseteq J)$ из $J$ в игре $\Delta$ и значения ее части $T$ $(\subseteq K)$ из $K$ в игре H. Формально этот факт выражается следующим образом:

(41:3) $$v_\Gamma(R) = v_\Delta(S) + v_H(T),$$
где $R$, $S$, $T$ определяются формулами (41:1) или, что то же самое, формулами (41:2) [3]).

**41.3.2.** Формула (41:3) выражает составную характеристическую функцию $v_\Gamma(R)$ через ее компоненты $v_\Delta(S)$ и $v_H(T)$. Однако эта формула содержит также решение обратной задачи: выразить $v_\Delta(S)$, $v_H(T)$ через $v_\Gamma(R)$. Действительно, $v_\Delta(\varnothing) = v_H(\varnothing) = 0$ [4]). Следовательно, полагая в (41:3) сначала $T = \varnothing$, а затем $S = \varnothing$, мы получаем:

(41:4) $$v_\Delta(S) = v_\Gamma(S) \quad \text{для} \quad S \subseteq J,$$

(41:5) $$v_H(T) = v_\Gamma(T) \quad \text{для} \quad T \subseteq K\ ^{5)}.$$

Теперь мы можем выразить факт *разложимости* игры $\Gamma$ по отношению к двум множествам $J$ и $K$. Именно, данная игра $\Gamma$ (с множеством игроков $I = J \cup K$) должна быть такой, чтобы ее можно было разложить на две подходящим образом выбранные игры $\Delta$ (с множеством игроков $J$) и H (с множеством игроков $K$). Сформулированное так свойство игры $\Gamma$, утверждающее существование неизвестных игр $\Delta$, H, является неявным. Однако оно будет выражено как явное свойство $\Gamma$.

Действительно, если существуют две такие игры $\Delta$ и H, то они должны определяться соотношениями (41:4), (41:5). Следовательно, рассматриваемое свойство $\Gamma$ состоит в том, что игры $\Delta$, H, определенные равенствами (41:4) и (41:5), удовлетворяют соотношению (41:3). Поэтому

---

[1]) Вместо обычных обозначений $1, \ldots, n$.

[2]) Формулы (41.1) и (41.2) имеют непосредственное словесное содержание. Для читателя может быть полезно его сформулировать.

[3]) Конечно, нетрудно дать строгий вывод этого соотношения, основываясь на п. 25.1.3. Все изложенное в п. 25.3.2 применимо и к этому случаю.

[4]) Заметим, что пустое множество $\varnothing$ является подмножеством как $J$, так и $K$; так как $J$ и $K$ не пересекаются, $\varnothing$ будет их единственным общим подмножеством.

[5]) Это — пример технической полезности нашего взгляда на пустое множество $\varnothing$ как на коалицию. См. сноску 1 на стр. 261.

подстановка (41:4), (41:5) в (41:3) с использованием (41:1) для выражения $R$ через $S$ и $T$ дает

$$(41:6) \qquad \mathrm{v}_\Gamma(S \cup T) = \mathrm{v}_\Gamma(S) + \mathrm{v}_\Gamma(T) \quad \text{для } S \subseteq J,\ T \subseteq K.$$

Если для выражения $S$, $T$ через $R$ мы вместо (41:1) используем (41:2), то мы получим

$$(41:7) \qquad \mathrm{v}_\Gamma(R) = \mathrm{v}_\Gamma(R \cap J) + \mathrm{v}_\Gamma(R \cap K) \quad \text{для } R \subseteq I.$$

**41.3.3.** Для того чтобы должным образом выяснить роль уравнений (41:6), (41:7), необходим детальный пересмотр основных принципов, на которых они основаны. Это будет сделано в пп. 41.4—42.5.2. Однако два замечания относительно интерпретации этих уравнений можно сделать сразу.

Первое. Формула (41:6) выражает тот факт, что коалиция между игроками множества $S \subseteq J$ и игроками множества $T \subseteq K$ непривлекательна: в то время как могут существовать побудительные причины для того, чтобы игроки из $J$ образовали коалицию между собой (и аналогично для игроков из $K$), не существует сил, действующих через границы множеств $J$ и $K$.

Второе. Это дальнейшее замечание, являющееся продолжением сделанного в конце п. 27.4.3, предназначено для читателей, знакомых с математической теорией меры: (41:7) есть в точности определение измеримости, данное Каратеодори. Это понятие является фундаментальным в теории аддитивной меры, и подход Каратеодори к ней, по-видимому, до сих пор остается наилучшим технически [1]). Появление здесь этого подхода является замечательным фактом, заслуживающим дальнейшего изучения.

## 41.4. Анализ разложимости

**41.4.1.** Мы получили критерии (41:6), (41:7) разложимости игры Г подстановкой в основное условие (41:3) выражений для $\mathrm{v}_\Delta(S)$, $\mathrm{v}_H(T)$, полученных из (41:4), (41:5). Этот вывод, однако, содержит пробел: мы не проверили, можно ли найти две такие игры Δ, H, которые порождают функции $\mathrm{v}_\Delta(S)$, $\mathrm{v}_H(T)$, определенные формально равенствами (41:4), (41:5).

Формализация этих дополнительных требований не встречает трудностей. Как мы знаем из п. 25.3.1, эти требования означают, что функции $\mathrm{v}_\Delta(S)$ и $\mathrm{v}_H(T)$ удовлетворяют условиям (25:3:a) — (25:3:c). Нужно понять, что мы предполагаем, что заданная функция $\mathrm{v}_\Gamma(R)$ порождается игрой Г, т. е. что $\mathrm{v}_\Gamma(R)$ этим условиям удовлетворяет. Поэтому возникает следующий самостоятельный вопрос:

(41:A) Функция $\mathrm{v}_\Gamma(R)$ удовлетворяет условиям (25:3:a) — (25:3:c) из п. 25.3.1, а также сформулированному выше условию (41:6) или ,что то же самое, условию (41:7). Будут ли тогда также удовлетворять условиям (25:3:a) — (25:3:c) из п. 25.3.1 функции $\mathrm{v}_\Delta(S)$, $\mathrm{v}_H(T)$, определенные равенствами (41:4), (41:5)? А если нет, то какие еще условия должны быть наложены на функцию $\mathrm{v}_\Gamma(R)$?

Для решения этого вопроса мы проверим условия (25:3:a) — (25:3:c) п. 25.3.1 отдельно для $\mathrm{v}_\Delta(S)$ и для $\mathrm{v}_H(T)$. Проверять их удобно в другом порядке.

---

[1]) См. C. Carathéodory, Vorlesungen über Reelle Funktionen, Berlin, 1918, Chapt. V.

**41.4.2.** Условие (25:3:a). Ввиду (41:4) и (41:5) выполнение этого условия для $v_\Delta(S)$ и $v_H(T)$ следует из его выполнения для $v_\Gamma(R)$.

Условие (25:3:c). Ввиду (41:4) и (41:5), это условие переносится с $v_\Gamma(R)$ на $v_\Delta(S)$ и $v_H(T)$; при этом необходимо только перейти от ограничения $R \subseteq I$ к ограничениям $S \subseteq J$ и $T \subseteq K$.

Перед обсуждением оставшегося условия (25:3:b) сделаем замечание об утверждении (25:4) из п. 25.4.1. Так как это свойство является следствием условий (25:3:a) — (25:3:c), то оправдано выведение из него следствий, и мы увидим, что его использование упрощает исследование условия (25:3:b).

С этого момента нам придется одновременно использовать дополнения множеств в $I$, $J$, $K$. Поэтому необходимо избегать обозначения $-S$ и писать вместо него соответственно $I - S$, $J - S$, $K - S$.

Условие (25:4). Для функций $v_\Delta(S)$ и $v_H(T)$ роль множества $I$ играют соответственно множества $J$ и $K$. Поэтому для них это условие принимает вид:

$$v_\Delta(J) = 0,$$

$$v_H(K) = 0.$$

Ввиду (41:4), (41:5) это условие означает, что

(41:8) $$v_\Gamma(J) = 0,$$

(41:9) $$v_\Gamma(K) = 0.$$

Так как $K = I - J$, условие (25:3:b) (примененное к функции $v_\Gamma(S)$, для которой, как предполагается, оно выполнено) дает

(41:10) $$v_\Gamma(J) + v_\Gamma(K) = 0.$$

Таким образом, в силу тождества (41:10), каждое из равенств (41:8) и (41:9) влечет другое.

В лице (41:8) или (41:9) мы фактически имеем новое условие, не вытекающее из (41:6) или (41:7).

Условие (25:3:b). Выполнение этого условия для $v_\Delta(S)$ и $v_H(T)$ мы выведем из предположения о его выполнении для $v_\Gamma(R)$. Ввиду симметрии достаточно рассмотреть $v_\Delta(S)$.

Должно быть доказано соотношение

(41:11) $$v_\Delta(S) + v_\Delta(J - S) = 0.$$

Ввиду (41:4) это означает, что

(41:12) $$v_\Gamma(S) + v_\Gamma(J - S) = 0.$$

Вследствие условия (41:8), выполнения которого мы так или иначе должны потребовать, это равенство можно записать в виде

(41:13) $$v_\Gamma(S) + v_\Gamma(J - S) = v_\Gamma(J).$$

(Конечно, $S \subseteq J$).

Чтобы доказать (41:13), применим (25:3:b) к $v_\Gamma(R)$, где $R = J - S$ и $R = J$. Для этих множеств соответственно $I - R = S \cup K$ и $I - R = K$. Тогда (41:13) принимает вид

$$v_\Gamma(S) - v_\Gamma(S \cup K) = -v_\Gamma(K)$$

или

$$v_\Gamma(S \cup K) = v_\Gamma(S) + v_\Gamma(K),$$

а это есть частный случай (41:6), где $T = K$.

Таким образом, мы заполнили упомянутый в начале этого пункта пробел и ответили на вопросы (41:A).

(41:B) На функцию $v_\Gamma(R)$ должно быть наложено еще одно условие: (41:8) или (41:9).

Все установленное отвечает на вопрос п. 41.3.2 относительно разложимости.

(41:C) Игра Г разложима относительно множеств $J$ и $K$ (см. п. 41.3.2) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям (41:6) (т. е. (41:7)) и (41:8) (т. е. (41:9)).

### 41.5. Желательность модификации

**41.5.1.** Два условия в (41:C), которые, как мы доказали, эквивалентны разложимости, имеют весьма различную природу. Условие (41:6) (т. е. (41:7)) весьма существенно, в то время как (41:8) (т. е. (41:9)) выражает лишь довольно случайное обстоятельство. В дальнейшем этот факт мы оправдаем строго, но сначала будут полезны качественные замечания. Прототипом нашего понятия разложения была игра, упомянутая в начале п. 41.2.1, именно, игра, соответствующая вершине VIII в п. 35.2. Но эта игра удовлетворяет условию (41:6) и не удовлетворяет условию (41:8). (Первое вытекает из (35:7) в п. 35.2.1, а второе — из того, что $v(J) = v((1, 2, 3)) = 1 \neq 0$.) Тем не менее эту игру мы рассматриваем как разложимую (где $J = (1, 2, 3)$, $K = (4)$); каким образом тогда оказалось возможным, что она нарушает условие (41:8), которое, как мы установили, является необходимым для разложимости?

**41.5.2.** Ответ на это прост. Для описанной выше игры компоненты $\Delta$ (с $J = (1, 2, 3)$) и H (с $K = (4)$) не полностью удовлетворяют условиям (25:3:a) — (25:3:c) из п. 25.3.1. Точнее, они не удовлетворяют следствию (25:4) п. 25.4.1: неверно, что $v_\Delta(J) = v_H(K) = 0$ (а именно из этого условия мы и вывели (41:8)). Другими словами, компоненты игры Г не являются играми с нулевой суммой. Конечно, этот факт был полностью выяснен в п. 35.2.2, где ему было уделено должное внимание.

Поэтому мы должны попытаться освободиться от условия (41:8), понимая, что это может заставить нас рассматривать игры, отличные от игр с нулевой суммой.

## § 42. МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРИИ

### 42.1. Неполный отказ от условия равенства суммы нулю

**42.1.** Полный отказ от условия равенства нулю суммы для наших игр [1]) означал бы, что функции $\mathscr{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, которые характеризуют ее в смысле п. 11.2.3, совершенно произвольны. Иначе говоря, опускается требование

$$(42:1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathscr{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv 0$$

пп. 11.4 и 25.1.3 и вместо него не накладывается никаких других условий. Это потребовало бы пересмотра значительной части всей теории, так как построение характеристической функции в § 25 опиралось на равен-

[1]) Мы снова обозначим игроков через $1, \ldots, n$.

ства (25:1) (т. е. на (42:1)), и, следовательно, его нужно было бы провести заново.

В конце концов этот пересмотр станет необходим (см. главу XI), но еще не на данном этапе.

Для того чтобы получить точное представление о том, что именно нам необходимо сейчас, проведем дополнительные исследования, которым посвящены пп. 42.2.1 и 42.2.2.

## 42.2. Стратегическая эквивалентность. Игры с постоянной суммой

**42.2.1.** Рассмотрим игру Г с нулевой суммой, которая может удовлетворять условиям (41:6) и (41:8), а может и не удовлетворять им. Перейдем от игры Г к стратегически эквивалентной ей в смысле пп. 27.1.1 и 27.1.2 игре Г′ с введенными в этих пунктах числами $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$. Очевидно, что выполнение условия (41:6) для Г эквивалентно его выполнению для Г′ [1]).

Для условия (41:8) положение совершенно иное. Переход от Г к Г′ изменяет левую часть (41:8) на величину $\sum_{k \in J} \alpha_k^0$ и, следовательно, из выполнения (41:8) в одном случае не следует его выполнение в другом. Действительно, имеет место следующее утверждение.

(42:A) Для любой игры Г можно выбрать стратегически эквивалентную ей игру Г′, удовлетворяющую условию (41:8).

Доказательство. Утверждение состоит в том, что мы можем выбрать такие числа $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 = 0$ (условие (27:1) из п. 27.1.1) и

$$\mathrm{v}(J) + \sum_{k \in J} \alpha_k^0 = 0.$$

Это, очевидно, возможно, если только $J \neq \varnothing$ или $J \neq I$, так как тогда величине $\sum_{k \in J} \alpha_k^0$ можно придать любое значение. Если же $J = \varnothing$ или $J = I$, то доказывать нечего, так как тогда $\mathrm{v}(J) = 0$ ввиду (25.3:a) из п. 25.3.1 и (25:4) из п. 25.4.1.

Этот результат можно интерпретировать следующим образом: если мы рассматриваем только игры с нулевой суммой [2]), то условие (41:6) выражает тот факт, что, хотя сама игра Г может и не быть разложимой, она стратегически эквивалентна некоторой разложимой игре Г′ [3]).

**42.2.2.** Полученный выше строгий результат показывает, в чем именно состоит слабость нашей теории. Разложимость является важным стратегическим свойством, и поэтому положение, при котором одна из двух стратегически эквивалентных игр считается разложимой, а другая нет, нежелательно. Необходимо поэтому так расширить эти понятия, чтобы свойство разложимости стало инвариантным относительно стратегической эквивалентности.

Другими словами, мы хотим так модифицировать наши понятия, чтобы преобразование (27:2) из п. 27.1.1, определяющее стратегическую

---

[1]) Ввиду (27:2) из п. 27.1.1. Заметим, что $\mathrm{v}_\Gamma(S)$, $\mathrm{v}_{\Gamma'}(S)$ из (42:A) совпадают с $\mathrm{v}(S)$, $\mathrm{v}'(S)$ из (27:2) п. 27.1.1.

[2]) То есть мы требуем выполнения этого условия не только для Г, но также для ее компонент Δ, Н.

[3]) Понимание компонент игры в п. 35.2.2 в точности совпадает с этим, что непосредственно видно из замечания на стр. 316.

эквивалентность, не влияло на соотношение между разложимой игрой Г и ее компонентами Δ и Н. Это соотношение выражается равенством (41:3)

(42:2) $$v_\Gamma(S \cup T) = v_\Delta(S) + v_H(T) \quad \text{для } S \subseteq J,\ T \subseteq K.$$

Если мы теперь применим преобразование (27:2) с одними и теми же $\alpha_k^0$ ко всем трем играм Г, Δ, Н, то соотношение (42:2), очевидно, не нарушится. Затруднение вызывает только предварительное условие (27:1). Соответственно для игр Г, Δ, Н оно утверждает, что

$$\sum_{k \in I} \alpha_k^0 = 0, \quad \sum_{k \in J} \alpha_k^0 = 0, \quad \sum_{k \in K} \alpha_k^0 = 0,$$

в то время как теперь мы предполагаем, что выполнено первое соотношение, а два других могут нарушаться.

Поэтому естественный способ состоит в полном отказе от условия (27:1) из п. 27.1.1, т. е. в расширении области рассматриваемых игр включением в нее всех игр, стратегически эквивалентных играм с нулевой суммой, причем стратегическая эквивалентность определяется только преобразованием (27:2), без требования выполнения условия (27:1).

Как мы видели в п. 27.1.1, это равносильно замене функций

$$\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

игры новыми функциями

$$\mathcal{K}'_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) + \alpha_k^0.$$

(На $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$ больше не накладываются условия (27:1).) Легко охарактеризовать систему функций $\mathcal{K}'_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, получаемых этим способом из системы функций $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, удовлетворяющих условию (42:1) из п. 42.1. Характерным для них является свойство

(42:3) $$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}'_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv s$$ [1]

(вместо упомянутого свойства (42:1)).

Подводя итоги, мы приходим к следующему:

(42:B) Мы расширяем область рассматриваемых игр, переходя от игр с нулевой суммой к играм *с постоянной суммой* [2]. В то же время мы расширяем введенное в п. 27.1.1 понятие стратегической эквивалентности, по-прежнему определяя его упомянутым преобразованием (27:2), но опуская условие (27:1).

**42.2.3.** Важно понять, что приведенные выше обобщения не изменяют наших основных представлений относительно стратегической эквивалентности. Лучше всего в этом убедиться, рассматривая следующие два момента.

Во-первых, в п. 25.2.2 мы указали, что предполагаем изучить все количественные свойства игры только с помощью ее характеристической функции. Необходимо понять, что доводы в пользу этого соображения столь же обоснованы для рассматриваемых теперь игр с постоянной сум-

---

[1] $s \gtreqless 0$ — произвольная константа. Очевидно, что в преобразовании (27:2), в результате которого эта игра получается из игры с нулевой суммой, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 = s$.

[2] Это придает точный смысл утверждению, приведенному в начале п. 42.1, согласно которому мы еще не подготовлены к рассмотрению произвольных игр.

мой, как и для первоначального (более узкого) класса игр с нулевой суммой. Эти доводы состоят в следующем:

(42:C) Каждая игра с постоянной суммой стратегически эквивалентна некоторой игре с нулевой суммой.

Доказательство. Преобразование (27:2), очевидно, заменяет число $s$, определенное формулой (42:3), на $s+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0$. Теперь можно выбрать числа $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$ так, чтобы выполнялось равенство $s+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=0$, т. е. перевести данную игру с постоянной суммой в стратегически эквивалентную ей игру с нулевой суммой.

Во-вторых, новое понятие стратегической эквивалентности необходимо только для вновь введенных игр с нулевой суммой. Для игр с нулевой суммой старое и новое понятия эквивалентности совпадают. Другими словами, если две игры с нулевой суммой получаются одна из другой с помощью преобразования (27:2) п. 27.1.1, то автоматически выполнено равенство (27:1). Действительно, это уже отмечалось в сноске 2 на стр. 266.

## 42.3. Характеристическая функция в новой теории

**42.3.1.** Если дана игра $\Gamma'$ с постоянной суммой (с функциями $\mathcal{K}'_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, удовлетворяющими условию (42:3)), то, повторяя определения п. 25.1.3 [1]), мы можем ввести ее характеристическую функцию $\mathrm{v}'(S)$. С другой стороны, следуя рассуждениям пп. 42.2.2 и 42.2.3, мы, как и в п. 42.2.2, можем получить игру $\Gamma'$ с функциями $\mathcal{K}'_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ из игры с нулевой суммой $\Gamma$ с функциями $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ путем преобразования

$$(42:4)\qquad \mathcal{K}'_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)+\alpha_k^0$$

с соответствующими $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$ (см. сноску 1 на стр. 266), а затем определить характеристическую функцию $\mathrm{v}'(S)$ игры $\Gamma'$ формулой (27.2)п. 27.1.1:

$$(42:5)\qquad \mathrm{v}'(S)=\mathrm{v}(S)+\sum_{k\in S}\alpha_k^0.$$

Эти два определения эквивалентны, т. е. функция $\mathrm{v}'(S)$, определенная формулами (42:4), (42:5), совпадает с функцией, полученной повторением рассуждений п. 25.1.3. Действительно, непосредственное изучение формул п. 25.1.3 сразу показывает, что в результате подстановки в них (42:4) получается формула (42:5) [2]).

Замечание. Так как мы решили определять функцию $\mathrm{v}'(S)$ с помощью только формул (42:2) и (42:5), мог бы возникнуть вопрос о корректности ее определения. Именно, данная игра $\Gamma'$ с постоянной суммой с помощью преобразования (42:4), очевидно, может быть получена из многих различных игр с нулевой суммой $\Gamma$; всегда ли тогда формула (42:5) будет определять одну и ту же функцию $\mathrm{v}'(S)$?

Нетрудно было бы доказать непосредственно, что это так. Это, однако, не требуется, потому что мы показали, что функция $\mathrm{v}'(S)$ определенная формулой (42:5), совпадает с функцией, определенной в п. 25.1.3, так что $\mathrm{v}'(S)$ определена корректно с помощью одной только игры $\Gamma'$.

---

[1]) Хотя игра $\Gamma'$ больше не является игрой с нулевой суммой, все рассуждения п. 25.1.3 можно повторить дословно со следующими двумя исключениями. К правым частям равенств (25:1) и (25:2) п. 25.1.3 мы должны добавить $s$ (ввиду того, что вместо (42.1) выполнено равенство (42:3)). Это различие абсолютно несущественно.

[2]) Легко найти словесное выражение этого факта.

**42.3.2.** Как указывалось в пп. 25.3.1 и 26.2, v ($S$) является характеристической функцией игры с нулевой суммой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям (25:3:a) — (25:3:c) из п. 25.3.1. (Доказательство этого факта приводилось в пп. 25.3.3 и 26.1.) Какими станут эти условия в случае игры с постоянной суммой?

Для ответа на этот вопрос вспомним, что из указанных условий (25:3:a) — (25:3:c) вытекает равенство (25:4) из п. 25.4.1. Поэтому мы можем добавить к ним (25:4) и видоизменить условие (25:3:b) прибавлением v ($I$) к его правой части (сохраняя ввиду (25:4) равенство). Таким образом, характеристические функции v ($S$) всех игр с нулевой суммой удовлетворяют следующим условиям:

(42:6:a) $$\mathrm{v}(\varnothing)=0,$$

(42:6:b) $$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(-S)=\mathrm{v}(I),$$

(42:6:c) $$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)\leqq v(S\cup T), \quad \text{если} \quad S\cap T=\varnothing,$$

(42:6:d) $$\mathrm{v}(I)=0.$$

Но характеристические функции v′ ($S$) всех игр с постоянной суммой получаются из этих характеристических функций v ($S$) с помощью преобразования (42:5) п. 42.3.1. Как повлияет это преобразование на условия (42:6:a) — (42:6:d)?

Непосредственно проверяется, что условия (42:6:a) — (42:6:c) никак не затрагиваются, а условие (42:6:d) полностью нарушается [1]). Итак, мы видим, что

(42:D) v ($S$) является характеристической функцией игры с постоянной суммой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям (42:6:a) — (42:6:c).

(Теперь мы будем писать v ($S$) вместо v′ ($S$).)

Как упоминалось выше, условие (42:6:d) больше не выполняется. Однако мы имеем

(42:6:d*) $$\mathrm{v}(I)=s.$$

Действительно, этот факт вытекает из равенства (42:3) и рассуждений п. 25.1.3. Его можно также вывести, сравнивая сноску 1 на стр. 360 и сноску 1 на этой стр. (настоящая функция v ($S$) соответствует фигурирующей там функции v′ ($S$)). Кроме того, равенство (42:6:d*) интуитивно ясно: коалиция, состоящая из всех игроков, получает фиксированную сумму $s$ игры.

## 42.4. Дележи, доминирование, решения в новой теории

**42.4.1.** Начиная с этого места, мы будем рассматривать характеристические функции произвольных игр с постоянной суммой, т. е. функции v ($S$), подчиненные только условиям (42:6:a) — (42:6:c).

Наша первая задача, естественно, будет состоять в распространении на эту более широкую область введенных в п. 30.1.1 понятий дележей, доминирования и решения.

---

[1]) Согласно (42:5) правая часть равенства (42:6:d) переходит в $\sum_{i\in I}\alpha_i^0=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0$, а эта сумма совершенно произвольна.

Начнем с *распределений*, или *дележей*. Мы можем перенести из п. 30.1.1 их интерпретацию как векторов

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

Из условий (30:1) и (30:2) мы можем оставить неизменным (30:1):

(42:7) $$\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i));$$

соображения в пользу этого [1]) здесь столь же обоснованы, как и ранее. Однако условие (30:2) следует изменить. Так как постоянная сумма игры равна $s$ (см. (42:3) и (42:6:d*)), каждый дележ должен распределять именно эту величину, т. е. естественно потребовать выполнения равенства

(42:8) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = s.$$

Ввиду (42:6:d*) это эквивалентно равенству

(42:8*) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \mathrm{v}(I)\ ^{2)}.$$

Определения *эффективности*, *доминирования*, *решения* мы переносим без изменений из п. 30.1.1 [3]), так как обоснования, которые мы привели к этим определениям, остаются в силе и для нашего обобщения.

**42.4.2.** Эти рассуждения подтверждаются еще следующим фактом:

(42:E) При нашем новом понятии стратегической эквивалентности игр Г, Г′ с постоянной суммой [4]) существует изоморфизм между их дележами, т. е. взаимно однозначное отображение дележей Г на дележи Г′, при котором понятия п. 30.1.1 [5]) остаются инвариантными.

Этот факт является аналогом (31:Q) из п. 31.3.3 и может быть доказан таким же способом. Как и там, мы определяем соответствие

(42:9) $$\vec{\alpha} \leftrightarrows \vec{\alpha}'$$

между дележами $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ игры Г и дележами $\vec{\alpha}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$ игры Г′ формулой

(42:10) $$\alpha'_k = \alpha_k + \alpha^0_k,$$

где $\alpha^0_1, \ldots, \alpha^0_n$ определены формулой (27:2) п. 27.1.1.

После этого доказательство (31:Q) п. 31.3.3 почти буквально повторяется. Единственное отличие состоит в том, что условие (30:2) из п. 30.1.1 заменяется на (42:8), но так как ввиду (27:2) из п. 27.1.1 $\mathrm{v}'(I) = \mathrm{v}(I) + \sum_{i=1}^{n} \alpha^0_i$, это равенство также оказывается выполненным [6]). Читатель, который вернется к п. 31.3, увидит, что все остальное, сказанное там, в равной степени применимо к нашему случаю.

---

[1]) $\alpha_i < \mathrm{v}((i))$ было бы неприемлемо, ср., например, начало п. 29.2.1.

[2]) В частном случае игры с нулевой суммой $s = \mathrm{v}(I) = 0$, так что (42:8) и (42:8*) совпадают с (30:2), как это и должно быть.

[3]) То есть, соответственно (30:3); (30:4:a) — (30:4:c); (30:5:a), (30:5:b) или (30:5:c).

[4]) Как определено в конце п. 42.2.2, т. е. формулой (27:2) п. 27.1.1 без (27:1).

[5]) Определенные заново в п. 42.4.1.

[6]) А это единственное место в упомянутом доказательстве, где используется равенство $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ (т. е. (27:1) из п. 27.1.1, которого мы больше не требуем).

### 42.5. Существенность, несущественность и разложимость в новой теории

**42.5.1.** Из утверждения (42:C) п. 42.2.3 мы знаем, что каждая игра с постоянной суммой стратегически эквивалентна некоторой игре с нулевой суммой. Следовательно, (42:E) дает нам возможность перенести общие результаты § 31 с игр с нулевой суммой на игры с постоянной суммой, переходя от последнего класса к первому через стратегическую еквивалентность.

Это вынуждает нас определить *несущественность* для игры с постоянной суммой как ее стратегическую эквивалентность некоторой несущественной игре с нулевой суммой. Мы можем поэтому утверждать следующее:

(42:F) Игра с нулевой суммой несущественна тогда и только тогда, когда она стратегически эквивалентна игре, у которой $\bar{v}(S) \equiv 0$. (См. 23.1.3 или (27:C) п. 27.4.2.) Согласно сказанному выше, то же самое относится к игре с постоянной суммой. (Но мы должны использовать наши новые определения несущественности и стратегической эквивалентности.)

*Существенность*, конечно, определяется как отрицание несущественности.

Применение формулы преобразования (42:5) из п. 42.3.1 к критериям п. 27.4 показывает, что необходимы только небольшие изменения.

Формула (27.8) из п. 27.4.1 должна быть заменена на

$$\gamma = \frac{1}{n}\left\{\mathrm{v}(I) - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{v}((j))\right\}, \tag{42:11}$$

так как правая часть этой формулы инвариантна относительно преобразования (42:5) и переходит в (27:8) при $\mathrm{v}(I) = 0$ (т. е. в случае игры с нулевой суммой).

Замена формулы (27:8) формулой (42:11) делает необходимой замену нуля на $\mathrm{v}(I)$ в правых частях обеих формул критерия (27:B) из п. 27.4.1. Критерии (27:C) и (27:D) из п. 27.4.2 инвариантны относительно преобразования (42:5) и, следовательно, не изменяются.

**42.5.2.** Теперь мы можем вернуться к обсуждению понятий композиции и разложения игр, рассматривавшихся в пп. 41.3—41.4, для более широкой области всех игр с постоянной суммой.

Все сказанное в п. 41.3 можно повторить дословно.

Когда мы переходим к п. 41.4, снова возникает сформулированный там вопрос (41:A). Для того чтобы выяснить, нужны ли теперь какие-либо постулаты из п. 41.3.2, кроме (41:6) или (41:7), нам нужно вместо условий (25:3:a) — (25:3:c) из п. 25.3.1 исследовать условия (42:6:a) — (42:6:c) (для всех трех функций $\mathrm{v}_\Gamma(R)$, $\mathrm{v}_\Delta(S)$, $\mathrm{v}_H(T)$).

Условия (42:6:a) и (42:6:c) проверяются сразу, точно так же как и условия (25:3:a) и (25:3:c) в п. 41.4. Что касается условия (42:6:b), то к нему применимо по существу доказательство условия (25:3:b), приведенное в п. 41.4, но на этот раз не требуется никаких дополнительных условий (подобных условиям (41:8) или (41:9) п. 41.4). Для упрощения изложения мы приведем это доказательство полностью.

Условие (42:6:b). Мы установим его справедливость для функций $\mathrm{v}_\Delta(S)$ и $\mathrm{v}_H(T)$, предполагая, что функция $\mathrm{v}_\Gamma(R)$ ему удовлетворяет. Ввиду симметрии достаточно рассмотреть только функцию $\mathrm{v}_\Delta(S)$.

Должно быть доказано соотношение

(42:12) $$v_\Delta(S) + v_\Delta(J-S) = v_\Delta(J).$$

Ввиду (41:4) это условие означает, что

(42:12*) $$v_\Gamma(S) + v_\Gamma(J-S) = v_\Gamma(J).$$

Для доказательства (42:12*) применим (42:6:b) к функции $v_\Gamma(R)$ и множествам $R = J - S$ и $R = J$. Для этих множеств соответственно $I - R = S \cup K$ и $I - R = K$. Тогда равенство (42:12*) примет вид

$$v_\Gamma(S) + v_\Gamma(I) - v_\Gamma(S \cup K) = v_\Gamma(I) - v_\Gamma(K),$$

т. е.

$$v_\Gamma(S \cup K) = v_\Gamma(S) + v_\Gamma(K),$$

а это равенство есть частный случай (41:6) при $T = K$.

Итак, мы следующим образом улучшили результат (41:C) из п. 41.4:

(42:G) В области всех игр с постоянной суммой игра Γ разложима по отношению к множествам $J$ и $K$ (см. 41.3.2) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию (41:6), т. е. (41:7).

**42.5.3.** Сравнение результатов (41:C) из п. 41.4 и (42:G) из п. 42.5.2 показывает, что переход от игр с нулевой суммой к играм с постоянной суммой избавляет нас от нежелательного условия разложимости (41:8), т. е. (41:9).

Разложимость теперь определяется только условием (41:6), т. е. (41:7), и инвариантна относительно стратегической эквивалентности, как это и должно быть.

Мы знаем также, что если игра Γ разлагается на две компоненты Δ и Η (причем все они являются только играми с постоянной суммой!), то мы можем все эти игры с помощью преобразования стратегической эквивалентности свести к играм с нулевой суммой (см. (42:C) в п. 42.2.3 для Γ, а затем (42:A) п. 42.2.1 и далее для Δ, Η.)

Таким образом, мы всегда можем иметь дело с одним из двух классов игр — игры с нулевой суммой или игры с постоянной суммой — в зависимости от того, какой из них удобнее для рассматриваемой задачи.

В остальной части этой главы мы будем продолжать рассматривать игры с постоянной суммой, если специально не оговорено противное.

## § 43. РАЗЛАГАЮЩЕЕ РАЗБИЕНИЕ

### 43.1. Разлагающие множества. Компоненты игры

**43.1.1.** Разложимость игры Γ мы определили не саму по себе, а по отношению к разбиению множества $I$ всех игроков на два дополнительных друг к другу множества $J$, $K$.

Поэтому можно принять следующую точку зрения: будем считать игру Γ фиксированной, а множества $J$ и $K$ — переменными. Так как $J$ определяет $K$ (действительно, $K = I - J$), достаточно считать единственным переменным $J$. Тогда возникает следующий вопрос.

Если дана игра Γ (с множеством игроков $I$), то для каких множеств $J \subseteq I$ (и соответствующих им множеств $K = I - J$) игра Γ является разложимой?

Те множества $J$ ($\subseteq I$), для которых игра Г является разложимой, мы будем называть *разлагающими множествами* игры Г. Компонента Δ, которая получается при этом разложении (см. п. 41.2.1 и (41:4) из п. 41.3.2), называется *J-компонентой* игры Г [1]).

Таким образом, разлагающее множество $J$ определяется формулой (41:6) (или, что то же самое, формулой (41:7)) из п. 41.3.2, в которой должна быть сделана подстановка $K = I - J$.

Читатель заметит, что это понятие имеет очень простой интуитивный смысл: разлагающее множество представляет собой самостоятельную группу игроков, которые в рамках правил игры не влияют на других игроков и одновременно не испытывают влияния последних.

## 43.2. Свойства совокупности всех разлагающих множеств

**43.2.1.** Совокупность всех разлагающих множеств данной игры характеризуется несколькими простыми свойствами. Большинство из них имеет непосредственный интуитивный смысл, благодаря чему математические доказательства могут показаться необязательными. Тем не менее мы будем продолжать систематическое изложение и приведем доказательства этих свойств, указав в сносках их содержательную интерпретацию. В дальнейшем характеристическую функцию $\mathrm{v}_\Gamma(S)$ игры Г мы будем обозначать через $\mathrm{v}(S)$.

(43:A) $J$ является разлагающим множеством тогда и только тогда, когда разлагающим является его дополнение $K = I - J$ [2]).

Доказательство. Множества $J$ и $K$ входят в определение разложимости Г симметрично.

(43:B) $\varnothing$ и $I$ являются разлагающими множествами [3]).

Доказательство. Равенства (41:6) или (41:7), очевидно, выполнены при $J = \varnothing$, $K = I$, так как $\mathrm{v}(\varnothing) = 0$.

**43.2.2.**

(43:C) Если $J'$, $J''$ — разлагающие множества, то множества $J' \cap J''$ и $J' \cup J''$ также являются разлагающими.

Замечание. Пересечение $J' \cap J''$. Читателю может показаться странным, что два самостоятельных множества вообще могут иметь непустое пересечение. Однако это возможно, как показывает пример $J' = J''$. Более глубокая причина кроется в том, что самостоятельное множество вполне может быть объединением меньших самостоятельных множеств (его собственных подмножеств). (См. (43:H) из п. 43.3.) Наше утверждение состоит в том, что если два самостоятельных множества $J'$, $J''$ имеют непустое пересечение $J' \cap J''$, то это пересечение также есть самостоятельное подмножество. В этой форме оно, вероятно, покажется правдоподобным.

Объединение $J' \cup J''$. Тот факт, что объединение двух самостоятельных множеств есть снова самостоятельное множество, представляется обоснованным. Оно может стать не столь очевидным, если существует непустое пересечение $J' \cap J''$, но, как обсуждалось выше, этот случай не вносит дополнительных трудностей. Приводимое доказательство в действительности представляет собой в основном точный учет всех возможностей именно этого случая.

Доказательство. Объединение $J' \cup J''$. Так как $J'$, $J''$ — разлагающие множества, равенство (41:6) выполнено для $J$, $K$, равных

---

[1]) Согласно тому же определению игра Н (см. п. 41.2.1 и (41:5) из п. 41.3.2) является тогда $K$-компонентой игры Г (где $K = I - J$).

[2]) Утверждение о том, что множество игроков самостоятельно в смысле п. 43.1, очевидно, эквивалентно утверждению о том, что самостоятельно его дополнение.

[3]) Самостоятельность этих множеств очевидна.

соответственно $J'$, $I - J'$ и $J''$, $I - J''$. Мы хотим доказать это равенство для множеств $J' \cup J''$ и $I - (J' \cup J'')$. Для этого рассмотрим два множества: $S \subseteq J' \cup J''$ и $T \subseteq I - (J' \cup J'')$. Пусть $S' = S \cap J'$; тогда $S'' = S - S'$ содержится в дополнении к $J'$, и так как $S \subseteq J' \cup J''$, $S''$ содержится также в $J''$. Итак, $S = S' \cup S''$, $S' \subseteq J'$, $S'' \subseteq J''$. Теперь $S' \subseteq J'$, $S'' \subseteq I - J'$, и формула (41:6), примененная к множествам $J'$, $I - J'$, дает

(43:1) $$\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}(S') + \mathrm{v}(S'').$$

Далее, $S'' \subseteq I - J'$ и $T \subseteq I - (J' \cup J'') \subseteq I - J'$, так что $S'' \cup T \subseteq I - J'$. Кроме того, $S' \subseteq J'$. Очевидно, что $S' \cup (S'' \cup T) = S \cup T$. Следовательно, формула (41:6), примененная к множествам $J'$, $I - J'$, также дает

(43:2) $$\mathrm{v}(S \cup T) = \mathrm{v}(S') + \mathrm{v}(S'' \cup T).$$

Наконец, $S'' \subseteq J''$ и $T \subseteq I - (J' \cup J'') \subseteq I - J''$. Поэтому формула (41:6) для множеств $J''$, $I - J''$ дает

(43:3) $$\mathrm{v}(S'' \cup T) = \mathrm{v}(S'') + \mathrm{v}(T).$$

Подставим теперь (43:3) в (43:2) и затем упростим правую часть по формуле (43:1); в результате мы получим равенство $\mathrm{v}(S \cup T) = \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(T)$, которое представляет собой формулу (41:6), что и требовалось.

Пересечение $J' \cap J''$. Воспользуемся (43:A) и только что установленным результатом. Так как $J'$, $J''$ — разлагающие множества, мы последовательно получаем, что разлагающими являются множества $I - J'$, $I - J''$, $(I - J') \cup (I - J'') = I - (J' \cap J'')$ [1] и $J' \cap J''$,— последнее множество является требуемым.

## 43.3. Описание совокупности всех разлагающих множеств. Разлагающее разбиение

**43.3.1.** Может оказаться, что не существует разлагающих множеств, отличных от тривиальных $\emptyset$ и $I$ (см. (43:B) выше). В этом случае мы будем называть игру Г *неразложимой* [2]). Не изучая этот вопрос подробнее [3]), мы продолжим исследование разлагающих множеств игры.

(43:D) Рассмотрим разлагающее множество $J$ игры Г и $J$-компоненту $\Delta$ игры Г. В этом случае множество $J' \subseteq J$ является разлагающим множеством игры $\Delta$ тогда и только тогда, когда оно является разлагающим множеством игры Г [4]).

Доказательство. Ввиду (41:6) и (41:4) $J'$ является разлагающим множеством игры $\Delta$, если

(43:4) $$\mathrm{v}(S \cup T) = \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(T) \quad \text{для } S \subseteq J',\ T \subseteq J - J'.$$

---

[1]) Дополнение пересечения равно объединению дополнений.

[2]) Фактически большинство игр являются неразложимыми; в противном случае критерий (42:G) п. 42.5.2 требует выполнения ограничительных уравнений (41:6), (41:7) п. 41.3.

[3]) Пока! См. сноску 2 выше и приведенные в ней ссылки.

[4]) Самостоятельность внутри самостоятельного подмножества эквивалентна самостоятельности в исходном (всем) множестве. Это утверждение может показаться очевидным, однако это не так, что будет видно из доказательства.

(Мы пишем $v(S)$ вместо $v_\Gamma(S)$.) Снова ввиду (41:6) $J'$ является разлагающим множеством игры Г, если

(43:5) $$v(S \cup T) = v(S) + v(T) \quad \text{для } S \subseteq J',\ T \subseteq I - J'.$$

Мы должны доказать эквивалентность условий (43:4) и (43:5). Так как $J \subseteq I$, очевидно, что (43:4) есть частный случай (43:5), поэтому нам необходимо доказать только, что из (43:4) следует (43:5).

Предположим поэтому, что выполнено условие (43:4). К игре Г мы можем применить формулу (41:6) с множествами $J$, $K = I - J$.

Рассмотрим два множества: $S \subseteq J'$, $T \subseteq I - J'$. Пусть $T' = T \cap J$, тогда $T'' = T - T'$ содержится в $I - J$. Таким образом, $T = T' \cup T''$, $T' \subseteq J$, $T'' \subseteq I - J$, и применение к игре Г (41:6) с множествами $J, I - J$ дает

(43:6) $$v(T) = v(T') + v(T'').$$

Далее, $S \subseteq J' \subseteq J$ и $T' \subseteq J$, так что $S \cup T' \subseteq J$. Кроме того, $T'' \subseteq I - J$. Очевидно, что $(S \cup T') \cup T'' = S \cup T$. Следовательно, применение к игре Г (41:6) с множествами $J$, $I - J$ дает, кроме того,

(43:7) $$v(S \cup T) = v(S \cup T') + v(T'').$$

Наконец, $S \subseteq J'$, $T' \subseteq I - J'$ и $T' \subseteq J$, так что $T' \subseteq J - J'$. Следовательно, (43:4) дает нам

(43:8) $$v(S \cup T) = v(S) + v(T').$$

Подставим теперь (43:8) в (43:7) и с помощью (43:6) упростим правую часть; эти преобразования дают в точности требуемую формулу (43:5).

**43.3.2.** Утверждение (43:D) показывает, что стоит рассматривать только такие разлагающие множества $J$, для которых $J \neq \varnothing$, но никакое собственное подмножество $J' \neq \varnothing$ множества $J$ разлагающим не является. Такое множество $J$, по очевидным причинам, мы будем называть *минимальным разлагающим множеством.*

Рассмотрим наши определения неразложимости и минимальности. Из (43:D) сразу следует, что

(43:E) $J$-компонента $\Delta$ игры Г неразложима тогда и только тогда, когда $J$ есть минимальное разлагающее множество.

Минимальные разлагающие множества образуют совокупность, обладающую очень простыми свойствами, и определяют систему всех разлагающих множеств. Эти свойства выражаются следующими утверждениями:

(43:F) Любые два различных минимальных разлагающих множества не пересекаются.

(43:G) Объединение всех минимальных разлагающих множеств равно $I$.

(43:H) Составляя объединения по всевозможным семействам минимальных разлагающих множеств, мы получим в точности совокупность всех разлагающих множеств [1]).

[1]) Интуитивный смысл этих утверждений должен быть совершенно ясен. Они правдоподобным образом описывают структуру всех возможных способов разложения игры Г.

Доказательство (43:F). Пусть $J'$, $J''$ — два минимальных разлагающих множества, имеющих непустое пересечение. Тогда согласно (43:C) $J' \cap J'' \neq \emptyset$ есть разлагающее множество, которое содержится и в $J'$, и в $J''$. Из минимальности $J'$ и $J''$ следует, что $J' \cap J''$ равно как $J'$, так и $J''$. Следовательно, $J' = J''$.

Доказательство (43:G) Достаточно показать, что каждое $k \in I$ принадлежит некоторому минимальному разлагающему множеству.

Существуют разлагающие множества, которые содержат игрока $k$ (например, $I$). Пусть $J$ — пересечение всех таких множеств. Согласно (43:C) $J$ есть разлагающее множество. Если бы $J$ не было минимальным, то существовало бы разлагающее множество $J' \neq \emptyset$, $J$ и содержащееся в $J$. Но согласно (43:A), (43:C) множество $J'' = J - J' = J \cap (I - J')$ также является разлагающим, и очевидно также $J' \neq \emptyset$, $J$. Либо $J'$, либо $J'' = J - J'$ должно содержать $k$; пусть, например, это будет множество $J'$. Тогда $J'$ содержится среди тех множеств, пересечением которых является множество $J$. Поэтому $J' \supseteq J$. Но это невозможно ввиду того, что $J' \subseteq J$ и $J' \neq J$.

Доказательство (43:H). Объединение произвольного семейства минимальных разлагающих множеств является, согласно (43:C), разлагающим множеством, так что нам остается только доказать обратное.

Пусть $K$ — разлагающее множество. Если $J$ — минимальное разлагающее множество, то, согласно (43:C), $J \cap K$ есть разлагающее множество; кроме того, $J \cap K \subseteq J$; поэтому либо $J \cap K = \emptyset$, либо $J \cap K = J$. В первом случае $J$ и $K$ не пересекаются, во втором $J \subseteq K$. Итак, мы видим следующее:

(43:I) Каждое минимальное разлагающее множество $J$ либо не пересекается с $K$, либо содержится в $K$.

Пусть $K'$ — объединение первых множеств $J$, а $K''$ — объединение вторых. $K' \cup K''$ есть объединение всех минимальных разлагающих множеств, и, следовательно, согласно (43:G)

(43:9) $$K' \cup K'' = I.$$

По определению, $K'$ не пересекается с $K$, а $K''$ содержится в $K$, т. е.

(43:10) $$K' \subseteq I - K, \qquad K'' \subseteq K.$$

Из совместного выполнения условий (43:9) и (43:10) необходимо следует, что $K'' = K$; поэтому $K$ есть объединение соответствующей совокупности минимальных множеств, что и требовалось.

**43.3.3.** Утверждения (43:F) и (43:G) показывают, что минимальные разлагающие множества образуют разбиение множества $I$ в смысле п. 8.3.1, а их объединение равно $I$. Это разбиение мы будем называть *разлагающим разбиением игры* $\Gamma$ и будем обозначать его через $\Pi_\Gamma$. Теперь утверждение (43:H) можно выразить следующим образом:

(43:H*) Разлагающее множество $K \subseteq I$ характеризуется следующим свойством: точки каждого элемента $\Pi_\Gamma$ находятся в одном и том же отношении к множеству $K$ — иначе говоря, каждый элемент $\Pi_\Gamma$ либо содержится в $K$, либо не пересекается с $K$.

Таким образом, $\Pi_\Gamma$ показывает, насколько далеко можно продвинуться в разложении игры $\Gamma$ в $I$, не нарушая наложенных правилами

игры Г связей между игроками [1]). Ввиду (43:E) элементы $\Pi_\Gamma$ характеризуются также и тем свойством, что они разлагают Г на неразложимые компоненты.

### 43.4. Свойства разлагающего разбиения

**43.4.1.** После того как установлена природа разлагающего разбиения $\Pi_\Gamma$, естественно изучить влияние степени тонкости этого разбиения. Мы собираемся исследовать только два крайних случая: случай, когда $\Pi_\Gamma$ является настолько мелким, насколько это возможно, т. е. когда оно разбивает множество $I$ на одноэлементные множества, и случай, когда $\Pi_\Gamma$ является настолько крупным, насколько это возможно, т. е. когда оно не разбивает $I$ совсем. Другими словами, в первом случае $\Pi_\Gamma$ есть совокупность всех одноэлементных множеств (в $I$), а во втором случае $\Pi_\Gamma$ состоит из одного множества $I$.

Смысл этих двух крайних случаев легко устанавливается следующим утверждением:

(43:J) $\Pi_\Gamma$ есть совокупность всех одноэлементных множеств (в $I$) тогда и только тогда, когда игра несущественна.

Доказательство. Из (43:H) или (43:H*) ясно, что устанавливаемое свойство $\Pi_\Gamma$ эквивалентно утверждению о том, что все множества $J$ ($\subseteq I$) являются разлагающими. Иначе говоря (ввиду (43:1)), для дополняющих друг друга множеств $J$ и $K$ ($= I - J$) игра Г является разложимой. Это означает, что во всех этих случаях выполнено равенство (41:6). Отсюда, однако, следует, что условие, налагаемое равенством (41:6) на множества $S$, $T$ (т. е. $S \subseteq J$, $T \subseteq K$), означает просто, что множества $S$, $T$ не пересекаются. Таким образом, наше утверждение принимает вид

$$\mathrm{v}(S \cup T) = \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(T) \quad \text{для } S \cap T = \varnothing.$$

Но согласно (27:D) из п. 27.4.2 это есть условие несущественности.

(43:K) $\Pi_\Gamma$ состоит из множества $I$ тогда и только тогда, когда игра Г неразложима.

Доказательство. Из (43:H) (или (43:H*)) следует, что устанавливаемое свойство $\Pi_\Gamma$ эквивалентно утверждению о том, что множества $\varnothing$, $I$ являются единственными разлагающими множествами. Но это есть в точности определение неразложимости, данное в начале п. 43.3.

Эти результаты показывают, что неразложимость и несущественность являются двумя крайними возможностями для игры. В частности, несущественность означает, что разложение игры Г, описанное в конце п. 43.3, можно довести до отдельных игроков, не нарушая никаких связей, установленных правилами игры Г [2]). Читатель должен сравнить это утверждение с нашим первоначальным определением несущественности в п. 27.3.1.

**43.4.2.** Между несущественностью, разложимостью и числом $n$ игроков существует следующая связь.

$n = 1$. Это случай едва ли имеет практическую важность. Очевидно, такая игра неразложима [3]), и в то же время она несущественна по первому замечанию п. 27.5.2.

---

[1]) То есть, не нарушая свойство самостоятельности полученных в результате разложения множеств.

[2]) То есть в этой игре каждый игрок представляет самостоятельное множество.

[3]) Так как $I$ — одноэлементное множество, единственными его подмножествами являются множества $\varnothing$, $I$.

Нужно заметить, что неразложимость и несущественность ввиду (43:J) и (43:K) несовместимы при $n \geqq 2$, но не при $n = 1$.

$n = 2$. Такая игра также должна быть несущественной ввиду первого замечания п. 27.5.2. Следовательно, она разложима.

$n \geqq 3$. Для таких игр разложимость есть явление исключительное. Действительно, из разложимости следует равенство (41:6) для некоторого $J \neq \varnothing, I$; следовательно, $K = I - J \neq \varnothing, I$. Поэтому мы можем выбрать $j$ из $J$, $k$ из $K$. Тогда равенство (41:6) для $S = (j)$, $T = (k)$ дает

$$\text{(43:11)} \qquad \mathrm{v}((j,\ k)) = \mathrm{v}((j)) + \mathrm{v}((k)).$$

Но единственные уравнения, которым должны удовлетворять значения $\mathrm{v}(S)$, суть (25:3:a) и (25:3:b) из п. 25.3.1 (если рассматриваются игры с нулевой суммой) или (42:6:a) и (42:6:b) из п. 42.3.2. Уравнение (43:11) не является ни одним из них, так как в него входят только множества $(j)$, $(k)$, $(j,\ k)$, а это не те множества, которые входят в уравнения для $\mathrm{v}(S)$ (т. е. не $\varnothing$, $I$, и не множества, дополняющие друг друга), так как $n \geqq 3$ [1]). Таким образом, (43:11) является дополнительным условием, которое, вообще говоря, не выполняется.

Согласно сказанному выше, в неразложимой игре не может быть $n = 2$, следовательно, в такой игре $n = 1$ или $n \geqq 3$. Комбинируя это утверждение с (43:E), мы получаем следующий своеобразный результат:

(43:L) Каждый элемент разлагающего разбиения $\Pi_\Gamma$ есть либо одноэлементное множество, либо же содержит $n \geqq 3$ элементов.

Заметим, что одноэлементные множества в $\Pi_\Gamma$ суть одноэлементные разлагающие множества [2]), т. е. они соответствуют тем игрокам, которые представляют собой самостоятельные множества, отделенные от остальных игроков игры (с точки зрения стратегии коалиций). Они являются «болванами» в смысле п. 35.2.3 и замечания на стр. 340. Следовательно, наш результат (43:L) выражает следующий факт: игроки, не являющиеся «болванами», объединены в неразложимые компоненты, каждая из $n \geqq 3$ игроков. Это, по-видимому, является общим принципом социальной организации.

# § 44. РАЗЛОЖИМЫЕ ИГРЫ. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ

## 44.1. Решение разложимой игры и решения ее компонент

**44.1.** Мы завершили описательную часть нашего изучения композиции и разложения. Перейдем теперь к центральной части задачи — к исследованию решений в разложимой игре.

Рассмотрим игру Г, разложимую для множеств $J$ и $I - J = K$ с $J$- и $K$-компонентами $\Delta$ и H. Мы используем стратегическую эквивалентность, как это было показано в начале п. 42.5.3, для сведе́ния всех трех игр к играм с нулевой суммой.

Предположим, что решения игры $\Delta$, так же как и решения игры H, известны; определяет ли это тогда решение игры Г? Другими словами, как получить решения разложимой игры из решений ее компонент? По этому поводу существует предположение, которое на первый взгляд представляется правдоподобным и к формулировке которого мы перейдем.

---

[1]) Для $n = 2$ это не так; $(j, k) = I, (j)$ и $(k)$ являются дополнительными друг другу множествами.

[2]) Такое разлагающее множество является, конечно, автоматически минимальным.

## 44.2. Композиция и разложение дележей и множеств дележей

**44.2.1.** Будем использовать обозначения п. 41.3.1. Но, хотя мы пишем $v(S)$ вместо $v_\Gamma(S)$, это обозначение заменяет, ввиду (41:4) и (41:5), также $v_\Delta(S)$ и $v_H(S)$.

С другой стороны, мы должны проводить различие между дележами для игр Г, Δ, Н [1]). Для выражения этого различия лучше указывать то множество игроков, к которому относится дележ, а не ту игру, в которую они входят. Иначе говоря, мы будем помечать дележи индексами $I$, $J$, $K$, а не Г, Δ, Н. В этом смысле мы обозначаем дележи для $I$ (т. е. в игре Г) через

(44:1) $$\vec{\alpha}_I = \{\alpha_{1'}, \ldots, \alpha_{k'}, \alpha_{1''}, \ldots, \alpha_{l''}\},$$

а дележи для $J$, $K$ (т. е. в играх $\Delta$, $H$) соответственно через

(44:2) $$\vec{\beta}_J = \{\beta_{1'}, \ldots, \beta_{k'}\},$$

(44:3) $$\vec{\gamma}_K = \{\gamma_{1''}, \ldots, \gamma_{l''}\}.$$

Если три таких дележа связаны соотношением

(44:4) $$\begin{aligned} \alpha_{i'} &= \beta_{i'} \quad \text{для} \quad i' = 1', \ldots, k', \\ \alpha_{j''} &= \gamma_{j''} \quad \text{для} \quad j'' = 1'', \ldots, l'', \end{aligned}$$

то мы говорим, что $\vec{\alpha}_I$ получается с помощью *композиции* из $\vec{\beta}_J$ и $\vec{\gamma}_K$, что $\vec{\beta}_J$ и $\vec{\gamma}_K$ получаются с помощью *разложения* из $\vec{\alpha}_I$ (для $J$, $K$) и что $\vec{\beta}_J$ и $\vec{\gamma}_K$ являются соответственно ($J$-, $K$-) *компонентами* дележа $\vec{\alpha}_I$.

Так как теперь мы имеем дело с играми с нулевой суммой, все эти дележи должны удовлетворять условиям (30:1) и (30:2) из п. 30.1.1. Они сразу проверяются для дележей $\vec{\alpha}_I$, $\vec{\beta}_J$, $\vec{\gamma}_K$, связанных соотношением (44:4).

Условие (30:1) из п. 30.1.1. Выполнение его для $\vec{\beta}_J$, $\vec{\gamma}_K$, очевидно, эквивалентно его выполнению для $\vec{\alpha}_I$.

Условие (30:2) из п. 30.1.1. Для $\vec{\beta}_J$, $\vec{\gamma}_K$ это условие утверждает (ввиду (44:4)), что

(44:5) $$\sum_{i'=1'}^{k'} \alpha_{i'} = 0,$$

(44:6) $$\sum_{j''=1''}^{l''} \alpha_{j''} = 0.$$

Для $\vec{\alpha}_I$ оно означает, что

(44:7) $$\sum_{i'=1'}^{k'} \alpha_{i'} + \sum_{j''=1''}^{l''} \alpha_{j''} = 0.$$

Таким образом, выполнение этого условия для $\vec{\beta}_J$ и $\vec{\gamma}_K$ влечет его выполнение для $\vec{\alpha}_I$, в то время как его выполнение для $\vec{\alpha}_I$ не влечет его выполнения для $\vec{\beta}_J$ и $\vec{\gamma}_K$; действительно, из (44:7) следует эквивалентность (44:5) и (44:6), но не следует выполнение любого из них.

[1]) Удобно ввести заново обозначения для игроков из п. 41.3.1.

Итак, мы имеем:

(44:A) Из любых двух дележей $\vec{\beta}_J$ и $\vec{\gamma}_K$ можно составить дележ $\vec{\alpha}_I$, в то время как дележ $\vec{\alpha}_I$ можно разложить на два дележа $\vec{\beta}_J$ и $\vec{\gamma}_K$ тогда и только тогда, когда они удовлетворяют равенству (44:5), т. е. (44:6).

Такой дележ $\vec{\alpha}_I$ мы будем называть *разложимым* (относительно множеств $J$, $K$).

**44.2.2.** Описанное положение дел аналогично тому, которое имеет место для самих игр: композиция возможно всегда, в то время как разложение не всегда возможно. Здесь также разложимость есть явление исключительное [1]).

Наконец, нужно заметить, что понятие композиции дележей имеет простой интуитивный смысл. Оно соответствует той же самой операции, согласно которой два отдельных явления рассматриваются как одно и которая играла соответствующую роль для игр в пп. 41.2.1, 41.2.3, 41.2.4. Разложение дележа $\vec{\alpha}_I$ (на $\vec{\beta}_J$, $\vec{\gamma}_K$) возможно тогда и только тогда, когда два самостоятельных множества игроков $J$, $K$ получают в соответствии с множествами дележей $\vec{\alpha}_I$ «справедливые платы», которые равны нулю. В этом состоит смысл условия (44:A) (т. е. (44:5) и (44:6)).

**44.2.3.** Рассмотрим множество $\mathbf{V}_J$ дележей $\vec{\beta}_J$ и множество $\mathbf{W}_K$ дележей $\vec{\gamma}_K$. Пусть $\mathbf{U}_I$ — множество тех дележей $\vec{\alpha}_I$, которые получаются с помощью композиции всех $\vec{\beta}_J$ из $\mathbf{V}_J$ со всеми $\vec{\gamma}_K$ из $\mathbf{W}_K$. Тогда мы будем говорить, что $\mathbf{U}_I$ получается с помощью *композиции* из $\mathbf{V}_I$, $\mathbf{W}_K$, что $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$ получаются с помощью *разложения* из $\mathbf{U}_I$ (для $J$, $K$) и что $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$ являются соответственно ($J$-, $K$-) *компонентами* $\mathbf{U}_I$.

Очевидно, что операцию композиции можно выполнить всегда, каковы бы ни были $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$, в то время как данное множество $\mathbf{U}_I$ не всегда допускает разложение (относительно $J$, $K$). Если множество $\mathbf{U}_I$ может быть разложено, то мы его называем *разложимым* (относительно $J$, $K$).

Заметим, что разложимость $\mathbf{U}_I$ является очень сильным ограничением; в частности, из него следует, что все элементы $\vec{\alpha}_I$ из $\mathbf{U}_I$ должны быть разложимы (см. интерпретацию разложимости в конце п. 44.2.2).

Для того чтобы полнее проинтерпретировать эти понятия для множеств дележей $\mathbf{U}_I$, $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$, удобно ограничиться решениями игр Г, Δ, Н.

## 44.3. Композиция и разложение решений. Основные возможности и предположения

**44.3.1.** Пусть $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$ — два решения соответственно игр Δ, Н. Их композиция дает множество дележей $\mathbf{U}_I$, которое, как можно ожидать, является решением игры Г. Действительно, $\mathbf{U}_I$ представляет собой выражение нормы поведения, которое можно сформулировать следующим образом. Мы дадим словесную формулировку в тексте в виде утверждений (44:B:a) — (44:B:c), приводя в сносках их математические формулировки,

[1]) Существуют значительные технические различия между понятиями разложимости и т. д. для игр и для дележей. Отметим, однако, аналогию между соотношениями (41:4), (41:5) из п. 41.3.2; (41:8), (41:9), (41:10) из п. 41.4.2 и соотношениями (44:4), (44:5), (44:6), (44:7).

которые, как проверит читатель, в точности соответствуют нашему определению композиции.

(44:B:a) Игроки из $J$ всегда получают в совокупности свои «справедливые платы» (нуль), и то же самое верно для игроков из $K$ [1]).

(44:B:b) Не существует никакой связи между судьбой игроков из множества $J$ и игроков из множества $K$ [2]).

(44:B:c) Судьба игроков из $J$ определяется нормой поведения $\mathbf{V}_J$[3]), а судьба игроков из $K$ определяется нормой поведения $\mathbf{W}_K$ [4]).

Если представить себе, что две компоненты игры возникли совершенно независимо друг от друга, то это есть правдоподобный способ рассматривать их отдельные решения $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$ как единое решение $\mathbf{U}_I$ составной игры $\Gamma$.

Однако, так как решение есть понятие точное, это утверждение нуждается в доказательстве, т. е. мы должны доказать следующее:

(44:C) Если $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$ — решения игр $\Delta$, $\mathrm{H}$, то их композиция $\mathbf{U}_I$ есть решение игры $\Gamma$.

**44.3.2.** Это утверждение, кстати, представляет собой другой пример характерного соотношения между здравым смыслом и математической строгостью. Хотя некоторое утверждение (в нашем случае — утверждение о том, что $\mathbf{U}_I$ есть решение, если решениями являются $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$) вытекает из здравого смысла, оно не является обоснованным в пределах теории (в нашем случае — на основании определений п. 30.1.1), пока оно не доказано математически. В этих пределах могло бы показаться, что строгость важнее, чем здравый смысл. Такое утверждение, однако, ограничено дальнейшим соображением, состоящим в том, что если математическим доказательством не удается установить результат, вытекающий из здравого смысла, то имеются веские доводы для того, чтобы вообще отказаться от соответствующей теории. Таким образом, примат математического метода распространяется только на установление контроля над теориями — таким путем, который не был бы доступен одному только здравому смыслу.

Мы увидим, что утверждение (44:C) верно, хотя и не тривиально.

Хотелось бы ожидать, что также верно утверждение, обратное утверждению (44:C), т. е. потребовать доказательства следующего утверждения:

(44:D) Если $\mathbf{U}_I$ — решение $\Gamma$, то его можно разложить на решения $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$ игр $\Delta$, $\mathrm{H}$.

На первый взгляд это утверждение весьма правдоподобно: так как игра $\Gamma$ фактически есть композиция двух совершенно независимых игр, то каким образом какое-либо решение игры $\Gamma$ могло бы не отразить эту ее составную структуру?

Однако удивительный факт состоит в том, что утверждение (44:D), вообще говоря, неверно. Читатель мог бы подумать, что этот факт должен заставить нас отказаться от нашей теории (т. е. в смысле п. 30.1.1) или,

---

[1]) Каждый элемент $\vec{\alpha}_I$ из $\mathbf{U}_I$ разложим.

[2]) Любой дележ $\vec{\beta}_J$, использованный для образования $\mathbf{U}_I$, и любой дележ $\vec{\gamma}_K$, использованный для образования $\mathbf{U}_I$, в результате композиции дают элемент $\vec{\alpha}_I$ из $\mathbf{U}_I$.

[3]) Упомянутые выше дележи $\vec{\beta}_J$ являются в точности элементами $\mathbf{V}_J$.

[4]) Упомянутые выше дележи $\vec{\gamma}_K$ являются в точности элементами $\mathbf{W}_K$.

по крайней мере, существенно ее модифицировать, если мы серьезно принимаем сформулированное выше методологическое положение. Однако мы покажем, что предпосылки для утверждения (44:D), основанные на «здравом смысле», весьма сомнительны. Действительно, наш результат, противоречащий утверждению (44:D), получит весьма правдоподобную интерпретацию, которая с успехом связывает его с хорошо известными явлениями в социальных организациях.

**44.3.3.** Правильное понимание причин ложности утверждения (44:D) и обоснованности теории, которая его заменяет, делает необходимыми более детальные исследования. Прежде чем перейти к ним, было бы полезно сначала сделать некоторые разъяснения относительно того, почему утверждение (44:D) оказывается неверным.

Утверждение (44:D) естественно разбить на два:

(44:D:a) Если $\mathbf{U}_I$ — решение игры Г, то оно разложимо (относительно $J$, $K$).

(44:D:b) Если решение $\mathbf{U}_I$ игры Г разложимо (относительно $J$, $K$), то его компоненты $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$ являются решениями игр $\Delta$, Н.

Теперь будет показано, что утверждение (44:D:b) верно, а (44:D:a) — нет, т. е. может оказаться, что разложимая игра обладает неразложимым решением [1]).

Однако разложимость решения (или любого множества дележей) выражается условиями (44:B:a) — (44:B:c) из п. 44.3.1. Поэтому для неразложимого решения, о котором говорилось выше, одно или более из этих условий должно нарушаться. Окажется (см. п. 46.11), что условием, которое нарушается, является условие (44:B:a). Этот факт может показаться очень серьезным, потому что условие (44:B:a) является основным в том смысле, что если оно нарушается, то условия (44:B:b), (44:B:c) нельзя даже сформулировать.

Понятие разложения обладает некоторой гибкостью. Это его свойство проявилось в пп. 42.2.1, 42.2.2 и 42.5.2, где нам удалось модификацией этого понятия избавиться от неудобного дополнительного условия, связанного с разложимостью игры. Мы увидим, что нам снова удается обойти трудности с помощью этого приема, так что утверждение (44:D) будет заменено правильной и удовлетворительной теоремой. Поэтому мы должны стремиться так модифицировать нашу систему, чтобы от условия (44:B:a) можно было отказаться.

Мы достигнем этой цели, и тогда станет ясно, что условия (44:B:b) и (44:B:c) не представляют трудностей и что можно получить законченный результат.

### 44.4. Обобщение теории. Внешние источники

**44.4.1.** Теперь пришло время отказаться от ограничения, которое мы временно ввели в п. 44.1; это ограничение состоит в том, что все рассматриваемые игры являются играми с нулевой суммой. Мы возвращаемся к точке зрения п. 42.2.2, согласно которой все игры являются играми с постоянной суммой.

Приняв это соглашение, рассмотрим игру Г, являющуюся разложимой (относительно $J$, $K$) соответственно с $J$-, $K$-компонентами $\Delta$, Н.

---

[1]) Этот факт аналогичен явлению, состоящему в том, что симметричная игра может иметь несимметричное решение; см. п. 37.2.1.

Теорию композиции и разложения дележей, изложенную в пп. 44.2.1, 44.2.2, теперь можно повторить с незначительными изменениями.

Соотношения (44:1) — (44:4) могут быть оставлены без изменений, а в равенствах (44:5) — (44:7) изменяются только правые части. Так как соотношение (30.2) из п. 30.1.1 было заменено условием (42:8*) из п. 42.4.1, формулы (44:5) — (44:7) теперь принимают вид

(44:5*) $$\sum_{i'=1'}^{k'} \alpha_{i'} = \mathrm{v}(J),$$

(44:6*) $$\sum_{j''=1''}^{l''} \alpha_{j''} = \mathrm{v}(K)$$

и

(44:7*) $$\sum_{i'=1'}^{k'} \alpha_{i'} + \sum_{j''=1''}^{l''} \alpha_{j''} = \mathrm{v}(I) = \mathrm{v}(J) + \mathrm{v}(K).$$

(Последнее равенство в правой части имеет место ввиду (42:6:b) из п. 42.3.2 или, что то же самое, ввиду (41:6) из п. 41.3.2, где $S = J$, $T = K$.) Эта ситуация в точности соответствует ситуации п. 44.2.1; действительно, она получается из последней с помощью изоморфизма п. 42.4.2. Таким образом, дележ $\vec{\alpha}_I$ удовлетворяет условию (44:7*), но для его разложимости необходимо выполнение условий (44:5*), (44:6*); вместе с тем из (44:7*) в действительности следует лишь эквивалентность условий (44:5*) и (44:6*), но не следует выполнение какого-либо из них.

Таким образом, критерий разложимости (44:А) из п. 44.2.1 по-прежнему верен, только с условиями (44:5*) и (44:6*) вместо условий (44:5) и (44:6). Здесь можно повторить окончательное заключение п. 44.2.2: разложение дележа $\vec{\alpha}_I$ (на $\vec{\beta}_J$, $\vec{\gamma}_K$) возможно тогда и только тогда, когда этот дележ $\vec{\alpha}_I$ предписывает этим двум самостоятельным множествам игроков $J$, $K$ в точности то, что им положено,— теперь эти величины суть $\mathrm{v}(J)$, $\mathrm{v}(K)$ [1]).

Так как мы знаем, что это ограничение для разложимости дележей, причиной которого является (44:В:а) из п. 44.3.1, есть источник трудностей, мы должны снять его. Это означает снятие условий (44:5*) и (44:6*), т. е. условия (42:8*) п. 42.4.1, из которого они вытекают.

**44.4.2.** В соответствии со сказанным выше, мы попытаемся развить теорию игры Г с постоянной суммой с новым понятием дележей, которое основано только на условии (42:7) из п. 42.4.1 (т. е. на (30:1) из п. 30.1.1), без требования (42:8*) из п. 42.4.1.

Другими словами [2]), *обобщенный дележ* представляет собой набор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, обладающих следующим свойством:

(44:8) $$\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i)) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Мы не налагаем никаких условий на $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Эти обобщенные дележи мы также будем рассматривать как векторы

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

[1]) Вместо нуля, как указывалось выше.

[2]) Мы снова обозначаем игроков через 1, ..., $n$.

**44.4.3.** Теперь будет необходимо пересмотреть все наши определения, связанные с понятием дележа, т. е. определения пп. 30.1.1 и 44.2.1. Но сначала стоит этому понятию обобщенного дележа дать интерпретацию.

Сущность этого понятия состоит в том, что оно представляет собой распределение некоторых величин между игроками, причем не требуется, чтобы в сумме они составляли постоянную сумму игры Г.

Такое соглашение не соответствовало бы ситуации, в которой игроки имеют дело только друг с другом. Однако мы всегда можем понимать дележ как схему распределения, предложенную совокупности всех игроков. (Эта идея проходит, например, целиком через пп. 4.4, 4.5; она очень ясна и в п. 4.4.1.) Такое предложение может исходить от одного из игроков [1]), но это несущественно. Равным образом, мы можем представить себе, что различные дележи представляются на рассмотрение игроков Г из внешнего источника. Все это согласуется с нашими предыдущими исследованиями, но во всех них эти «внешние источники» проявляются только как источники предложений, не прибавляющие и не изымающие ничего из доходов игры.

## 44.5. Эксцесс

**44.5.1.** Теперь наше понятие обобщенных дележей можно использовать для выражения того факта, что «внешние источники» могут делать предложения, которые фактически допускают вклады или изъятия, т. е. передачи. Для обобщенного дележа $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ величина этой передачи равна

$$e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \mathrm{v}(I) \tag{44:9}$$

и будет называться *эксцессом дележа* $\vec{\alpha}$. Так,

(44:10)
$$\begin{aligned} e &> 0 \quad \text{для вклада,} \\ e &= 0, \quad \text{если передача не осуществляется,} \\ e &< 0 \quad \text{для изъятия.} \end{aligned}$$

Для того чтобы получить реалистичные задачи, необходимо будет подчинить этот эксцесс некоторым подходящим ограничениям; в дальнейшем это мы должным образом используем.

Важно понять, каким образом эти передачи взаимодействуют с игрой. Передачи представляют собой часть предложений, поступающих извне, которые принимаются или отвергаются игроками, действующими друг против друга в соответствии с принципами доминирования и т. д. [2]).

---

[1]) Который пытается образовать коалицию. Так как мы рассматриваем весь дележ как предложение этого игрока, это заставляет нас предполагать, что он делает предложение даже тем игрокам, которые не будут включены в коалицию. Этим игрокам он может предложить их минимальные выигрыши v $((i))$ (а возможно, и больше, см. пп. 38.3.2 и 38.3.3). Могут оказаться игроки, находящиеся в промежуточных положениях между положениями «быть включенным в коалицию» и «быть исключенным из коалиции» (см. вторую альтернативу в п. 37.1.3). Конечно, игроки, находящиеся в менее благоприятном положении, могут сделать свою неудовлетворенность эффективной, что приведет к понятию доминирования и т. д.

[2]) Это, конечно, узкое и, возможно, даже несколько произвольное описание социальных процессов. Однако нужно помнить, что мы используем его только для определенной и ограниченной цели: определить состояния устойчивого равновесия, т. е. решения. Заключительные замечания п. 4.6.3 должны сделать это утверждение достаточно ясным.

В течение этого процесса любое неудовлетворенное множество игроков может прибегнуть к игре Г, которая является единственным критерием эффективности их предпочтения своего положения в одном (обобщенном) дележе против другого [1]). Таким образом, игра, являющаяся физическим фоном рассматриваемых социальных процессов, определяет устойчивость всех деталей организации, но инициатива исходит от внешних предложений, сопровождаемых ограничениями на эксцесс, о которых говорилось выше.

**44.5.2.** Простейший вид, который может принять «ограничение», наложенное на эксцесс, состоит в точном указании его значения $e$. При интерпретации этого указания нужно помнить (44:10).

Ситуация, возникающая при $e \gtrless 0$, на первый вдгляд может показаться парадоксальной.

Это особенно верно в случае, когда $e < 0$, т. е. когда извне предпринимается попытка изъятия. Почему игроки, которые могут снова вступить в игру с постоянной суммой v $(I)$, должны принимать предложение с меньшим общим выигрышем? Иначе говоря, как может быть устойчивой основанная на таком принципе «норма поведения», «социальный порядок»? Тем не менее имеется ответ: игра только тогда стоит v $(I)$, когда все игроки образуют коалицию и действуют сообща. Если они разбиваются на враждебные группы, то каждая группа может оценить свои шансы более пессимистично, и такое деление может стабилизировать общий выигрыш, меньший чем v $(I)$.

Замечание. В качестве первого количественного указания эвристически можно привести следующее: если игроки сгруппированы в непересекающиеся множества (коалиции) $S_1, \ldots, S_p$, то общий выигрыш, согласно их собственным оценкам, будет равен v $(S_1) + \ldots +$ v $(S_p)$. Эта величина, согласно (42:6:c) из п. 42.3.2, не превосходит v $(I)$.

Довольно странно, что эта сумма при $p = 2$ ввиду (42:6:b) п. 42.3.2 фактически равна v $(I)$, т. е. в этой модели несогласия между тремя или более группами являются действенным источником убытка.

Ввиду (42:6:c) из п. 42.3.2 ясно, что все указанные выше суммы v $(S_1) + \ldots$ $\ldots +$ v $(S_p)$ не меньше, чем $\sum_{i=1}^{n}$ v $((i))$. С другой стороны, это последнее выражение само есть одна из этих сумм (положить $p = n$, $S_i = (i)$). Таким образом, убыток является наибольшим, когда каждый игрок изолирован от всех остальных.

Поэтому все это явление пропадает, когда

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}\,((i)) = \mathrm{v}\,(I),$$

т. е. когда игра несущественна. (См. (42:11) в п. 42.5.1.)

Альтернатива $e > 0$, т. е. когда влияние извне состоит в добровольном даре, может показаться менее трудной для анализа. Но в этом случае также необходимо изучить игру для того, чтобы видеть, как распределение этого дара среди игроков может управляться устойчивыми соглашениями. Следует ожидать, что оптимистическая оценка своих собственных шансов, полученная из возможностей различных коалиций, в которых игроки могли бы участвовать, определит их требования. Теория тогда должна дать способ их приспособления к доступному общему выигрышу.

---

[1]) Мы, конечно, ссылаемся на определения эффективности и доминирования, см. п. 4.4.1 и начало п. 4.4.3, приведенные в точной формулировке в п. 30.1.1. В п. 44.7.1 мы распространим точные определения на рассматриваемые здесь понятия.

## 44.6. Ограничения на эксцесс. Неизолированный характер игры в новой теории

**44.6.1.** Проведенные рассуждения показывают, что эксцесс $e$ не должен быть ни слишком малым (если $e < 0$), ни слишком большим (если $e > 0$). В первом случае могла бы возникнуть ситуация, в которой каждый игрок предпочел бы снова включиться в игру, даже если бы произошло наихудшее, т. е. если бы он был вынужден участвовать в ней изолированно [1]). В последнем случае «добровольный дар» будет «слишком большим», т. е. ни один игрок ни в одной мыслимой коалиции не сможет предъявить таких требований, чтобы исчерпать общий доступный выигрыш. Тогда сама величина дара будет действовать разлагающе на существующие механизмы организации.

В § 45 мы увидим, что эти качественные рассуждения являются правильными, и путем строгих рассуждений получим детальное описание их действия и точное значение эксцесса, при котором они становятся эффективными.

**44.6.2.** Во всех этих рассуждениях игра Г не может больше рассматриваться как изолированное явление, так как эксцесс представляет собой либо вклад, либо изъятие со стороны внешнего источника. Поэтому ясно, что все эти идеи должны быть связаны с теорией разложения игры Г. Компоненты игры Δ и Н в действительности больше не являются вполне изолированными, но сосуществуют друг с другом [2]). Таким образом, имеются веские причины рассматривать с этой точки зрения Δ и Н, в то же время рассматривать составную игру Г по-старому (т. е. как изолированную) или по-новому — вопрос спорный. Мы увидим, однако, что эта неопределенность игры Г не влияет существенно на результат, в то время как более широкий взгляд на Δ и Н оказывается абсолютно необходимым (см. п. 46.8.3, а также п. 46.10).

Если игра Г рассматривается в указанном выше смысле, т. е. как неизолированное явление с поступлениями из внешнего источника и изъятиями, производимыми им, то можно было бы попытаться сделать следующее: рассмотреть этот внешний источник как некоторого игрока, включив его вместе с остальными игроками в более широкую игру Г′. Тогда правила игры Г′ должны быть сформулированы таким образом, чтобы обеспечить механизм требуемых передач. Это требование мы сможем выполнить с помощью наших окончательных результатов, но в задаче имеются некоторые тонкости, которые лучше рассмотреть на соответствующей стадии исследования.

## 44.7. Рассмотрение новых понятий $E(e_0)$, $F(e_0)$

**44.7.1.** Пересмотр наших старых определений, упомянутых в начале п. 44.4.3, проводится очень просто.

Для *обобщенных дележей* мы имеем новые определения из п. 44.4.2. Определения *эффективности* и *доминирования* мы без изменений перено-

[1]) Это произойдет в случае, когда предлагаемый общий выигрыш $\mathrm{v}(I) + e$ меньше, чем $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}((i))$. Так как последнее выражение (ввиду (42:11) из п. 42.5.1) равно $\mathrm{v}(I) - n\gamma$, это означает, что $e < -n\gamma$.

Мы увидим в п. 45.1, что это неравенство является точным критерием того, чтобы $e$ было «слишком малым».

[2]) И это несмотря на отсутствие «взаимодействий» в той мере, в какой это предусмотрено правилами игры; см. пп. 41.2.3 и 41.2.4.

сим из п. 30.1.1 [1]), так как оказывается, что выдвинутые при обсуждении аргументы для их обоснования, которые привели к этим определениям, сохраняют силу и для предлагаемых теперь обобщений. То же самое относится и к определению *решений* (см. там же) [2]), но с одной оговоркой: согласно определению решения это понятие зависит от множества всех дележей, в котором оно рассматривается. Теперь, как указывалось в п. 44.5.1, при нашем новом понимании обобщенных дележей, мы должны будем рассматривать наложенные на них ограничения, а именно, ограничения, наложенные на их эксцесс. Эти ограничения определят множество всех обобщенных дележей, которые будут рассматриваться, и тем самым определят понятие решения.

**44.7.2.** Особое внимание мы уделим двум типам ограничений.

Во-первых, мы рассмотрим случай, когда значение эксцесса задано. Тогда мы имеем уравнение

(44:11) $$e = e_0$$

при заданном $e_0$. Это ограничение означает, что поступление извне задано в смысле обсуждения п. 44.5.2.

Во-вторых, мы рассмотрим случай, когда задана только верхняя граница эксцесса, Тогда мы имеем неравенство

(44:12) $$e \leqq e_0$$

для заданного $e_0$. Смысл этого ограничения состоит в том, что задано максимальное значение поступления извне (с точки зрения получающих его игроков).

Случай, которым мы фактически интересуемся, есть первый случай, т. е. случай из п. 44.5.2. Второй случай окажется технически полезным для исследования первого случая, хотя на первый взгляд его введение может показаться искусственным. Мы воздержимся от рассмотрения других альтернатив ввиду того, что нам удается завершить указанное выше исследование только с этими двумя случаями.

Обозначим через $E(e_0)$ множество всех обобщенных дележей, удовлетворяющих условию (44:11) (первый случай). Учитывая (44:9) из п. 44.5.1, мы можем записать (44:11) в виде

(44:11*) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \mathrm{v}(I) + e_0.$$

Обозначим через $F(e_0)$ множество всех обобщенных дележей, удовлетворяющих условию (44:12) (второй случай). Учитывая (44:9) из 44.5.1, мы можем записать (44:12) в виде

(44:12*) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(I) + e_0.$$

Для полноты мы приведем еще раз свойство обобщенного дележа, которое должно быть добавлено как к (44:11*), так и к (44:12*):

(44:13) $$\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i)) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что определения (44:9), как и (44:11*), (44:12*) и (44:13), инвариантны относительно изоморфизма, описанного в п. 42.4.2.

---

[1]) То есть, соответственно, указанные там (30:3), (30:4:a) — (30:4:c).

[2]) То есть (30:5:a), (30:5:b) или (30:5:c) (там же).

**44.7.3.** Теперь можно взять определение решения из п. 30.1.1. Ввиду центральной роли, которую играет это понятие, мы сформулируем его заново, модифицировав его применительно к новым условиям. В приводимом ниже определении можно всюду заменить $E(e_0)$ на $F(e_0)$, что отмечено квадратными скобками.

Множество $\mathbf{V} \subseteq E(e_0)$ $[F(e_0)]$ называется *решением* для $E(e_0)$ $[F(e_0)]$, если оно обладает следующими свойствами:

(44:E:a) Никакой дележ $\vec{\beta} \in \mathbf{V}$ не доминируется никаким дележом $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$.

(44:E:b) Каждый дележ $\vec{\beta} \in E(e_0)$ $[F(e_0)]$, не принадлежащий $\mathbf{V}$, доминируется некоторым дележом $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$.

(44:E:a) и (44:E:b) можно сформулировать в виде единственного условия:

(44:E:c) $\mathbf{V}$ состоит из тех элементов $E(e_0)$ $[F(e_0)]$, которые не доминируются никаким элементом из $\mathbf{V}$.

Заметим, что $E(0)$ возвращает нас к исходным определениям п. 30.1.1 (игра с нулевой суммой) и п. 42.4.1 (игра с постоянной суммой).

**44.7.4.** Понятия *композиции*, *разложения* и *компонент* для обобщенных дележей снова можно определить согласно (44:1) — (44:4) из п. 44.2.1. Как указывалось в п. 44.4.2, техническая цель нашего обобщения понятия дележа теперь осуществлена. Разложение, а также и композиция, теперь всегда могут быть выполнены.

Связь этих понятий с множествами $E(e_0)$ и $F(e_0)$ не очень проста; мы будем иметь дело с ней по мере надобности.

Для *композиции*, *разложения* и *компонент* множеств обобщенных дележей теперь можно повторить дословно определения п. 44.2.3.

## § 45. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ЭКСЦЕСС. СТРУКТУРА ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ

### 45.1. Нижняя граница эксцесса

**45.1.** В случаях, рассмотренных в пп. 30.1.1 и 42.4.1, дележи существуют всегда. Теперь положение иное: любое из множеств $E(e_0)$, $F(e_0)$ для некоторых $e_0$ может быть пустым. Очевидно, это произойдет в случае, когда (44:11*) или (44:12*) из п. 44.7.2 будут противоречить (44:13) из того же пункта,— это, очевидно, будет тот случай, когда для обеих альтернатив выполняется неравенство

$$\mathrm{v}(I) + e_0 < \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}((i)).$$

Так как ввиду (42:11) из п. 42.5.1 правая часть равна $\mathrm{v}(I) - n\gamma$, это неравенство означает, что

(45:1) $$e_0 < n\gamma.$$

Если $E(e_0)$ $[F(e_0)]$ пусто, то очевидно, что пустое множество является решением для себя, а так как оно является единственным своим подмножеством, то оно является также единственным своим решением [1]). Если

[1]) Несмотря на свою тривиальность, это обстоятельство не должно быть оставлено без внимания. Здесь текст фактически повторяет сноску 2 на стр. 297.

же, с другой стороны, $E(e_0)$ $[F(e_0)]$ непусто, то никакое из его решений не может быть пустым. Это следует из дословного повторения доказательства (31:J) из п. 31.2.1.

Правая часть неравенства (45:1) определяется игрой Г; для этой величины (взятой с противоположным знаком и с учетом (42:11) из п. 42.5.1) мы введем следующее обозначение:

(45:2) $$|\Gamma|_1 = n\gamma = \mathrm{v}(I) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}((i)).$$

Теперь мы можем подытожить наши замечания следующим образом:

(45:A) Если $e_0 < -|\Gamma|_1$, то множества $E(e_0)$ и $F(e_0)$ пусты, и пустое множество является их единственным решением. В противном случае ни $E(e_0)$, ни $F(e_0)$, а также никакое решение любого из этих множеств не может быть пустым.

Этот результат дает первое указание на то, что существуют «слишком малые» значения $e_0$ (т. е. $e$) в смысле п. 44.6.1. Действительно, он подтверждает количественную оценку из сноски 1 на стр. 379.

## 45.2. Верхняя граница эксцесса. Исключенные и вполне исключенные дележи

**45.2.1.** Обратимся теперь к тем значениям $e_0$ (т. е. $e$), которые «слишком велики» в смысле п. 44.6.1. Когда проявится дезорганизующее влияние величины $e$, которое мы там предвидели?

Как указывалось в п. 44.6.1, критическое явление состоит в следующем: эксцесс может быть слишком велик, чтобы его можно было полностью исчерпать требованиями, которые любой игрок в любой воображаемой коалиции, возможно, мог бы выдвинуть. Мы переходим к количественной формулировке этой мысли.

Лучше всего рассматривать сами обобщенные дележи, а не их эксцессы $e$. Такой дележ $\vec{\alpha}$ находится за пределами любых требований, которые могут быть выдвинуты в любой коалиции, если он назначает игрокам каждого (непустого) множества $S \subseteq I$ больше, чем эти игроки могли бы получить, образуя коалицию в Г, т. е. если для каждого непустого множества $S \subseteq I$

(45:3) $$\sum_{i \in S} \alpha_i > \mathrm{v}(S).$$

Сравнение этого неравенства с (30:3) из п. 30.1.1 показывает, что наш критерий означает требование, состоящее в том, что каждое непустое множество $S$ является для $\vec{\alpha}$ неэффективным.

В наших фактических рассуждениях будет выгодно несколько расширить ограничение (45:3) включением предельного случая равенства. Тогда это условие примет вид

(45:4) $$\sum_{i \in S} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(S) \text{ для каждого } S \subseteq I\,[1].$$

Этим дележам $\vec{\alpha}$ удобно дать специальное название. Дележи $\vec{\alpha}$, удовлетворяющие условию (45:3), мы будем называть *вполне исключенными*,

[1]) Больше нет необходимости исключать случай $S = \varnothing$, так как неравенство (45:4), в отличие от неравенства (45:3), справедливо при $S = \varnothing$. Действительно, в этом случае обе части неравенства обращаются в нуль.

а дележи, удовлетворяющие условию (45:4),— *исключенными*. Как указывалось, последнее понятие будет действительно необходимо в наших доказательствах — оба термина предназначены для выражения того факта, что обобщенный дележ исключен из игры, т. е. он не может быть эффективно поддержан в игре никакой коалицией.

**45.2.2.** Полезно еще одно замечание.

Единственным ограничением, наложенным на обобщенные дележи, является условие (44:13) из п. 44.7.2:

(45:5) $$\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i)) \quad \text{для} \quad i=1, \ldots, n.$$

Если теперь выполнено требование (45:4), чтобы дележ был исключенным,— а следовательно, и тем более, если выполнено требование (45:3), чтобы дележ был вполне исключенным,— то нет необходимости дополнительно постулировать условие (45:5). Действительно, (45:5) есть частный случай (45:4) для $S = (i)$.

Это замечание будет неявно использовано в последующих доказательствах.

**45.2.3.** Теперь мы можем вернуться к эксцессам, т. е. охарактеризовать те эксцессы, которые принадлежат исключенным (или вполне исключенным) дележам. Формальная характеристика такова:

(45:B) Игра Г определяет число $|\Gamma|_2$, обладающее следующими свойствами:

(45:B:a) Вполне исключенный обобщенный дележ с эксцессом $e$ существует тогда и только тогда, когда $e > |\Gamma|_2$.

(45:B:b) Исключенный обобщенный дележ с эксцессом $e$ существует тогда и только тогда, когда $e \geqq |\Gamma|_2$ [1].

Доказательство. Существование исключенного дележа $\vec{\alpha}$ [2]. Пусть $\alpha^0$ — максимум $\mathrm{v}(S)$ для всех $S \subseteq I$ (в том числе $\alpha^0 \geqq \mathrm{v}(\emptyset) = 0$). Положим

$$\vec{\alpha}^0 = \{\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0\} = \{\alpha^0, \ldots, \alpha^0\}.$$

Тогда для каждого непустого множества $S \subseteq I$ мы имеем $\sum_{i \in S} \alpha_i^0 \geqq \alpha^0 \geqq$ $\geqq \mathrm{v}(S)$. Это неравенство есть условие (45:4), так что дележ $\vec{\alpha}^0$ является исключенным.

Свойства исключенного дележа $\vec{\alpha}$. Согласно доказанному выше существуют исключенные дележи

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\},$$

а вместе с ними и их эксцессы $e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \mathrm{v}(I)$. Ввиду (45:4) (для $S = I$)

[1]) Интуитивный смысл этих утверждений чрезвычайно прост: правдоподобно, что для того, чтобы получить исключенный или вполне исключенный дележ, необходим некоторый (положительный) минимум эксцесса. $|\Gamma|_2$ есть этот минимум, или, вернее, нижняя граница. Так как понятия «исключенный» и «вполне исключенный» отличаются только предельным случаем (знак равенства в соотношении (45:4)), имеются основания для того, чтобы их нижние границы были равны. Эти факты выражены точно в утверждении (45:B).

[2]) Заметим, что это необходимо доказать! Оценка, которую мы приводим здесь, является грубой; относительно более точных оценок см. (45:F) ниже.

все эти эксцессы $e$ неотрицательны. По непрерывности отсюда следует, что эти эксцессы $e$ имеют минимум $e^*$. Выберем исключенный дележ $\vec{\alpha}^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$, имеющий этот эксцесс $e^*$ [1]).

Положим теперь

(45:6) $$|\Gamma|_2 = e^*.$$

Доказательство утверждений (45:B:a) и (45:B:b). Если $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — исключенный дележ, то по определению $e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \mathrm{v}(I) \geqq e^*$. Если $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — вполне исключенный дележ, то неравенство (45:3) останется в силе, если из каждого $\alpha_i$ мы вычтем достаточно малое $\delta > 0$. Поэтому дележ $\vec{\alpha}' = \{\alpha_1 - \delta, \ldots, \alpha_n - \delta\}$ является исключенным. Следовательно, по определению

$$e - n\delta = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \delta) - \mathrm{v}(I) \geqq e^*, \quad e > e^*.$$

Рассмотрим теперь исключенный дележ $\vec{\alpha}^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$, где

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* - \mathrm{v}(I) = e^*.$$

Тогда для $\vec{\alpha}^*$ выполнено (45:4); следовательно, если мы каждое $\alpha_i^*$ увеличим на $\delta > 0$, то будет выполнено (45:3). Поэтому дележ $\vec{\alpha}'' = \{\alpha_1^* + \delta, \ldots, \alpha_n^* + \delta\}$ является вполне исключенным. Его эксцесс равен $e = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^* + \delta) - \mathrm{v}(I) = e^* + n\delta$. Таким образом, каждый эксцесс $e$, равный $e^* + n\delta$, т. е. каждый эксцесс $e$, больший чем $e^*$, является эксцессом вполне исключенного дележа, а следовательно, тем более эксцессом некоторого исключенного дележа; $e^*$, конечно, есть эксцесс исключенного дележа $\vec{\alpha}^*$.

Таким образом, все части (45:B:a), (45:B:b) выполнены при (45:6).

**45.2.4.** Вполне исключенные и исключенные обобщенные дележи тесно связаны также с понятием доминирования. Соответствующие свойства формулируются далее в (45:C) и (45:D). Они составляют своеобразный антитезис друг другу. Это удивительный факт, так как два наших понятия строго аналогичны друг другу; действительно, второе понятие получается из первого включением его предельных случаев.

(45:C) Вполне исключенный обобщенный дележ $\vec{\alpha}$ не доминирует никакой другой обобщенный дележ $\vec{\beta}$.

Доказательство. Если $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$, то дележ $\vec{\alpha}$ должен иметь непустое эффективное множество.

(45:D) Обобщенный дележ $\vec{\alpha}$ является исключенным тогда и только тогда, когда он не доминируется никаким другим обобщенным дележом $\vec{\beta}$.

---

[1]) Это использование непрерывности обоснованно ввиду того, что в соотношении (45:4) допускается знак равенства.

Доказательство. Достаточность того, что дележ является исключенным. Пусть $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — исключенный дележ. Предположим противное, т. е. что $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$ по эффективному множеству $S$. Тогда $S$ непусто и $\alpha_i < \beta_i$ для $i \in S$. Таким образом, $\sum_{i \in S} \alpha_i < \sum_{i \in S} \beta_i \leqq \mathrm{v}(S)$, что противоречит (45:4).

Необходимость того, что дележ является исключенным. Пусть $S$ — (неизбежно непустое) множество, для которого нарушено условие (45:4), т. е. для которого $\sum_{i \in S} \alpha_i < \mathrm{v}(S)$. Тогда для достаточно малого $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\sum_{i \in S} (\alpha_i + \delta) \leqq \mathrm{v}(S).$$

Положим $\vec{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\} = \{\alpha_1 + \delta, \ldots, \alpha_n + \delta\}$; тогда всегда должно быть $\alpha_i < \beta_i$, и $S$ оказывается эффективным для $\vec{\beta}$: $\sum_{i \in S} \beta_i \leqq \mathrm{v}(S)$. Таким образом, $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$.

### 45.3. Рассмотрение двух границ $|\Gamma|_1$, $|\Gamma|_2$. Их отношение

**45.3.1.** Оба числа $|\Gamma|_1$, $|\Gamma|_2$, определенные в (45:2) из п. 45.1 и (45:В) из п. 45.2.3, представляют собой способ количественного измерения существенности игры Г. Точнее говоря,

(45:E) Если игра Г несущественна, то $|\Gamma|_1 = 0$, $|\Gamma|_2 = 0$. Если игра Г существенна, то $|\Gamma|_1 > 0$, $|\Gamma|_2 > 0$.

Доказательство. Утверждения, касающиеся числа $|\Gamma|_1$, которое ввиду (45:2) из п. 45.1 равно $n\gamma$, совпадают с определениями несущественности и существенности из п. 27.3 в том виде, в котором они были заново сформулированы в п. 42.5.1.

Утверждения, касающиеся $|\Gamma|_2$, следуют из соответствующих утверждений относительно $|\Gamma|_1$ в силу неравенств (45:F), которые мы можем здесь использовать.

**45.3.2.** Количественное отношение между $|\Gamma|_1$ и $|\Gamma|_2$ характеризуется следующим образом.

Всегда

(45:F) $$\frac{1}{n-1}|\Gamma|_1 \leqq |\Gamma|_2 \leqq \frac{n-2}{2}|\Gamma|_1.$$

Доказательство. Как мы знаем, $|\Gamma|_1$ и $|\Gamma|_2$ инвариантны относительно стратегической эквивалентности; поэтому мы можем предположить, что игра Г является игрой с нулевой суммой и даже редуцированной в смысле п. 27.1.4. Тогда мы можем использовать обозначения и соотношения из п. 27.2.

Так как $|\Gamma|_1 = n\gamma$, мы хотим доказать, что

(45:7) $$\frac{n}{n-1}\gamma \leqq |\Gamma|_2 \leqq \frac{n(n-2)}{2}\gamma.$$

Доказательство первого из неравенств (45:7). Пусть $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — исключенный дележ. Тогда для множества $S = I - (k)$, имеющего $n-1$ элементов, (45:4) дает

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \alpha_k = \sum_{i \in S} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(S) = \gamma,$$

т. е.

(45:8) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \alpha_k \geqq \gamma.$$

Суммирование (45:8) по $k = 1, \ldots, n$ дает

$$n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \geqq n\gamma,$$

т. е.

$$(n-1) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqq n\gamma, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqq \frac{n}{n-1}\gamma.$$

Но $\mathrm{v}(I) = 0$, так что $e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Таким образом, для всех исключенных дележей $e \geqq \frac{n}{n-1}\gamma$; следовательно, $|\Gamma|_2 \geqq \frac{n}{n-1}\gamma$.

Доказательство второго из неравенств (45:7).

Положим $\alpha^{00} = \frac{n-2}{n}\gamma$ и $\vec{\alpha}^{00} = \{\alpha_1^{00}, \ldots, \alpha_n^{00}\} = \{\alpha^{00}, \ldots, \alpha^{00}\}$. Этот дележ $\vec{\alpha}^{00}$ является исключенным, т. е. для всех $S \subseteq I$ он удовлетворяет неравенству (45:4). Действительно, пусть $p$ — число элементов $S$. Тогда мы имеем:

$p = 0$; $S = \varnothing$, и (45:4) тривиально;

$p = 1$; $S = (i)$, и (45:4) принимает вид $\alpha^{00} \geqq \mathrm{v}((i))$, т. е. $\frac{n-2}{n}\gamma \geqq -\gamma$, что очевидно;

$p \geqq 2$; (45:4) принимает вид $p\alpha^{00} \geqq \mathrm{v}(S)$; но ввиду (27:7) из п. 27.2

$$\mathrm{v}(S) \leqq (n-p)\gamma,$$

так что достаточно доказать, что $p\alpha^{00} \geqq (n-p)\gamma$, т. е. что $p\frac{n-2}{2}\gamma \geqq \geqq (n-p)\gamma$. Это эквивалентно неравенству $p\frac{n}{2}\gamma \geqq n\gamma$, которое следует из того, что $p \geqq 2$.

Таким образом, дележ $\vec{\alpha}^{00}$ действительно является исключенным. Так как $\mathrm{v}(I) = 0$, эксцесс равен

$$e^{00} = n\alpha^{00} = \frac{n(n-2)}{2}\gamma.$$

Следовательно, $|\Gamma|_2 \leqq \frac{n(n-2)}{2}\gamma$.

**45.3.3.** Заслуживает внимания рассмотрение неравенств (45:F) последовательно для $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$n = 1, 2$; в этих случаях коэффициент $\frac{1}{(n-1)}$ в нижней границе неравенства больше, чем коэффициент $\frac{(n-2)}{2}$ в верхней границе[1]). Это может показаться абсурдным. Но так как для $n = 1, 2$ игра $\Gamma$ необходимым образом несущественна (см. первое замечание в п. 27.5.2), в этих случаях мы имеем $|\Gamma|_1 = 0$, $|\Gamma|_2 = 0$, так что противоречия исчезают.

[1]) Они равны соответственно $\infty$ и $-1/2$ для $n = 1$ и 1 и 0 для $n = 2$. Отметим также парадоксальные значения $\infty$ и $-1/2!$.

$n=3$; в этом случае два коэффициента $\frac{1}{(n-1)}$ и $\frac{(n-2)}{2}$ совпадают: оба они равны $\frac{1}{2}$, так что неравенства сводятся к одному уравнению

(45:9) $$|\Gamma|_2=\frac{1}{2}|\Gamma|_1.$$

$n \geqq 4$; в этих случаях коэффициент $\frac{1}{(n-1)}$ нижней границы определенно меньше коэффициента $\frac{(n-2)}{2}$ верхней границы [1]). Поэтому для $|\Gamma|_2$ неравенства оставляют здесь невырождающийся интервал.

Нижняя граница $|\Gamma|_2=\frac{1}{n-1}|\Gamma|_1$ является точной, т. е. для каждого $n \geqq 4$ имеется существенная игра, для которой достигается эта граница. Также существуют для каждого $n \geqq 4$ существенные игры, для которых $|\Gamma|_2 > \frac{1}{n-1}|\Gamma|_1$, но, по-видимому, достичь верхней границы $|\Gamma|_2 = \frac{n-2}{2}|\Gamma|_1$ в нашем неравенстве невозможно. Точное значение верхней границы до сих пор еще не было найдено. У нас нет необходимости обсуждать эти вопросы здесь или где-либо дальше [2]).

**45.3.4.** Выражаясь более качественно, мы можем поэтому сказать, что $|\Gamma|_1$ и $|\Gamma|_2$ являются количественными мерами существенности игры Γ. Они измеряют эту существенность различными и до некоторой степени независимыми способами. Действительно, отношение $|\Gamma|_2/|\Gamma|_1$, которое не определено для $n=1$, 2 (нет существенных игр!) и постоянно для $n=3$ (значение его равно $^1/_2$), изменяется при $n \geqq 4$ вместе с Γ.

В пп. 45.1 и 45.2 мы видели, что эти две величины действительно измеряют границы, между которыми заданный эксцесс не будет «дезорганизовывать» игроков в смысле п. 44.6.1. Согласно нашим результатам, эксцесс $e$, меньший чем $-|\Gamma|_1$, «слишком мал», а эксцесс $e$, больший чем $|\Gamma|_2$, «слишком велик» в этом смысле. Более точный смысл этой точке зрения будет придан в п. 46.8.

## 45.4. Исключенные дележи и различные решения. Теорема, связывающая $E(e_0)$ и $F(e_0)$

**45.4.1.** Из (44:E:c) в определении решения в п. 44.7.3 и результата (45:D) п. 45.2.4 сразу следует утверждение.

(45:G) Решение **V** для множества $E(e_0)$ $[F(e_0)]$ должно содержать каждый исключенный обобщенный дележ из $E(e_0)$ $[F(e_0)]$.

Важность этого результата состоит в той роли, которую он будет играть в последующих исследованиях.

---

[1]) $\frac{1}{n-1}<\frac{n-2}{2}$ означает, что $2<(n-1)(n-2)$, что, очевидно, справедливо для всех $n \geqq 4$.

[2]) Для $n=4$ наше неравенство принимает вид $\frac{1}{3}|\Gamma|_1 \leqq |\Gamma|_2 \leqq |\Gamma|_1$. Как отмечалось выше, мы знаем существенную игру, для которой $|\Gamma|_2=\frac{1}{3}|\Gamma|_1$, а также игру, для которой $|\Gamma|_2=\frac{1}{2}|\Gamma|_1$.

После того, что было сказано о роли $E(e_0)$ и $F(e_0)$ в начале п. 44.7.2, становится очевидной важность установления исчерпывающих взаимосвязей между этими двумя случаями. Иначе говоря, мы должны установить связь между решениями для $E(e_0)$ и $F(e_0)$.

Оценить интуитивно все различие между $E(e_0)$ и $F(e_0)$ и их решениями нелегко. Заранее трудно понять, почему вообще должно появиться какое-либо различие: в первом случае «дар», полученный игроками извне, имеет заданное значение $e_0$, а во втором случае задано его максимальное значение $e_0$. Трудно понять, каким образом в «устойчивой» норме поведения (т. е. в решении) «внешнему источнику», который хочет вложить не больше, чем $e_0$, когда-либо будет дана возможность вложить меньше, чем $e_0$. Однако наш прошлый опыт предостерегает нас от поспешных заключений в этом отношении. Так, в пп. 33.1 и 38.3 мы видели, что уже игры трех и четырех лиц имеют решения, в которых изолированный и потерпевший поражение игрок не «эксплуатируется» до предела физических возможностей, и исследуемый сейчас случай до некоторой степени аналогичен этому.

**45.4.2.** (45:G) дает нам возможность сформулировать более точное утверждение:

Согласно (45:G), исключенный обобщенный дележ $\vec{\alpha}$ принадлежит каждому решению для $F(e_0)$, если он принадлежит $F(e_0)$. С другой стороны, дележ $\vec{\alpha}$, очевидно, не может принадлежать никакому решению для $E(e_0)$, если он не принадлежит $E(e_0)$.

Введем теперь определение:

(45:10) $D^*(e_0)$ есть множество всех исключенных обобщенных дележей $\vec{\alpha}$, принадлежащих $F(e_0)$, но не принадлежащих $E(e_0)$.

Итак, мы видим, что любое решение для $F(e_0)$ содержит все элементы $D^*(e_0)$; любое решение для $E(e_0)$ не содержит элементов $D^*(e_0)$. Следовательно, если $D^*(e_0)$ непусто, то $F(e_0)$ и $E(e_0)$ наверняка не имеют общих решений.

Далее, исключенный дележ $\vec{\alpha} \in D^*(e_0)$ характеризуется тем, что он имеет эксцесс $e$, не больший чем $e_0$, но не равный $e_0$, т. е. он характеризуется неравенством

(45:11) $$e < e_0.$$

Из этого мы заключаем, что

(45:H) $D^*(e_0)$ пусто тогда и только тогда, когда $e_0 \leqq |\Gamma|_2$.

Доказательство. Ввиду (45:B) и (45:11) множество $D^*(e_0)$ непусто тогда и только тогда, когда существует число $e_0$, удовлетворяющее неравенствам $|\Gamma|_2 \leqq e < e_0$, т. е. $e_0 > |\Gamma|_2$. Следовательно, $D^*(e_0)$ пусто тогда и только тогда, когда $e_0 \leqq |\Gamma|_2$.

Таким образом решения для $F(e_0)$ и $E(e_0)$, несомненно, различны, когда $e_0 > |\Gamma|_2$. Этот факт является еще одним доказательством того, что эксцесс $e_0$ «слишком велик» для нормального поведения, когда он больше $|\Gamma|_2$.

**45.4.3.** Теперь мы можем доказать, что указанное выше различие между решениями для $E(e_0)$ и $F(e_0)$ является единственным. Точнее это выглядит так:

(45:I) Соотношение

(45:12) $$\mathbf{V} \rightleftarrows \mathbf{W} = \mathbf{V} \cup D^*(e_0)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми решениями $\mathbf{V}$ для $E(e_0)$ и всеми решениями $\mathbf{W}$ для $F(e_0)$.

Это утверждение будет доказано в следующем пункте.

## 45.5. Доказательство теоремы

**45.5.1.** Мы начнем с доказательства некоторых вспомогательных лемм.

Первая лемма состоит в совершенно очевидном утверждении, имеющем, однако, широкие приложения:

(45:J) Пусть два обобщенных дележа $\vec{\gamma} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ и $\vec{\delta} = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ связаны соотношением

(45:13) $$\gamma_i \geqq \delta_i \text{ для всех } i = 1, \ldots, n;$$

тогда для каждого $\vec{\alpha}$ из $\vec{\alpha} \succ \vec{\gamma}$ следует $\vec{\alpha} \succ \vec{\delta}$.

Смысл этого результата состоит, очевидно, в том, что соотношение (45:13) выражает в некотором смысле подчиненность дележа $\vec{\delta}$ дележу $\vec{\gamma}$, несмотря на нетранзитивность отношения доминирования. Однако эта подчиненность не столь полна, как этого можно было бы ожидать. Так, из соотношения $\vec{\delta} \succ \vec{\beta}$ нельзя сделать представляющийся правдоподобным вывод о том, что $\vec{\gamma} \succ \vec{\beta}$, потому что из эффективности множества $S$ для $\vec{\delta}$ может и не следовать его эффективность для $\vec{\gamma}$. (Читатель должен вспомнить основные определения п. 30.1.1.)

Нужно также заметить, что утверждение (45:J) является содержательным только потому, что мы обобщили понятие дележа. Для наших старых определений (см. п. 42.4.1) мы должны были бы иметь $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$; следовательно, из $\gamma_i \geqq \delta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$ должно было быть $\gamma_i = \delta_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$, т. е. $\vec{\gamma} = \vec{\delta}$.

**45.5.2.** Приведем теперь леммы, непосредственно осуществляющие требуемое доказательство теоремы (45:I).

(45:K) Если $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$, где $\vec{\alpha}$ — исключенный дележ, $\vec{\alpha} \in F(e_0)$, а $\vec{\beta} \in E(e_0)$, то существует дележ $\vec{\alpha}'$, для которого $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$, причем $\vec{\alpha}'$ — исключенный дележ и $\vec{\alpha}' \in E(e_0)$.

Доказательство. Пусть $S$ — множество, участвующее в условиях (30:4:a) — (30:4:c) из п. 30.1.1 применительно к отношению доминирования $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. Из равенства $S = I$ следовало бы, что для всех $i = 1, \ldots, n$ $\alpha_i > \beta_i$, так что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \mathrm{v}(I) > \sum_{i=1}^{n} \beta_i - \mathrm{v}(I).$$

Но так как $\vec{\alpha} \in F(e_0)$, а $\vec{\beta} \in E(e_0)$, должно быть $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i - v(I) \leqq e_0 = \sum_{i=1}^{n}\beta_i - v(I)$, что противоречит предыдущему неравенству.

Следовательно, $S \neq I$. Выберем поэтому некоторое $i_0 = 1, \ldots, n$, не принадлежащее $S$. Положим $\vec{\alpha}' = \{\alpha_1', \ldots, \alpha_n'\}$, где

$$\alpha_{i_0}' = \alpha_{i_0} + \varepsilon,$$

$$\alpha_i' = \alpha_i \quad \text{для} \quad i \neq i_0,$$

а $\varepsilon \geqq 0$ выбрано так, что $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i' - v(I) = e_0$. Тогда для всех $i$ будет $\alpha_i' \geqq \alpha_i$; следовательно, дележ $\vec{\alpha}'$ является исключенным и, очевидно, принадлежит $E(e_0)$. Кроме того, так как $\alpha_i' = \alpha_i$ для $i \neq i_0$, а значит, и для всех $i \in S$, то $\vec{\alpha} \vDash \vec{\beta}$ влечет $\vec{\alpha}' \vDash \vec{\beta}$.

(45:L) Каждое решение **W** для $F(e_0)$ имеет вид (45:12) из теоремы (45:I) для единственного множества $\mathbf{V} \subseteq E(e_0)$ [1]).

Доказательство. Очевидно, рассматриваемое множество **V**, если оно вообще существует, есть пересечение $\mathbf{W} \cap E(e_0)$, так что оно единственно. Для того чтобы соотношение (45:12) выполнялось для

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} \cap E(e_0),$$

нам необходимо только, чтобы остаток **W** был равен $D^*(e_0)$, т. е. чтобы

(45:14) $$\mathbf{W} - E(e_0) = D^*(e_0).$$

Докажем поэтому равенство (45:14).

Каждый элемент множества $D^*(e_0)$ является исключенным и принадлежит $F(e_0)$, так что ввиду (45:G) он принадлежит **W**. Кроме того, он не принадлежит $E(e_0)$, так что он принадлежит $\mathbf{W} - E(e_0)$. Таким образом,

(45:15) $$\mathbf{W} - E(e_0) \supseteq D^*(e_0).$$

Если, кроме того,

(45:16) $$\mathbf{W} - E(e_0) \subseteq D^*(e_0),$$

то (45:15) и (45:16) вместе дадут нам (45:14), что и требуется.

Предположим поэтому, что включение (45:16) неверно.

В соответствии с этим предположением мы рассмотрим дележ $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, принадлежащий $\mathbf{W} - E(e_0)$ и не принадлежащий $D^*(e_0)$. Тогда $\vec{\alpha}$ принадлежит $F(e_0)$, но не принадлежит $E(e_0)$, так что $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i - v(I) < e_0$. Так как дележ $\vec{\alpha}$ не принадлежит $D^*(e_0)$, он не может быть исключенным. Поэтому существует такое непустое множество $S$, что $\sum_{i \in S}\alpha_i < v(S)$.

---

[1]) Мы еще не утверждаем, что это множество **V** есть решение для $E(e_0)$,— это будет установлено в (45:M).

Положим теперь $\vec{\alpha}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$, где

$$\alpha'_i = \alpha_i + \varepsilon \quad \text{для } i, \text{ принадлежащих } S,$$
$$\alpha'_i = \alpha_i \quad \text{для } i, \text{ не принадлежащих } S,$$

а $\varepsilon > 0$ выбрано так, что все еще

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i - \mathrm{v}(I) \leqq e_0 \quad \text{и} \quad \sum_{i \in S} \alpha'_i \leqq \mathrm{v}(S).$$

Такой дележ $\vec{\alpha}'$ принадлежит $F(e_0)$. Если он не принадлежит **W**, то (так как **W** есть решение для $F(e_0)$) существует такой дележ $\vec{\beta} \in \mathbf{W}$, что $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}'$. Так как для всех $i$ $\alpha'_i \geqq \alpha_i$, отсюда следует ввиду (45:J), что $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$. Но это невозможно, так как и $\vec{\beta}$, и $\vec{\alpha}$ принадлежат решению **W**. Следовательно, дележ $\vec{\alpha}'$ должен принадлежать **W**. Но для всех $i \in S$ $\alpha'_i > \alpha_i$ и $\sum_{i \in S} \alpha'_i \leqq \mathrm{v}(S)$. Поэтому $\vec{\alpha}' \succ \vec{\alpha}$. Но это отношение противоречит тому, что оба дележа, $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\alpha}$, принадлежат решению **W**.

(45:M) Множество **V** из леммы (45:L) есть решение для $E(e_0)$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{V} \subseteq E(e_0)$ и **V** удовлетворяет условию (44:E:a) из п. 44.7.3 вместе с **W** (которое является решением для $F(e_0)$), так как $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$. Таким образом, нам необходимо только проверить свойство (44:E:b) из п. 44.7.3.

Рассмотрим дележ $\vec{\beta} \in E(e_0)$, не принадлежащий **V**. Тогда $\vec{\beta}$ принадлежит и $F(e_0)$, но не принадлежит **W**; следовательно, существует такой дележ $\vec{\alpha} \in \mathbf{W}$, что $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ (**W** есть решение для $F(e_0)$). Если этот дележ $\vec{\alpha}$ принадлежит $E(e_0)$, то он принадлежит $\mathbf{W} \cap E(e_0) = \mathbf{V}$, т. е. $\vec{\alpha}$ должно принадлежать $E(e_0)$, причем $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$.

Если же дележ $\vec{\alpha}$ не принадлежит $E(e_0)$, то он принадлежит $\mathbf{W} - E(e_0) = D^*(e_0)$ и, следовательно, является исключенным. Таким образом, $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$, дележ $\vec{\alpha}$ — исключенный и принадлежащий $F(e_0)$. Следовательно, ввиду (45:K) существует такой исключенный дележ $\vec{\alpha}'$, принадлежащий $E(e_0)$, что $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$. Ввиду (45:G) этот дележ $\vec{\alpha}'$ принадлежит **W** (так как $E(e_0) \subseteq F(e_0)$, а **W** есть решение для $E(e_0)$!); следовательно, он принадлежит $\mathbf{W} \cap E(e_0) = \mathbf{V}$. Таким образом, мы получаем, что $\vec{\alpha}' \in E(e_0)$, причем $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$.

Итак, условие (44:E:b) из п. 44.7.3 выполнено в любом случае.

(45:N) Если **V** есть решение для $E(e_0)$, то **W**, определенное соотношением (45:12) теоремы (45:I), есть решение для $F(e_0)$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{W} \subseteq F(e_0)$, так что мы должны доказать свойства (44:E:a) и (44:E:b) из п. 44.7.3.

Свойство (44:E:a). Предположим, что для двух дележей $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ из **W** имеет место $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. Ввиду отношения $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ и свойства (45:D) невозможно, чтобы дележ $\vec{\beta}$ был исключенным. Поэтому $\vec{\beta}$ не содержится в $D^*(e_0)$

и, следовательно, $\vec{\beta}$ принадлежит множеству

$$\mathbf{W} - D^*(e_0) = \mathbf{V}.$$

Следовательно, отношение $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ исключает возможность того, чтобы дележ $\vec{\alpha}$ также принадлежал решению $\mathbf{V}$. Значит, $\vec{\alpha}$ принадлежит множеству

$$\mathbf{W} - \mathbf{V} = D^*(e_0).$$

Следовательно, $\vec{\alpha}$ — исключенный дележ.

Далее, согласно (45:K) существует такой исключенный дележ $\vec{\alpha}' \in E(e_0)$, что $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$. Так как $\vec{\alpha}'$ — исключенный дележ, по теореме (45:G) $\vec{\alpha}'$ принадлежит (решению для $E(e_0)$) $\mathbf{V}$. Итак, оба дележа $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\beta}$ принадлежат (решению) $\mathbf{V}$ и $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$; но эти утверждения противоречат друг другу.

Свойство (44:E:b). Рассмотрим дележ $\vec{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, принадлежащий $F(e_0)$, но не принадлежащий $\mathbf{W}$. Для каждого $\varepsilon \geqq 0$ образуем теперь дележ $\vec{\beta}(\varepsilon) = \{\beta_1(\varepsilon), \ldots, \beta_n(\varepsilon)\} = \{\beta_1 + \varepsilon, \ldots, \beta_n + \varepsilon\}$. Пусть $\varepsilon$ возрастает от нуля до тех пор, пока не осуществится впервые одно из следующих условий:

(45:17) Дележ $\vec{\beta}(\varepsilon)$ принадлежит $E(e_0)$ [1]),

(45:18) Дележ $\vec{\beta}(\varepsilon)$ является исключенным [2]).

Мы различаем эти две возможности.

Условие (45:17) осуществляется впервые, скажем, при $\varepsilon = \varepsilon_1 \geqq 0$ : $\vec{\beta}(\varepsilon_1) \in E(e_0)$, но этот дележ не является исключенным.

Если $\varepsilon_1 = 0$, то $\vec{\beta} = \vec{\beta}(0) \in E(e_0)$. Так как $\vec{\beta}$ не принадлежит $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$, существует дележ $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$, принадлежащий (решению для $E(e_0)$) $\mathbf{V}$. Тем более $\vec{\alpha}$ принадлежит $\mathbf{W}$.

Предположим теперь, что $\varepsilon_1 > 0$ и $\vec{\beta}(\varepsilon_1) \in \mathbf{V}$. Так как дележ $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$ не является исключенным, существует такое непустое множество $S \subseteq I$, что $\sum_{i \in S} \beta_i(\varepsilon_1) < \mathrm{v}(S)$. Кроме того, всегда $\beta_i(\varepsilon_1) > \beta_i$. Поэтому $\vec{\beta}(\varepsilon_1) \succ \vec{\beta}$, и $\vec{\beta}(\varepsilon_1) \in \mathbf{V}$; значит, тем более $\vec{\beta}(\varepsilon_1) \in \mathbf{W}$.

Предположим, наконец, что $\varepsilon_1 > 0$ и $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$ не принадлежит $\mathbf{V}$. Так как $\vec{\beta}(\varepsilon_1) \in E(e_0)$, существует дележ $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}(\varepsilon_1)$, принадлежащий (решению для $E(e_0)$) $\mathbf{V}$. Так как всегда $\beta_i(\varepsilon_1) > \beta_i$, из $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}(\varepsilon_1)$ следует ввиду (45:J), что $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. Кроме того, $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$, а значит, тем более $\vec{\alpha} \in \mathbf{W}$.

Условие (45:18) осуществляется раньше или одновременно с условием (45:17), скажем, при $\varepsilon = \varepsilon_2 \geqq 0$. Тогда все еще $\vec{\beta}(\varepsilon_2) \in F(e_0)$, и этот дележ является исключенным.

---

[1]) То есть эксцесс $\vec{\beta}(\varepsilon)$ равен $e_0$. Действительно, $\vec{\beta}(0) = \vec{\beta}$ принадлежит $F(e_0)$, т. е. его эксцесс не больше, чем $e_0$, и эксцесс $\vec{\beta}(\varepsilon)$ возрастает с $\varepsilon$.

[2]) То есть $\sum_{i \in S} \beta_i(\varepsilon) \geqq \mathrm{v}(S)$ для всех $S \subseteq I$. Каждая сумма $\sum_{i \in S} \beta_i(\varepsilon)$ возрастает с $\varepsilon$.

Если $\vec{\beta}(\varepsilon_2) \in E(e_0)$, то согласно (45:G) дележ $\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ принадлежит (решению для $E(e_0)$) **V**. Если $\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ не принадлежит $E(e_0)$, то $\vec{\beta}(\varepsilon_2) \in D^*(e_0)$. Таким образом, в любом случае $\vec{\beta}(\varepsilon_2) \in \mathbf{W}$.

Это исключает возможность $\varepsilon_2 = 0$, так как дележ $\vec{\beta} = \vec{\beta}(0)$ не принадлежит **W**. Поэтому $\varepsilon_2 > 0$.

Для $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ дележ $\vec{\beta}(\varepsilon)$ не является исключенным, так что существует непустое множество $S \subseteq I$, для которого $\sum_{i \in S} \beta_i(\varepsilon) < v(S)$. Следовательно, по непрерывности, существует непустое множество $S \subseteq I$, для которого $\sum_{i \in S} \beta_i(\varepsilon_2) \leqq v(S)$. Кроме того, всегда $\beta_i(\varepsilon_2) > \beta_i$ и, значит, $\vec{\beta}(\varepsilon_2) \succ \vec{\beta}$, а также $\vec{\beta}(\varepsilon_2) \in \mathbf{W}$.

Итак, в любом случае в **W** существует дележ $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. (Этим дележом $\vec{\alpha}$ оказывались в различных случаях, соответственно, дележи $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}(\varepsilon_2)$.) Таким образом, условие (44:E:b) выполнено.

Теперь мы можем дать обещанное доказательство.

Доказательство теоремы (45:I) получается немедленно путем сопоставления утверждений (45:L), (45:M), (45:N).

### 45.6. Подведение итогов и заключение

**45.6.1.** Наши основные результаты, полученные до сих пор, можно сформулировать следующим образом:

(45:O) Если

(45:O:a) $$e_0 < -|\Gamma|_1,$$

то множества $E(e_0)$, $F(e_0)$ пусты и их единственным решением является пустое множество.

Если

(45:O:b) $$-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2,$$

то множества $E(e_0)$, $F(e_0)$ непусты, имеют оба одни и те же решения и все эти решения являются непустыми множествами.

Если

(45:O:c) $$e_0 > |\Gamma|_2,$$

то множества $E(e_0)$, $F(e_0)$ непусты, не имеют общих решений и все их решения являются непустыми множествами.

Доказательство получается сразу путем сопоставления (45:A), (45:I) и (45:H).

Этот результат вполне проясняет критический характер значений $e_0 = -|\Gamma|_1, |\Gamma|_2$ и еще больше подкрепляет точку зрения на них, выраженную в конце п. 45.1, а также после теоремы (45:H) из п. 45.4.2: что происходит, когда $e_0$ становится «слишком малым» или «слишком большим» в смысле п. 44.6.1.

**45.6.2.** Мы можем теперь доказать также некоторые соотношения, которые в дальнейшем (в п. 46:5) окажутся полезными.

(45:P) Пусть **W** — непустое решение для $F(e_0)$, т. е. предположим что $e_0 \geqq -|\Gamma|_1$. Тогда

(45:P:a)
$$\max_{\vec{\alpha}\in \mathbf{W}} e(\vec{\alpha}) = e_0.$$

(45:P:b)
$$\min_{\vec{\alpha}\in \mathbf{W}} e(\vec{\alpha}) = \min(e_0, |\Gamma|_2)\ ^{1)}.$$

Кроме того,

(45:P:c)
$$\max_{\vec{\alpha}\in \mathbf{W}} e(\vec{\alpha}) - \min_{\vec{\alpha}\in \mathbf{W}} e(\vec{\alpha}) = \max(0, e_0 - |\Gamma|_2)\ ^{2)}.$$

Доказательство. (45:P:c) следует из (45:P:a) и (45:P:b), так как

$$e_0 - \min(e_0, |\Gamma|_2) = \max(e_0 - e_0, e_0 - |\Gamma|_2) = \max(0, e_0 - |\Gamma|_2).$$

Докажем теперь (45:P:a) и (45:P:b).

Из (45:I) следует, что $\mathbf{W} = \mathbf{V} \cup D^*(e_0)$, где **V** — решение для $E(e_0)$. Так как $e_0 \geqq -|\Gamma|_1$, **V** непусто (согласно (45 :A) или (45:O)). Как мы знаем, $e(\vec{\alpha}) = e_0$ для $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$ и $e(\vec{\alpha}) < e_0$ для $\vec{\alpha} \in D^*(e_0)$.

Далее, для $e_0 \leqq |\Gamma|_2$ $D^*(e_0)$ пусто (согласно (45:H)), так что

(45:19)
$$\max_{\vec{\alpha}\in \mathbf{W}} e(\vec{\alpha}) = \max_{\vec{\alpha}\in \mathbf{V}} e(\vec{\alpha}) = e_0,$$

45:20)
$$\min_{\vec{\alpha}\in \mathbf{W}} e(\vec{\alpha}) = \min_{\vec{\alpha}\in \mathbf{V}} e(\vec{\alpha}) = e_0.$$

Для $e_0 > |\Gamma|_2$ $D^*(e_0)$ непусто (снова согласно (45:H)) и представляет собой множество всех исключенных дележей $\vec{\alpha}$, для которых $e(\vec{\alpha}) < e_0$. Следовательно, согласно (45:B:b) из п. 45.2.3, эти $e(\vec{\alpha})$ имеют минимум, равный $|\Gamma|_2$. Итак, в этом случае мы имеем:

(45:19*)
$$\max_{\vec{\alpha}\in \mathbf{W}} e(\vec{\alpha}) = \max_{\vec{\alpha}\in \mathbf{V}} e(\vec{\alpha}) = e_0,$$

(45:20*)
$$\min_{\vec{\alpha}\in \mathbf{W}} e(\vec{\alpha}) = \min_{\vec{\alpha}\in D^*(e_0)} e(\vec{\alpha}) = |\Gamma|_2.$$

Равенства (45:19) и (45:19 *) вместе дают (45:P:a), а равенства (45:20) и (45:20 *) вместе дают (45:P:b).

---

1) Наше утверждение включает требование о том, что эти максимум и минимум существуют.

2) Словесно: максимальный эксцесс в решении **W** равен максимальному эксцессу, возможному в $F(e_0)$, т. е. $e_0$. Минимальный эксцесс в решении **W** снова равен $e_0$, если только $e_0 \leqq |\Gamma|_2$; если же $e_0 > |\Gamma|_2$, то в этом случае он равен только $|\Gamma|_2$. Иначе говоря, минимум есть число, возможно более близкое к $e_0$, при условии, что он никогда не должен превышать $|\Gamma|_2$.

«Ширина» интервала эксцессов равна превышению $e_0$ над $|\Gamma|_2$, если таковое имеется.

# § 46. НАХОЖДЕНИЕ ВСЕХ РЕШЕНИЙ В РАЗЛОЖИМОЙ ИГРЕ

## 46.1. Элементарные свойства разложений

**46.1.1.** Вернемся теперь к разложению игры Г.

Пусть игра Г разложима относительно множеств $J$ и $K = I - J$, причем $\Delta$ и $H$ являются ее $J$-, $K$-компонентами.

Пусть дан любой обобщенный дележ $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ для $I$; образуем его $J$-, $K$-компоненты $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ($\beta_i = \alpha_i$ для $i \in J$ и $\gamma_i = \alpha_i$ для $i \in K$) и их эксцессы:

$$(46:1) \quad \begin{cases} \text{эксцесс } \vec{\alpha} \text{ в } I: & e = e(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \mathrm{v}(I), \\ \text{эксцесс } \vec{\beta} \text{ в } J: & f = f(\vec{\alpha}) = \sum_{i \in J} \alpha_i - \mathrm{v}(J), \\ \text{эксцесс } \vec{\gamma} \text{ в } K: & g = g(\vec{\alpha}) = \sum_{i \in K} \alpha_i - \mathrm{v}(K)\,^{1)}. \end{cases}$$

Так как (согласно (42.6.b) из п. 42.3.2 или же, равным образом, (41.6) из п. 41.3.2 при $S = J$ и $T = K$)

$$(46:2) \qquad \mathrm{v}(J) + \mathrm{v}(K) = \mathrm{v}(I),$$

должно быть

$$(46:3) \qquad e = f + g.$$

(46:A) Имеем

$$(46:\text{A}:\text{a}) \qquad |\Gamma|_1 = |\Delta|_1 + |\text{H}|_1,$$

$$(46:\text{A}:\text{b}) \qquad |\Gamma|_2 = |\Delta|_2 + |\text{H}|_2.$$

(46:A:c) Игра Г несущественна тогда и только тогда, когда несущественны обе игры $\Delta$ и H.

Доказательство. Утверждение (46:A:a). Применим последовательно к играм Г, $\Delta$, H определение (45:2) из п. 45.1:

$$(46:4) \qquad |\Gamma|_1 = \mathrm{v}(I) - \sum_{i \in I} \mathrm{v}((i)),$$

$$(46:5) \qquad |\Delta|_1 = \mathrm{v}(J) - \sum_{i \in J} \mathrm{v}((i)),$$

$$(46:6) \qquad |\text{H}|_1 = \mathrm{v}(K) - \sum_{i \in K} \mathrm{v}((i)).$$

Ввиду (46:2) сравнение (46:4) с суммой (46:5) и (46:6) дает (46:A:a).

Утверждение (46:A:b). Пусть дележи $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ определены как и выше (перед (46:1)). Тогда дележ $\vec{\alpha}$ является исключенным (в $I$), если для всех $R \subseteq I$

$$\sum_{i \in R} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(R).$$

---

[1]) До сих пор не было необходимости выражать явно зависимость от $\vec{\alpha}$ эксцесса $e$ дележа $\vec{\alpha}$. Теперь мы делаем это для $e$, а также для $f$ и $g$.

Вспоминая (41.6) из п. 41.3.2, мы можем написать для этого дележа

(46:7) $$\sum_{i\in S}\alpha_i+\sum_{i\in T}\alpha_i \geqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T) \quad \text{для всех } S\subseteq J,\ T\subseteq K.$$

Снова дележи $\vec{\beta}$ и $\vec{\gamma}$ являются исключенными (соответственно в $J$ и $K$), если

(46:8) $$\sum_{i\in S}\alpha_i \geqq \mathrm{v}(S) \qquad \text{для всех } S\subseteq J,$$

(46:9) $$\sum_{i\in T}\alpha_i \geqq \mathrm{v}(T) \qquad \text{для всех } T\subseteq K.$$

Но (46:7) эквивалентно (46:8), (46:9). Действительно, (46:7) получается сложением (46:8), (46:9), в то же время (46:7) при $T=\varnothing$ сводится к (46:8), а при $S=\varnothing$ — к (46:9).

Таким образом, дележ $\vec{\alpha}$ является исключенным тогда и только тогда, когда его ($J$-, $K$-) компоненты $\vec{\beta}$ и $\vec{\gamma}$ являются исключенными. Так как их эксцессы $e$ и $f$, $g$ связаны соотношением (46:3), для их минимумов это дает соотношение (см. (45:B:b))

$$|\Gamma|_2=|\Delta|_2+|H|_2,$$

т. е. формулу (46:A:b).

Утверждение (46:A:c) получается сразу сочетанием (46:A:a) или (46:A:b) с (45:E) в применении к Γ, Δ, H.

Обе величины $|\Gamma|_1$, $|\Gamma|_2$ являются количественными мерами существенности игры Γ в смысле п. 45.3.1. Полученный выше результат утверждает, что обе эти величины аддитивны относительно композиции игр.

**46.1.2.** Другая лемма, которая будет полезна в наших дальнейших исследованиях, состоит в следующем:

(46:B) Если $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ (в Γ), то множество $S$ из п. 30.1.1 в этом отношении доминирования можно без потери общности[1]) выбрать так, что будут выполнены включения или $S\subseteq J$, или $S\subseteq K$.

Доказательство. Рассмотрим указанное в п. 30.1.1 множество $S$ для отношения доминирования $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. Если случайно окажется, что $S\subseteq J$ или $S\subseteq K$, то доказывать нечего, поэтому мы можем предположить, что не выполнено ни одно из включений $S\subseteq J$, $S\subseteq K$. Следовательно, $S=S_1\cup T_1$, где $S_1\subseteq J$, $T_1\subseteq K$ и ни $S_1$, ни $T_1$ не пусто.

Для всех $i\in S$, т. е. для всех $i\in S_1$ и для всех $i\in T_1$, мы имеем $\alpha_i>\beta_i$. Наконец,

$$\sum_{i\in S}\alpha_i \leqq \mathrm{v}(S).$$

Левая часть этого неравенства, очевидно, равна $\sum_{i\in S_1}\alpha_i+\sum_{i\in T_1}\alpha_i$, а его правая часть ввиду (41:6) из п. 41.3.2 равна $\mathrm{v}(S_1)+\mathrm{v}(T_1)$. Таким образом,

$$\sum_{i\in S_1}\alpha_i+\sum_{i\in T_1}\alpha_i \leqq \mathrm{v}(S_1)+\mathrm{v}(T_1).$$

Следовательно, должно быть выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\sum_{i\in S_1}\alpha_i \leqq \mathrm{v}(S_1), \qquad \sum_{i\in T_1}\alpha_i \leqq \mathrm{v}(T_1).$$

---

[1]) То есть это дополнительное ограничение на $S$ не меняет (в этом случае!) понятия доминирования.

Таким образом, из трех условий доминирования п. 30.1.1 (для $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$) условия (30:4:a) и (30:4:c) выполнены как для $S_1$, так и для $T_1$, а условие (30:4:b) выполнено хотя бы для одного из этих множеств. Поэтому исходное множество $S$ мы можем заменить либо на $S_1$ ($\subseteq J$), либо на $T_1$ ($\subseteq K$).

Это завершает доказательство.

### 46.2. Разложение и его связь с решениями. Первоначальные результаты относительно $F(e_0)$

**46.2.1.** Теперь мы направим наши исследования на главную цель этой части теории — нахождение всех решений $\mathrm{U}_I$ разложимой игры $\Gamma$. Эта цель будет достигнута в п. 46.6 как заключительный результат последовательности из семи лемм.

Мы начнем с некоторых чисто описательных рассуждений.

Рассмотрим решение $\mathrm{U}_I$ игры $\Gamma$ для множества $F(e_0)$. Если $\mathrm{U}_I$ пусто, то сказать больше нечего. Предположим поэтому, что $\mathrm{U}_I$ непусто; ввиду (45:A) (или, что то же самое, ввиду (45:O)) это предположение эквивалентно неравенству

$$e_0 \geqq |\Gamma|_1 = -|\Delta|_1 - |\mathrm{H}|_1.$$

Используя обозначения (46:1) из п. 46.1.1, образуем величины:

$$(46{:}10)\qquad \begin{cases} \max\limits_{\vec{\alpha}\in \mathrm{U}_I} f(\vec{\alpha}) = \bar{\varphi}, \\ \min\limits_{\vec{\alpha}\in \mathrm{U}_I} f(\vec{\alpha}) = \underline{\varphi}, \\ \max\limits_{\vec{\alpha}\in \mathrm{U}_I} g(\vec{\alpha}) = \bar{\psi}, \\ \min\limits_{\vec{\alpha}\in \mathrm{U}_I} g(\vec{\alpha}) = \underline{\psi}. \end{cases}$$

Замечание. Тот факт, что все эти величины могут быть образованы, т. е. то, что рассматриваемые максимумы и минимумы существуют и достигаются, можно установить простым рассуждением, основанным на свойствах непрерывности.

Действительно, как $f(\vec{\alpha}) = \sum\limits_{i\in J}\alpha_i - \mathrm{v}(J)$, так и $g(\vec{\alpha}) = \sum\limits_{i\in K}\alpha_i - \mathrm{v}(K)$ являются непрерывными функциями дележа $\vec{\alpha}$, т. е. его компонент $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Поэтому существование их максимумов и минимумов есть хорошо известное следствие свойств непрерывности области изменения $\vec{\alpha}$ — множества $\mathrm{U}_I$.

Для читателя, который знаком с необходимой математической теорией — топологией, мы приведем точное утверждение и его доказательство. (Лежащие в основе математические факты рассматриваются, например, Каратеодори (см. сноску 1 на стр. 356; см. там стр. 136—140, особенно теорему 5.)

$\mathrm{U}_I$ есть множество в $n$-мерном линейном пространстве $L_n$ (см. п. 30.1.1). Для того чтобы быть уверенными, что каждая непрерывная функция имеет в $\mathrm{U}_I$ максимум и минимум, мы должны знать, что множество $\mathrm{U}_I$ *ограничено и замкнуто*.

Докажем теперь следующее:

(*) Любое решение $\mathrm{U}$ для $F(e_0)$ [$E(e_0)$] в игре $\Gamma$ $n$ лиц является ограниченным и замкнутым множеством в $L_n$.

Доказательство. Ограниченность. Если дележ $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ принадлежит $\mathrm{U}$, то для каждого $i$ должно быть $\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i))$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i - \mathrm{v}(I) \leqq e_0$, а

следовательно, $\alpha_i \leqq \mathrm{v}(I) + e_0 - \sum_{j \neq i} \alpha_j \leqq \mathrm{v}(I) + e_0 - \sum_{j \neq i} \mathrm{v}((i))$. Таким образом, каждое $\alpha_i$ принадлежит фиксированному интервалу

$$\mathrm{v}((i)) \leqq \alpha_i \leqq \mathrm{v}(I) + e_0 - \sum_{j \neq i} \mathrm{v}((j)),$$

и, следовательно, эти дележи $\vec{\alpha}$ образуют ограниченное множество.

Замкнутость U эквивалентна тому, что дополнение U является открытым множеством. Ввиду (30:5:c) из п. 30.1.1 дополнение U есть множество всех дележей $\vec{\beta}$, которые доминируются каким-нибудь $\vec{\alpha} \in$ U. (Заметим, что здесь мы пользуемся тем, что U есть решение игры!)

Для любого $\vec{\alpha}$ через $D_{\vec{\alpha}}$ обозначим множество всех $\vec{\beta} \multimap \vec{\alpha}$. Тогда дополнение U есть объединение всех $D_{\vec{\alpha}}$ для $\vec{\alpha} \in$ U.

Так как объединение любого (даже бесконечного) числа открытых множеств открыто, достаточно доказать, что открытым является каждое множество $D_{\vec{\alpha}}$. Иначе говоря, надо доказать следующее: если $\vec{\beta} \multimap \vec{\alpha}$, то для каждого дележа $\vec{\beta}'$, достаточно близкого к $\vec{\beta}$, мы также имеем $\vec{\beta}' \multimap \vec{\alpha}$. В определении отношения доминирования $\vec{\beta} \multimap \vec{\alpha}$ соотношениями (30:4:a) — (30:4:c) в п. 30.1.1 дележ $\vec{\beta}$ входит только в условие (30:4:c). Но при достаточно малых изменениях $\beta_i$ справедливость (30:4:c), очевидно, не нарушается, так как (30:4:c) есть соотношение строгого неравенства.

(Заметим, что к $\vec{\alpha}$ то же самое рассуждение неприменимо, потому что $\vec{\alpha}$ входит также в соотношение (30:4:b), которое при произвольно малых изменениях могло бы нарушиться, так как (30:4:b) есть соотношение типа «не больше». Но нам это свойство необходимо для $\vec{\beta}$, а не для $\vec{\alpha}$!)

Если даны два дележа $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и $\vec{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, то существует единственный дележ $\vec{\gamma} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, который имеет ту же $J$-компоненту, что и $\vec{\alpha}$, и ту же $K$-компоненту, что и $\vec{\beta}$:

(46:11)
$$\gamma_i = \alpha_i \quad \text{для} \quad i \in J,$$
$$\gamma_i = \beta_i \quad \text{для} \quad i \in K.$$

46.2.2. Докажем теперь, что

(46:C) Если дележи $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ принадлежат $\mathrm{U}_I$, то дележ $\vec{\gamma}$, определенный равенством (46:11), принадлежит $\mathrm{U}_I$ тогда и только тогда, когда

(46:C:a)
$$f(\vec{\alpha}) + g(\vec{\beta}) \leqq e_0.$$

Кроме того,

(46:C:b)
$$e(\vec{\gamma}) = f(\vec{\alpha}) + g(\vec{\beta}).$$

Доказательство. Формула (46:C:b). Согласно (46:3) из п. 46.1.1, $e(\vec{\gamma}) = f(\vec{\gamma}) + g(\vec{\gamma})$; ясно также, что $f(\vec{\gamma}) = f(\vec{\alpha})$, $g(\vec{\gamma}) = g(\vec{\beta})$.

Необходимость (46:C:a). Так как $\mathrm{U}_I \subseteq F(e_0)$, необходимо $e(\vec{\gamma}) \leqq e_0$, а ввиду (46:C:b) это условие совпадает с (46:C:a).

Достаточность (46:C:a). Очевидно $\vec{\gamma}$, так же как $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$, есть обобщенный дележ, и (46:C:a), (46:C:b) гарантируют, что $\vec{\gamma}$ принадлежит $F(e_0)$ [1].

---

[1]) Это единственное место, где используется неравенство (46:C:a)

Предположим теперь, что $\vec{\gamma}$ не принадлежит $\mathbf{U}_I$. Тогда в $\mathbf{U}_I$ существует $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$. Согласно лемме (46:B) множество $S$ из п. 30.1.1 для этого отношения доминирования можно выбрать так, что будет справедливо включение $S \subseteq J$ или $S \subseteq K$. Теперь очевидно, что из $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$ следует, что если $S \subseteq J$, то $\vec{\delta} \succ \vec{\alpha}$, а если $S \subseteq K$, то $\vec{\delta} \succ \vec{\beta}$. Так как $\vec{\delta}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ принадлежат $\mathbf{U}_I$, обе эти альтернативы невозможны.

Следовательно, дележ $\vec{\gamma}$ должен принадлежать $\mathbf{U}_I$, что и утверждалось.

Мы переформулируем (46:C) в следующей, очевидно, эквивалентной форме:

(46:D) Пусть $\mathbf{V}_J$ — множество всех $J$-компонент, а $\mathbf{W}_K$ — множество всех $K$-компонент решения $\mathbf{U}_I$. Тогда $\mathbf{U}_I$ составляется из этих множеств $\mathbf{V}_J$ м $\mathbf{W}_K$ следующим образом:

$\mathbf{U}_I$ есть множество всех таких дележей $\vec{\gamma}$, $J$-компонента $\vec{\alpha}'$ которых принадлежит $\mathbf{V}_J$, а $K$-компонента $\vec{\beta}'$ принадлежит $\mathbf{W}_K$ и

(46:12) $$e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq e_0\ [1].$$

## 46.3. Продолжение

**46.3.** Вспоминая определение (44:B) разложимости $\mathbf{U}_I$ (относительно $J$, $K$) из п. 44.3.1, нетрудно видеть, что оно эквивалентно следующему.

$\mathbf{U}_I$ получается из $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$ из (46:D) по описанным там правилам, но без условия (46:12).

Таким образом, условие (46:12) можно интерпретировать следующим образом: оно выражает, в какой именно мере $\mathbf{U}_I$ не является разложимым. Этот факт представляет некоторый интерес в свете того, что было сказано в п. 44.3.3 относительно утверждения (44:D:a).

Можно даже сделать один шаг дальше. Легко установить необходимость условия (46:12) в (46:D). (Это соответствует (46:C:a), т. е. первым двум очень простым шагам в доказательстве (46:C).) Следовательно, (46:D) выражает тот факт, что $\mathbf{U}_I$ не дальше от разложимости, чем это неизбежно.

Все это, вместе с утверждением (44:D:b) из п. 44.3.3, делает весьма правдоподобным предположение о том, что $\mathbf{V}_J$ и $\mathbf{W}_K$ должны быть решениями игр $\Delta$ и H. Однако, учитывая обобщенность всех понятий, которые мы теперь используем, необходимо решить, какие множества следует взять в качестве $F(f_0)$ и $F(g_0)$, причем $f_0$ — эксцесс, который мы предполагаем использовать в $J$, а $g_0$ — избыток в $K$ [2]). Окажется, что этими эксцессами являются величины $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ п. 46.2.1.

---

[1]) Заметим, что эти дележи $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\beta}'$ не совпадают с дележами $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ леммы (46:C); они являются $J$-, $K$- компонентами последних, а также дележа $\vec{\gamma}$. Числа $e(\vec{\alpha}')$ и $e(\vec{\beta}')$ являются эксцессами дележей $\vec{\alpha}'$, $\vec{\beta}'$, образованных в $J$ и $K$. Но эти эксцессы равны, соответственно, $f(\vec{\alpha})$, $g(\vec{\beta})$, а также равны $f(\vec{\gamma})$, $g(\vec{\gamma})$. (Все эти обозначения связаны с (46:C).)

[2]) Читатель заметит, что этот вопрос в некотором смысле аналогичен вопросу о распределении данного эксцесса $e_0$ в $I$ между $J$ и $K$.

Действительно, мы можем доказать следующее:

(46:E)

(46:E:a) $\mathbf{V}_J$ есть решение игры $\Delta$ для $F(\overline{\varphi})$,

(46:E:b) $\mathbf{W}_K$ есть решение игры H для $F(\overline{\psi})$.

Однако удобнее получить сначала другой результат:

(46:F)

(46:F:a) $$\overline{\varphi}+\underline{\psi}=e_0,$$

(46:F:b) $$\underline{\varphi}+\overline{\psi}=e_0.$$

Заметим, что в утверждении (46:E), как и в (46:F), части (a) и (b) получаются друг из друга взаимной заменой, соответственно, $J$, $\Delta$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ на $K$, $H$, $\overline{\psi}$, $\underline{\psi}$. Следовательно, в каждом случае достаточно доказать только одну из частей (a) или (b); мы выбираем часть (a).

Доказательство. (46:F:a). Выберем такой дележ $\vec{\alpha}\in\mathbf{U}_I$, для которого $f(\vec{\alpha})$ достигает своего максимума $\overline{\varphi}$. Так как необходимо $e(\vec{\alpha})\leqq e_0$ и так как по определению $g(\vec{\alpha})\geqq\underline{\psi}$, (46:3) п. 46.1.1 дает

(46:13) $$\overline{\varphi}+\underline{\psi}\leqq e_0.$$

Предположим теперь, что равенство (46:F:a) неверно. Тогда из (46:13) следовало бы, что

(46:14) $$\overline{\varphi}+\underline{\psi}<e_0.$$

Используем выбранный выше дележ $\vec{\alpha}\in\mathbf{U}_I$, для которого $f(\vec{\alpha})=\overline{\varphi}$, а также выберем $\vec{\beta}\in\mathbf{U}_I$, для которого $g(\vec{\beta})$ достигает своего минимума $\underline{\psi}$. Тогда $f(\vec{\alpha})+g(\vec{\beta})=\overline{\varphi}+\underline{\psi}\leqq e_0$ (ввиду (46:13) или (46:14)). Таким образом, дележ $\vec{\gamma}$ из утверждения (46:C) также принадлежит $\mathbf{U}_I$. Снова (46:C) и (46:14) вместе дают

$$e(\vec{\gamma})=f(\vec{\alpha})+g(\vec{\beta})=\overline{\varphi}+\underline{\psi}<e_0,$$

т. е. $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i<\mathrm{v}(I)+e_0$. Положим теперь

$$\vec{\delta}=\{\delta_1,\ \ldots,\ \delta_n\}=\{\gamma_1+\varepsilon,\ \ldots,\ \gamma_n+\varepsilon\},$$

выбирая $\varepsilon>0$ так, чтобы $\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\mathrm{v}(I)+e_0$. Таким образом, $\vec{\delta}$ принадлежит $F(e_0)$.

Если бы дележ $\vec{\delta}$ не принадлежал $\mathbf{U}_I$, то в $\mathbf{U}_I$ существовал бы дележ $\vec{\eta}\mathrel{\varepsilon\!\!-}\vec{\delta}$. Ввиду (45:J) $\vec{\eta}\mathrel{\varepsilon\!\!-}\vec{\gamma}$, что невозможно, так как и $\vec{\eta}$, и $\vec{\gamma}$ принадлежат $\mathbf{U}_I$. Следовательно, $\vec{\delta}$ принадлежит $\mathbf{U}_I$. Тогда

$$\sum_{i\in J}\delta_i-\mathrm{v}(J)>\sum_{i\in J}\gamma_i-\mathrm{v}(J)=\sum_{i\in J}\alpha_i-\mathrm{v}(J),$$

т. е.

$$f(\vec{\delta}) > f(\vec{\alpha}) = \overline{\varphi},$$

что противоречит определению $\overline{\varphi}$.

Следовательно, должно быть выполнено равенство (46:F:a) и доказательство закончено.

Доказательство (46:E:a). Если $\vec{\alpha}' \in \mathbf{V}_J$, то $\vec{\alpha}'$ является $J$-компонентой некоторого дележа $\vec{\alpha} \in \mathbf{U}_I$. Следовательно, (см. сноску 1 на стр. 399) $e(\vec{\alpha}') = f(\vec{\alpha}) \leqq \overline{\varphi}$, так что $\vec{\alpha}'$ принадлежит $F(\overline{\varphi})$. Таким образом, $\mathbf{V}_J \subseteq F(\overline{\varphi})$.

Итак, нашей задачей является доказательство свойств (44:E:a) и (44:E:b) из п. 44.7.3.

Свойство (44:E:a). Предположим, что для двух дележей $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\beta}'$ из $\mathbf{V}_J$ выполнено отношение $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}'$. Тогда $\vec{\alpha}', \vec{\beta}'$ являются, соответственно, $J$-компонентами некоторых дележей $\vec{\gamma}$ и $\vec{\delta}$ из $\mathbf{U}_I$. Но, очевидно, из $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}'$ следует, что $\vec{\alpha} \succ \vec{\delta}$, а это невозможно.

Свойство (44:E:b). Рассмотрим дележ $\vec{\alpha}' \in F(\overline{\varphi})$, не принадлежащий $\mathbf{V}_J$. Тогда по определению $e(\vec{\alpha}') \leqq \overline{\varphi}$. Как и в доказательстве (46:F:a), выберем дележ $\vec{\beta} \in \mathbf{U}_I$, для которого $g(\vec{\beta}) = \underline{\psi}$. Пусть $\vec{\beta}'$ — $K$-компонента этого дележа $\vec{\beta}$, так что $\vec{\beta}' \in \mathbf{W}_K$ и $e(\vec{\beta}') = g(\vec{\beta}) = \underline{\psi}$. Таким образом $e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqslant \overline{\varphi} + \underline{\psi} = e_0$ (согласно (46:F:a)) Составим дележ $\vec{\gamma}$ (для $I$), который своими $J$-, $K$-компонентами имеет, соответственно, $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\beta}'$. Тогда $e(\vec{\gamma}) = e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq e_0$, т. е. $\vec{\gamma}$ принадлежит $F(e_0)$. $\vec{\gamma}$ не принадлежит $\mathbf{U}_I$, потому что его $J$-компонента $\alpha'$ не принадлежит $\mathbf{V}_J$. Следовательно, в (решении для $F(e_0)$) $\mathbf{U}_I$ существует $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$.

Пусть $S$ — множество п. 30.1.1, относительно которого осуществляется доминирование $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$. Согласно (46:B) мы можем предположить, что $S \subseteq J$ или $S \subseteq K$.

Предположим сначала, что $S \subseteq K$. Так как $\vec{\gamma}$ имеет ту же самую $K$-компоненту $\vec{\beta}'$, что и $\vec{\beta}$, из отношения $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$ мы можем заключить, что $\vec{\delta} \succ \vec{\beta}$. Но так как и $\vec{\delta}$, и $\vec{\beta}$ принадлежат $\mathbf{U}_I$, это невозможно.

Следовательно, $S \subseteq J$. Обозначим через $\vec{\delta}'$, $J$-компоненту $\vec{\delta}$; так как $\vec{\delta}$ принадлежит $\mathbf{U}_I$, $\vec{\delta}'$ принадлежит $\mathbf{V}_J$. $J$-компонентой $\vec{\gamma}$ является $\vec{\alpha}'$. Следовательно, из отношения $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$ мы можем заключить, что $\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$.

Таким образом, мы нашли в $\mathbf{V}_J$ требуемый дележ $\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$.

## 46.4. Продолжение

**46.4.1.** Утверждения (46:D) и (46:E) выражают общее решение $\mathbf{U}_I$ игры $\Gamma$ через соответствующие решения $\mathbf{V}_J$ и $\mathbf{W}_K$ игр $\Delta$ и H.

Естественно поэтому попытаться обратить этот процесс, т. е. начать с $\mathbf{V}_J$ и $\mathbf{W}_K$ и получить $\mathbf{U}_I$.

Нужно помнить, однако, что множества $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$ из (46:D) не являются совершенно произвольными. Если мы снова рассмотрим определения (46:10) из п. 46.2.1, учитывая (46:D), то мы увидим, что их можно сформулировать также и следующим образом:

$$(46:15)\qquad \begin{cases} \max\limits_{\vec{\alpha}' \in \mathbf{V}_J} e(\vec{\alpha}') = \overline{\varphi}, \\ \min\limits_{\vec{\alpha}' \in \mathbf{V}_J} e(\vec{\alpha}') = \underline{\varphi}, \\ \max\limits_{\vec{\beta}' \in \mathbf{W}_K} e(\vec{\beta}') = \overline{\psi}, \\ \min\limits_{\vec{\beta}' \in \mathbf{W}_K} e(\vec{\beta}') = \underline{\psi}. \end{cases}$$

Но (46:F) выражает зависимость между этими величинами $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, $\underline{\psi}$, которые определяются множествами $\mathbf{V}_J$, $\mathbf{W}_K$ и эксцессом $e_0$.

**46.4.2.** Мы покажем, что эта зависимость является единственным ограничением, которое нужно наложить на $\mathbf{V}_J$ и $\mathbf{W}_K$. Для этого мы начнем с двух произвольных непустых решений $\mathbf{V}_J$ и $\mathbf{W}_K$ соответственно игр $\Delta$ и H (причем эти решения не обязательно должны быть получены из какого-либо решения $\mathbf{U}_I$ игры $\Gamma$) и установим справедливость (46:G):

(46:G) Пусть $\mathbf{V}_J$ — непустое решение игры $\Delta$ для $F(\overline{\varphi})$, а $\mathbf{W}_K$ — непустое решение игры H для $F(\overline{\psi})$. Предположим, что $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ удовлетворяют приведенным выше условиям (46:15) и, кроме того, вместе с $\underline{\varphi}$ и $\underline{\psi}$ из (46:15) удовлетворяют соотношениям

$$(46:16)\qquad \overline{\varphi} + \underline{\psi} = \underline{\varphi} + \overline{\psi} = e_0.$$

Для любых $\vec{\alpha}' \in \mathbf{V}_J$ и $\vec{\beta} \in \mathbf{W}_K$, для которых

$$(46:17)\qquad e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq e_0,$$

образуем дележ $\vec{\gamma}$ (для $I$), который имеет $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\beta}'$ своими $J$- и $K$-компонентами. Обозначим множество всех этих дележей $\vec{\gamma}$ через $\mathbf{U}_I$. Множества $\mathbf{U}_I$, которые получаются таким способом, составляют в точности все решения игры $\Gamma$ для $F(e_0)$.

Доказательство. Все описанные множества $\mathbf{U}_I$ получаются следующим образом. Применим к множеству $\mathbf{U}_I$ (46:D); в результате мы получим соответствующие ему множества $\mathbf{V}_J$ и $\mathbf{W}_K$. Тогда все наши утверждения содержатся в (46:D) и (46:E), (46:F), к которым присоединены равенства (46:15).

Все множества $\mathbf{U}_I$, полученные таким способом, обладают требуемым свойством. Рассмотрим некоторое $\mathbf{U}_I$, построенное с помощью $\mathbf{V}_J$ и $\mathbf{W}_K$, как это описывалось выше. Нам нужно доказать, что это множество $\mathbf{U}_I$ является решением игры $\Gamma$ для $F(e_0)$.

Для каждого $\vec{\gamma} \in \mathbf{U}_I$ неравенство (46:17) дает $e(\vec{\gamma}) = e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq \leqq e_0$, так что $\vec{\gamma}$ принадлежит $F(e_0)$. Таким образом, $\mathbf{U}_I \subseteq F(e_0)$.

Итак, наша задача состоит в доказательстве утверждений (44:E:a), (44:E:b) из п. 44.7.3.

Утверждение (44:Е:а). Предположим, что для двух дележей $\vec{\eta}, \vec{\gamma} \in \mathbf{U}_I$ имеет место отношение $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$. Пусть $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\beta}'$ — соответственно $J$- и $K$-компоненты $\vec{\gamma}$, а $\vec{\delta}'$ и $\vec{\varepsilon}'$ — соответственно $J$- и $K$-компоненты $\vec{\eta}$, из которых $\vec{\gamma}$ и $\vec{\eta}$ получаются описанным выше способом. Пусть $S$ — множество п. 30.1.1, по которому происходит доминирование $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$. Ввиду (46:В) мы можем предполагать, что либо $S \subseteq J$, либо $S \subseteq K$. Но если $S \subseteq J$, то из $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$ следовало бы, что $\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$, а это невозможно, так как и $\vec{\delta}'$ и $\vec{\alpha}'$ принадлежат $\mathbf{V}_J$; а если $S \subseteq K$, то из $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$ следовало бы, что $\vec{\varepsilon}' \succ \vec{\beta}'$, что также невозможно, так как и $\vec{\varepsilon}'$ и $\vec{\beta}'$ принадлежат $\mathbf{W}_K$.

Утверждение (44:Е:b). Предположим противное, а именно, что в $F(e_0)$ существует такой дележ $\vec{\gamma}$, не принадлежащий $\mathbf{U}_I$, что в $\mathbf{U}_I$ не существует $\vec{\eta}$, для которого $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$. Пусть $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\beta}'$ соответственно $J$- и $K$-компоненты $\vec{\gamma}$.

Предположим сначала, что $e(\vec{\alpha}') \leqq \bar{\varphi}$. Тогда $\vec{\alpha}'$ принадлежит $F(\bar{\varphi})$. Следовательно, либо $\vec{\alpha}'$ принадлежит $\mathbf{V}_J$, либо существует такой дележ $\vec{\delta}' \in \mathbf{V}_J$, что $\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$. В последнем случае в $\mathbf{W}_K$ выберем такой дележ $\vec{\varepsilon}'$, для которого $e(\vec{\varepsilon}')$ достигает своего минимального значения $\underline{\psi}$. Составим дележ $\vec{\eta}$, у которого $J$- и $K$-компонентами являются соответственно $\vec{\delta}'$ и $\vec{\varepsilon}'$. Так как $\vec{\delta}'$ и $\vec{\varepsilon}'$ принадлежат соответственно $\mathbf{V}_J$ и $\mathbf{W}_K$ и так как $e(\vec{\delta}') + e(\vec{\varepsilon}') \leqq \bar{\varphi} + \underline{\psi} = e_0$, дележ $\vec{\eta}$ должен принадлежать $\mathbf{U}_I$. Кроме того, так как $\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$, а $\vec{\delta}'$ и $\vec{\alpha}'$ являются соответственно $J$-компонентами $\vec{\eta}$ и $\vec{\gamma}$, должно быть $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$. Таким образом, существование $\vec{\eta}$ противоречит нашему первоначальному предположению относительно $\vec{\gamma}$. Следовательно, мы доказали, что в рассматриваемом случае дележ $\vec{\alpha}'$ должен принадлежать $\mathbf{V}_J$.

Другими словами:

(46:18) Либо $\vec{\alpha}'$ принадлежит $\mathbf{V}_J$, либо $e(\vec{\alpha}') > \bar{\varphi}$.

Заметим, что в первом случае необходимо $e(\vec{\alpha}') \geqq \underline{\varphi}$, а во втором случае, конечно $e(\vec{\alpha}') > \bar{\varphi} \geqq \underline{\varphi}$. Следовательно,

(46:19) В любом случае $e(\vec{\alpha}') \geqq \underline{\varphi}$.

Перемена ролей $J$ и $K$ дает возможность из (46:18) и (46:19) получить следующие утверждения:

(46:20) Либо $\vec{\beta}'$ принадлежит $\mathbf{W}_K$, либо $e(\vec{\beta}') > \bar{\psi}$.

(46:21) В любом случае $e(\vec{\beta}') \geqq \underline{\psi}$.

Если теперь мы имеем вторую альтернативу (46:18), то вместе с (46.21) это дает $e(\vec{\gamma}) = e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') > \bar{\varphi} + \underline{\psi} = e_0$, что невозможно, так как $\vec{\gamma}$ принадлежит $F(e_0)$. Точно так же невозможна вторая альтернатива (46:20).

Таким образом, как в (46:18), так и в (46:20) имеют место первые альтернативы, т. е. дележи $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\beta}'$ принадлежат соответственно $\mathbf{V}_J$ и $\mathbf{W}_K$. Так как $\vec{\gamma}$ принадлежит $F(e_0)$,

$$e(\vec{\alpha}')+e(\vec{\beta}')=e(\vec{\gamma})\leqq e_0.$$

Следовательно, дележ $\vec{\gamma}$ должен принадлежать $\mathbf{U}_I$, что противоречит нашему первоначальному предположению.

### 46.5. Окончательный результат для $F(e_0)$

**46.5.1.** Результат (46:G), несмотря на свою полноту, неудовлетворителен в следующем отношении: условия (46:16) и (46:17), на которых он основан, являются неявными. Заменим их поэтому эквивалентными, но более прозрачными условиями.

Для этого мы начнем с чисел $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$, которые мы будем предполагать заданными. Какие решения $\mathbf{V}_J$ и $\mathbf{W}_K$ игр $\Delta$ и $\mathrm{H}$ для $F(\bar{\varphi})$ и $F(\bar{\psi})$ можем мы тогда использовать в смысле (46:G)?

Прежде всего, множества $\mathbf{V}_J$ и $\mathbf{W}_K$ должны быть непустыми; применение к играм $\Delta$ и $\mathrm{H}$ (вместо $\Gamma$) утверждений (45:A) или (45:O) показывает, что это условие означает

(46:22) $$\bar{\varphi}\geqq-|\Delta|_1,\qquad \bar{\psi}\geqq-|\mathrm{H}|_1.$$

Рассмотрим теперь равенства (46:15). Применим к $\Delta$ и $\mathrm{H}$ (вместо $\Gamma$) утверждение (45:P) из п. 45.6.1. Тогда (45:P:a) гарантирует удовлетворение двух уравнений (46:15), содержащих максимизацию, а (45:P:b) преобразует два уравнения (46:15), содержащих минимизацию, в уравнения

(46:23) $$\underline{\varphi}=\min(\bar{\varphi},\ |\Delta|_2),\qquad \underline{\psi}=\min(\bar{\psi},\ |\mathrm{H}|_2).$$

Определим поэтому $\underline{\varphi}$, $\underline{\psi}$ уравнениями (46:23). Преобразуем теперь условие (46:16):

(46:16) $$\bar{\varphi}+\underline{\psi}=\underline{\varphi}+\bar{\psi}=e_0.$$

Первое уравнение (46:16) можно записать также в виде $\bar{\varphi}-\underline{\varphi}=\bar{\psi}-\underline{\psi}$, т. е., согласно (46:23), в виде

(46:24) $$\max(0,\ \bar{\varphi}-|\Delta|_2)=\max(0,\ \bar{\psi}-|\mathrm{H}|_2)\ ^{1)}.$$

**46.5.2.** Теперь возможны два случая.

Случай (a). Обе части равенства (46:24) равны нулю. Тогда в каждой части равенства (46:24) под знаком максимума нулевой член не меньше другого члена, т. е. $\bar{\varphi}-|\Delta|_2\leqq 0$, $\bar{\psi}-|\mathrm{H}|_2\leqq 0$ или

(46:25) $$\bar{\varphi}\leqq|\Delta|_2,\qquad \bar{\psi}\leqq|\mathrm{H}|_2.$$

Обратно, если выполнены неравенства (46:25), то равенство (46:24) превращается в равенство $0=0$, т. е. оно выполнено автоматически. Теперь определение (46:23) принимает вид

(46:26) $$\underline{\varphi}=\bar{\varphi},\qquad \underline{\psi}=\bar{\psi},$$

---

1) См. утверждение (45:P:c) и его доказательство.

и тогда полное условие (46:16) принимает вид[1])

(46:27) $$\overline{\varphi}+\overline{\psi}=e_0.$$

Кроме того, (46:25) и (46:27) также дают

(46:28) $$e_0 \leqq |\Delta|_2+|H|_2=|\Gamma|_2.$$

Случай (b). Обе части равенства (46:24) отличны от нуля. Тогда в каждой части равенства (46:24) нулевой член меньше другого, т. е. $\overline{\varphi}-|\Delta|_2>0$, $\overline{\psi}-|H|_2>0$, или

(46:29) $$\overline{\varphi}>|\Delta|_2, \quad \overline{\psi}>|H|_2\ ^{2)}.$$

Обратно, если выполнены неравенства (46.29), то равенство (46:24) принимает вид $\overline{\varphi}-|\Delta|_2=\overline{\psi}-|H|_2$, т. е. оно выполняется не всегда. Мы можем выразить (46:24) в виде

(46:30) $$\overline{\varphi}=|\Delta|_2+\omega, \quad \overline{\psi}=|H|_2+\omega,$$

а тогда (46.29) утверждает просто, что

(46:31) $$\omega>0.$$

Теперь определение (46:23) принимает вид

(46:32) $$\underline{\varphi}=|\Delta|_2, \quad \underline{\psi}=|H|_2,$$

и, таким образом, полное условие (46:16)[3]) переходит в равенство

$$|\Delta|_2+|H|_2+\omega=e_0,$$

или

(46:33) $$e_0=|\Gamma|_2+\omega.$$

Кроме того, (46:31) и (46:33) дают нам

(46:34) $$e_0>|\Gamma|_2.$$

**46.5.3.** Итак мы имеем:

(46:H) Условия (46:16), (46:17) из (46:G) сводятся к тому, что должен иметь место один из следующих случаев:

Случай (a): (1) $-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$

вместе с неравенствами

(2) $-|\Delta|_1 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2,$

(3) $-|H|_1 \leqq \overline{\psi} \leqq |H|_2$

и равенством

(4) $\overline{\varphi}+\overline{\psi}=e_0.$

---

[1]) Для вывода равенства (46:24), на котором основано это рассуждение, мы использовали только первую часть условия (46:16).

[2]) Отметим важный факт, состоящий в том, что (46:25), (46:29) исчерпывают все возможности, т. е. что мы не можем иметь одновременно $\overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2$ и $\overline{\psi}>|H|_2$ или $\overline{\varphi}>|\Delta|_2$ и $\overline{\psi} \leqq |H|_2$. Этот факт, конечно, обусловлен уравнением (46:24), которое гарантирует, что либо обе части обращаются в нуль, либо обе отличны от нуля. Смысл этого проявится в последующих леммах.

[3]) См. сноску 1 на этой стр.

Случай (b): (1) $e_0 > |\Gamma|_2$
вместе с неравенствами

$$(2) \qquad \overline{\varphi} > |\Delta|_2,$$

$$(3) \qquad \overline{\psi} > |H|_2$$

и равенствами

$$(4) \qquad e_0 - |\Gamma|_2 = \overline{\varphi} - |\Delta|_2 = \overline{\psi} - |H|_2\,^{1)}.$$

Доказательство. Случай (a). Мы знаем, что $e_0 \geqq -|\Gamma|_1$ и $\overline{\varphi} \geqq -|\Delta|_1$, $\overline{\psi} \geqq -|H|_1$. Остальные условия совпадают с условиями (46:28), (46:25), (46:27), которые содержат полное описание этого случая.

Случай (b). Эти условия совпадают с условиями (46:34), (46:29), (46:30) (46:33), содержащими полное описание этого случая (после исключения $\omega$ условие (46:31) переходит в (1) — (3)).

### 46.6. Окончательный результат для $E(e_0)$

**46.6.** Утверждения (46:G) и (46:H) характеризуют решения игры Г для $F(e_0)$ полностью и в явном виде. Теперь очевидно также, что случаи (a) и (b) из (46:H) совпадают с (45:O:b) и (45:O:c) из п. 45.6.1. Действительно, случаи (a) и (b) из (46:H) различаются своими условиями (1), которые являются в точности условиями (45:O:b) и (45:O:c).

Объединим теперь результаты (46:G) и (46:H) с результатами (45:I) и (45:O). Это дает нам исчерпывающую картину ситуации, использующую все наши сведения.

(46:I) Если

(46:I:a) (1) $e_0 < -|\Gamma|_1$,

то единственным решением Г является пустое множество как для $E(e_0)$, так и для $F(e_0)$.

Если

(46:I:b) (1) $-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$,

то игра Г имеет одни и те же решения $\overline{U}_I$, как для $E(e_0)$, так и для $F(e_0)$. Этими решениями $\overline{U}_I$ являются в точности те множества, которые получаются следующим образом:

Выберем любые два числа $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ так, чтобы

$$(2) \qquad -|\Delta|_1 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2,$$

$$(3) \qquad -|H|_1 \leqq \overline{\psi} \leqq |H|_2$$

и

$$(4) \qquad \overline{\varphi} + \overline{\psi} = e_0.$$

Выберем два любых решения $\overline{V}_J$ и $\overline{W}_K$ соответственно игр $\Delta$ и H для множеств $E(\overline{\varphi})$ и $E(\overline{\psi})$. Тогда $\overline{U}_I$ есть композиция $\overline{V}_J$ и $\overline{W}_K$ в смысле п. 44.7.4.

---

[1]) Читатель заметит, что, в то время как условия (1) — (3) в случаях (a) и (b) проявляют сильное сходство, последнее условие (4) существенно различно для случаев (a) и (b). Тем не менее все эти результаты были получены путем строгих рассуждений в рамках одной совместной теории!

В дальнейшем этот вопрос еще будет обсуждаться.

Если

(46:I:c) (1) $e_0 > |\Gamma|_2$,

то игра Γ не имеет совпадающих решений $\overline{\mathbf{U}}_I$ для $E(e_0)$ и $\mathbf{U}_I$ для $F(e_0)$. Этими решениями $\overline{\mathbf{U}}_I$ и $\mathbf{U}_I$ являются в точности те множества, которые получаются следующим образом: возьмем два таких числа $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$, для которых

(2) $\overline{\varphi} > |\Delta|_2$,

(3) $\overline{\psi} > |\mathrm{H}|_2$

и которые связаны равенствами

(4) $e_0 - |\Gamma|_2 = \overline{\varphi} - |\Delta|_2 = \overline{\psi} - |\mathrm{H}|_2$.

Выберем любые два решения $\overline{\mathbf{V}}_J$ и $\overline{\mathbf{W}}_K$ соответственно игр Δ и H для $E(\overline{\varphi})$ и $E(\overline{\psi})$. Тогда $\overline{\mathbf{U}}_I$ есть объединение следующих множеств: композиция $\overline{\mathbf{V}}_J$ и множества всех исключенных дележей $\vec{\beta}'$ (в $K$), для которых $e(\vec{\beta}') = |\mathrm{H}|_2$; композиция множества всех исключенных дележей $\vec{\alpha}'$ (в $J$), для которых $e(\vec{\alpha}') = |\Delta|_2$, и $\overline{\mathbf{W}}_k$; композиция множества всех исключенных дележей $\vec{\alpha}'$ (в $J$), для которых $e(\vec{\alpha}') = \varphi$, и множества всех исключенных дележей $\vec{\beta}'$ (в $K$), для которых $e(\vec{\beta}') = \psi$, при выборе всевозможных пар φ, ψ, где

(5) $|\Delta|_2 < \varphi < \overline{\varphi}$, $|\mathrm{H}|_2 < \psi < \overline{\psi}$

и

(6) $\varphi + \psi = e_0$.

$\mathbf{U}_I$ получается таким же образом, но с заменой условия (6) условием

(7) $\varphi + \psi \leqq e_0$.

Доказательство. Утверждение (46:I:a) совпадает с (45:O:a). Утверждение (46:I:b) является переформулировкой случая (a) из (46:H), с точностью до следующих модификаций.

Во-первых, отождествление решений игр Γ, Δ и H для множества $E$ и $F$. Это отождествление оправдано применением (45:O:b) к Γ, Δ, H, которое возможно ввиду (1), (2) и (3) утверждения (46:I:b).

Во-вторых, способ, которым мы получили $\overline{\mathbf{U}}_I = \mathbf{U}_I$ из $\overline{\mathbf{V}}_J = \mathbf{V}_J$ $\overline{\mathbf{W}}_K = \mathbf{W}_K$, отличается от способа, описанного в (46:H), тем, что мы опустили условие (46:17). Это оправдано замечанием, состоящим в том, что (46:17) выполняется автоматически:

$$\mathbf{V}_J = \overline{\mathbf{V}}_J \subseteq E(\overline{\varphi}) \text{ и } \mathbf{W}_K = \overline{\mathbf{W}}_K \subseteq E(\overline{\psi});$$

следовательно, для $\vec{\alpha}' \in \mathbf{V}_J$ и $\vec{\beta}' \in \mathbf{W}_K$ всегда $e(\vec{\alpha}') = \overline{\varphi}$, $e(\vec{\beta}') = \overline{\psi}$ и ввиду (4) должно быть $e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') = e_0$.

Утверждение (46:I:c) является переформулировкой случая (b) из (46:H), с точностью до следующей модификации.

Мы рассматриваем решения Г как для множества $E$, так и для множества $F$ (а не только для множества $F$, как в (46:H)) и используем решения игр Δ и H только для множества $E$ (а не для $F$, как в (46:H)). Способ, с помощью которого решения $\overline{\mathbf{U}}_I$ и $\mathbf{U}_I$ игры Г образуются соответственно из решений $\overline{\mathbf{V}}_J$ игры Δ и $\overline{\mathbf{W}}_K$ игры H, соответственным образом отличается от способа, описанного в (46:H).

Для того чтобы устранить эти различия, нужно поступить следующим образом: применим к играм Г, Δ и H (45:I) и (45:O:c), что возможно ввиду (1), (2) и (3) утверждения (46:I:c). Затем подставим в (46:H) определяющее вместо определяемого. Если произвести эти действия над (46:H) (в рассматриваемом случае (46:I:c)), то получится в точности приведенная выше формулировка [1].

## 46.7. Графическое представление части результатов

**46.7.** Результаты (46:I) могут показаться сложными, но в действительности они представляют собой лишь точное выражение нескольких простых качественных принципов. Причина, по которой необходимо было пройти через сложности предыдущего математического вывода, состояла, конечно, в том, что эти принципы не все очевидны, и это был способ их обнаружить и доказать. С другой стороны, наш результат можно проиллюстрировать простым графическим представлением.

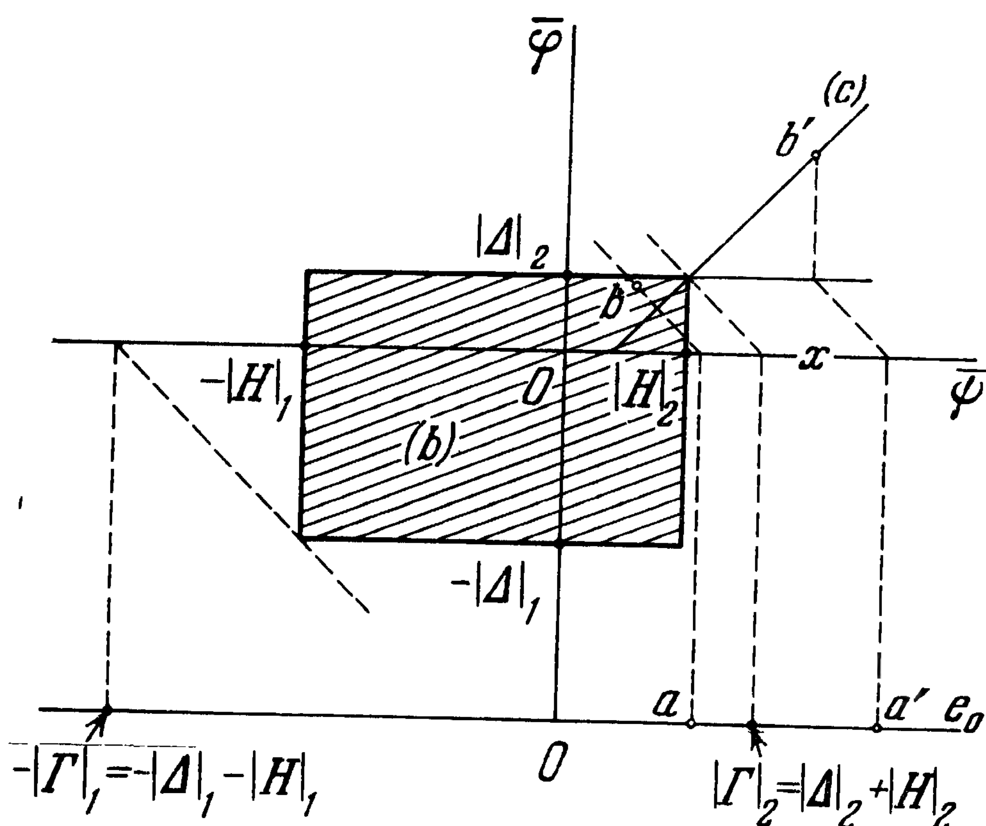



Рис. 48.

Мы начнем с более формального замечания.

Рассмотрение трех случаев (46:I:a) — (46:I:c) дает возможность обнаружить следующее: в то время как о случае (46:I:a) ничего больше сказать нельзя, два других случая: (46:I:b), (46:I:c) — имеют некоторые общие черты. Действительно, в обоих случаях требуемые решения $\overline{\mathbf{U}}_I$ и $\mathbf{U}_I$ игры Г получаются с помощью двух чисел $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ и некоторых соответствующих решений $\overline{\mathbf{V}}_J$ и $\overline{\mathbf{W}}_K$ игр Δ и H. Количественными элементами представления решений $\overline{\mathbf{U}}_I$ и $\mathbf{U}_I$ являются числа $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$. Как указывалось в сноске 2 на стр. 399, они представляют собой некоторое подобие распределения данного эксцесса $e_0$ в I между $J$ и $K$.

Числа $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ характеризуются в случаях (46:I:b) и (46:I:c) соответствующими им условиями (2)—(4). Сравним эти условия в случае (46:I:b) и в случае (46:I:c).

Эти условия имеют следующую общую черту: согласно этим условиям эксцессы $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ должны подпадать под тот же случай соответственно в играх Δ и H, который выполняется для эксцесса $e_0$ в игре Г.

Однако они весьма существенно отличаются в следующем отношении: в случае (46:I:b) $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ связаны только одним уравнением, а в случае

[1]) Если читатель все это проделает, то он увидит, что это преобразование, хотя и несколько громоздко, абсолютно не представляет трудностей.

(46:I:c) они связаны двумя уравнениями [1]). Конечно, случайно неравенства также могут выродиться в уравнения (см. (46:J) в п. 46.8.3), но общая ситуация является такой, как это описано.

Связи между $e_0$ и $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ представлены графически на рис. 48.

На этом рисунке показана плоскость $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ и под ней ось $e_0$.

На этой оси точки $-|\Gamma|_1$, $|\Gamma|_2$ отмечают разбиение на три зоны, соответствующие случаям (46:I:a) — (46:I:c). Область $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, которая соответствует случаю (46:I:b), охватывает заштрихованный прямоугольник в плоскости $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, обозначенный через (b); область $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, соответствующая случаю (46:I:c), охватывает прямую в плоскости $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, обозначенную через (c). Если дана произвольная точка $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, то движение по штриховой линии приведет к соответствующему этой точке значению $e_0$; так, точки $b$, $b'$ дают соответственно точки $a$, $a'$. Если дано произвольное значение $e_0$, то обратное движение укажет все соответствующие этому значению точки $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$; так, точке $a$ соответствует весь отрезок, содержащий $b$, а точке $a'$ соответствует единственная точка $b'$ [2]).

## 46.8. Интерпретация: нормальная зона. Наследование различных свойств

**46.8.1.** Рис. 48 требует дальнейшего рассмотрения, которое приведет к более полному пониманию утверждения (46:I).

Во-первых, неоднократно указывалось (в последний раз в рассмотрении, следующем за утверждением (45:O)), что случаи (46:I:a) и (46:I:c), т. е. соответственно случаи $e_0 < -|\Gamma|_1$ и $e_0 > -|\Gamma|_2$, являются случаями «слишком малых» или «слишком больших» значений $e_0$ в смысле п. 44.6.1; иначе говоря, случай (46:I:b), $-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$, является в некотором смысле нормальной зоной. Наш рисунок показывает, что если эксцесс $e_0$ игры Г находится в *нормальной* зоне, то соответствующие эксцессы $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ игр Δ и Н также находятся в своих соответствующих нормальных зонах [3]). Другими словами:

Нормальное поведение (положение эксцесса) согласно случаю (46:I:b) *наследуется* при переходе от Г к Δ и Н.

Во-вторых, в случае (46:I:b), т. е. в нормальной зоне, числа $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ не определяются полностью эксцессом $e_0$, как мы неоднократно видели раньше. Напротив, в случае (46:I:c) они определяются вполне. Этот факт на рисунке отражен тем, что в первом случае соответствующая область есть прямоугольник (b) в плоскости $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, в то время как во втором соответствующая область есть только прямая (c).

Следует заметить, однако, что в двух крайних случаях (46:I:b), т. е. при $e_0 = -|\Gamma|_1, |\Gamma|_2$, интервал возможных значений для $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ стягивается в точку [4]). Таким образом, переход от переменных значений $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ случая (46:I:b) к фиксированным значениям случая (46:I:c) является непрерывным.

---

[1]) В обоих случаях условия (2) и (3) являются неравенствами. Условие (4) означает одно уравнение в случае (46:I:b) и два уравнения в случае (46:I:c).

[2]) Мы предоставляем читателю простую проверку того факта, что эта геометрическая иллюстрация рис. 48 действительно выражает условия случаев (46:I:b) и (46:I:c).

[3]) То есть из $-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$ следует, что $-|\Delta|_1 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2$, $-|H|_1 \leqq \overline{\psi} \leqq |H|_2$, см. (46:I:b).

[4]) Это один из случаев вырождения, упомянутых в конце п. 46.7.

В-третьих, наше первое замечание утверждает, что нормальное поведение (т. е. такое, когда положение эксцесса соответствует случаю (46:I:b)) сохраняется при переходе от Γ к Δ и H. Замечательно, что, вообще говоря, это свойство наследования не имеет места для нулевого эксцесса, т. е. что из $e_0 = 0$[1]), вообще говоря, не следует, что $\overline{\varphi} = 0$, $\overline{\psi} = 0$, именно, в случае нулевого эксцесса наша новая теория (из п. 44.7) сводится к более старой форме (из п. 42.4.1, которая, как мы знаем, эквивалентна исходной форме п. 30.1.1). Мы подробнее исследуем изменяемость $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ в случае $e_0 = 0$ в последнем (шестом) замечании. Перед этим, однако, мы обратим внимание на связь между новой теорией и ее более старой формой.

В-четвертых, теперь ясно, что необходимо рассматривать новую, более широкую форму теории, даже если сначала мы интересовались лишь исходной формой. Действительно, для того чтобы найти решения разложимой игры Γ в первоначальном смысле (для $e_0 = 0$), нам нужны решения ее компонент Δ и H в более широком, новом смысле (для $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$), которые могут быть отличны от нуля).

Это придает замечаниям п. 44.6.2 более точный смысл: теперь особенно ясно, сколь необходимым становится переход от старой теории к новой, когда игра (Δ или H) рассматривается как неизолированная. Точная формулировка этого замечания будет дана в п. 46.10.

**46.8.2.** В-пятых, теперь мы можем объяснить окончательные высказывания об утверждениях (44:D) из п. 44.3.2 и (44:D:a), (44:D:b) из п. 44.3.3. (46:I:b) показывает, что (44:D) верно в случае (46:I:b), если мы отказываемся от старой теории в пользу новой; (46:I:c) показывает, что (44:D) неверно в случае (46:I:c) даже при таком условии. Таким образом, желание обеспечить справедливость правдоподобного утверждения (44:D) делает обоснованным как переход к новой теории, так и ограничение случаем (46:I:b) — нормальным случаем.

Если мы настаиваем на интерпретации (44:D), (44:D:a), (44:D:b) в рамках старой теории, то (44:D), (44:D:a) неверны [2]), а условное утверждение (44:D:b) остается истинным [3]).

**46.8.3.** В-шестых, мы видели, что из равенства $e_0 = 0$, вообще говоря, не следует, что $\overline{\varphi} = 0$, $\overline{\psi} = 0$. Что означает это выражение «вообще говоря»?

Числа $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ подчинены условиям (2) — (4) случая (46:I:b). Так как $e_0 = 0$, (4) означает, что $\overline{\psi} = -\overline{\varphi}$, и дает нам возможность выразить оставшиеся условия (2) и (3) только через $\overline{\varphi}$. Эти условия принимают вид

(46:35) $$-|\Delta|_1 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2, \qquad -|H|_2 \leqq \overline{\varphi} \leqq |H|_1.$$

Применим теперь к Δ и H утверждение (45:E). Тогда мы увидим следующее.

Если обе игры Δ и H существенны, то нижние границы неравенств (46:35) меньше нуля, а верхние границы больше нуля, так что действительно $\overline{\varphi}$ может быть отлично от нуля. Если же одна из игр Δ или H несущественна, то из (46:35) следует, что $\overline{\varphi} = 0$ и, следовательно, $\overline{\psi} = 0$.

---

1) Конечно, $e_0 = 0$ соответствует нормальному случаю (46:I:b): $-|\Gamma|_1 \leqq 0 \leqq \leqq |\Gamma|_2$.

2) Так как мы можем иметь $e_0 = 0$, $\overline{\varphi} \neq 0$, $\overline{\psi} \neq 0$. Тогда требование разложимости (44:B:a) из п. 44.3.1 нарушается, как это указывалось в п. 44.3.3.

3) Представляя частный случай $e_0 = 0$, $\overline{\varphi} = 0$, $\overline{\psi} = 0$.

Сформулируем это утверждение в явном виде.

(46:J) Из равенства $e_0 = 0$ следует $\overline{\varphi} = 0, \overline{\psi} = 0$, т. е. (44:D) выполнено даже в смысле старой теории, тогда и только тогда, когда либо $\Delta$, либо H несущественна.

## 46.9. «Болваны»

**46.9.1.** Мы можем теперь рассмотреть более узкий тип разложения, описанный в замечании на стр. 353,— добавление к игре «болванов».

Рассмотрим игру $\Delta$ с игроками $1', \ldots, k'$ [1]. «Расширим» ее добавлением к ней совокупности «болванов» $K$, т. е. составим композицию игры $\Delta$ и несущественной игры H с игроками $1'', \ldots, l''$. Тогда составная игра есть $\Gamma$.

Применим ко всем этим играм старую теорию. Согласно (31:I) из п. 31.2.1, в несущественной игре H имеется ровно один дележ — скажем, $\overrightarrow{\gamma_K}^0 = \{\gamma_{1''}^0, \ldots, \gamma_{l''}^0\}$ [2]. Согласно (31:O) или (31:P) из п. 31.2.3, H имеет единственное решение — одноэлементное множество $(\overrightarrow{\gamma_k^0})$.

Тогда, согласно (46:J) и (46:I:b), общее решение $\Gamma$ получается композицией общего решения $\Delta$ с общим решением H, а последнее единственно!

Переформулируем сказанное.

«Расширим» каждый дележ $\overrightarrow{\beta_J} = \{\beta_{1'}, \ldots, \beta_{k'}\}$ в множестве $J$ (т. е. в игре $\Delta$) до дележа $\overrightarrow{\alpha_I}$ в множестве $I$ (т. е. в игре $\Gamma$), составляя его композицию с $\overrightarrow{\gamma_K}^0$, т. е., добавляя к нему компоненты $\gamma_{1''}^0, \ldots, \gamma_{l''}^0$: $\overrightarrow{\alpha_I} = \{\beta_{1'}, \ldots, \beta_{k'}, \gamma_{1''}^0, \ldots, \gamma_{l''}^0\}$. Тогда этот процесс «расширения», т. е. композиция, даст из общего решения игры $\Delta$ общее решение игры $\Gamma$.

Этот результат коротко можно сформулировать, сказав, что «расширение» игры добавлением «болванов» не влияет существенно на ее решение,— необходимо только к каждому дележу добавить компоненты, соответствующие «болванам», причем значения этих компонент являются очевидными: они представляют собой то количество, которое каждый «болван» мог бы получить в несущественной игре H, описывающей их взаимоотношения друг с другом.

**46.9.2.** Мы заключим этот пункт замечанием о том, что (46:J) утверждает, что старая теория не имеет простых свойств новой в том и только в том случае, когда композиция не является описанным выше частным случаем, и наследование свойств нарушается, как указывалось в третьем замечании п. 46.8.1.

## 46.10. Погружение игры

**46.10.1.** В четвертом замечании п. 46.8.1 мы снова подтвердили указания п. 44.6.2, согласно которым переход от старой теории к новой становится необходимым, если игра рассматривается как неизолированная. Теперь мы сформулируем эту идею в ее окончательном и точном выражении.

Удобнее на этот раз обозначить рассматриваемую игру через $\Delta$, а множество ее игроков через $J$. Следует иметь в виду, что эта игра $\Delta$ совершенно произвольна — никакой разложимости $\Delta$ не предполагается.

---

[1] Теперь удобно для игроков снова ввести обозначения п. 41.3.1.

[2] Вспомним обозначения п. 44.2.

Мы начнем с введения понятий, необходимых для того, чтобы рассматривать данную игру Δ как неизолированное явление. Это достигается погружением ее без изменений в более широкую систему, которую удобно рассматривать как другую игру Γ. В соответствии с этим будем говорить, что игра Δ *погружена* в Γ или что игра Γ есть *расширение* Δ, если Γ есть композиция Δ с другой игрой H [1]). Другими словами, Δ погружена во все те игры, для которых она является компонентой [2]).

**46.10.2.** Исследуем теперь решения Δ, рассматривая Δ как неизолированное явление. В свете сказанного выше, это сводится к перечислению всех решений всех расширений Γ игры Δ и интерпретации их относительно Δ. Последним действием должно быть взятие $J$-компоненты в смысле п. 44.7.4. Из пятого замечания п. 46.8.2 мы знаем, что это возможно, если только мы не рассматриваем решений, не принадлежащих нормальной зоне (b).

Могут быть сомнения относительно того, следует ли брать решения Γ в смысле старой или в смысле новой теории. Первое может показаться более оправданным с точки зрения п. 44.6.2: для объяснения внешних влияний на игру, вызванных переходом от Δ к H, больше не требуется выхода за пределы старой теории [3]). Оказывается, однако, что нам вовсе не нужно решать этот вопрос, потому что результат для Δ будет один и тот же, независимо от того, какую теорию мы используем для Γ. Но если мы используем для Γ новую теорию, то мы должны ограничиться случаем (46:I:b), как это указывалось выше.

Таким образом, окончательно вопрос ставится в следующей форме.

(46:K) Рассмотрим все расширения Γ игры Δ и все решения этих расширений Γ:

(a) в смысле старой теории, т. е. для $E(0)$;

(b) в смысле новой теории в нормальной зоне, т. е. для любого $E(e_0)$ случая (46:I:b).

Каковы будут $J$-компоненты этих решений?

**46.10.3.** Ответ очень прост:

(46:L) $J$-компоненты решений игры Γ, отвечающие на вопрос (46:K), суть в точности следующие множества: это все решения игры Δ в нормальной зоне, т. е. для любого множества $E(\overline{\varphi})$ в случае (46:I:b). Это справедливо как для (a), так и для (b) (46:K).

Доказательство. $e_0 = 0$ относится к случаю (46:I:b) (см. сноску 1 на стр. 410); поэтому случай (a) является более узким, чем (b). В связи с этим нам необходимо только показать, что все множества, полученные из (b), содержатся среди множеств, описанных выше, и что все эти множества также можно получить с помощью (a).

Первое утверждение представляет собой лишь утверждение о наследственном характере нормальной зоны (b).

---

[1]) Игра H и множество ее игроков $K$ совершенно произвольны, за исключением того, что множества $K$ и $J$ не должны пересекаться.

[2]) Так как компонента компоненты есть сама компонента (вспомним соответствующие определения, в частности (43:D) из п. 43.3.1), расширение расширения снова есть расширение. Другими словами, расширение есть транзитивное отношение. Это освобождает нас от рассмотрения каких-либо непрямых связей, основанных на этом отношении.

[3]) Кроме того, транзитивность, указанная в предыдущей сноске, показывает, что любое дальнейшее расширение Γ может рассматриваться как непосредственное расширение Δ.

Второе утверждение будет следовать из (46:I:b), если мы можем сделать следующее. Пусть дано такое число $\overline{\varphi}$, что $-|\Delta|_1 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2$; найти такую игру Н и число $\overline{\psi}$ что $-|\mathrm{H}|_1 \leqq \overline{\psi} \leqq |\mathrm{H}|_2$, $\overline{\varphi}+\overline{\psi}=0$, и игра Н имеет решения для $E(\overline{\psi})$. Оказывается, такая игра Н существует, и в качестве Н можно выбрать даже игру трех лиц.

Действительно, пусть Н — существенная игра трех лиц с произвольным $\gamma > 0$. Тогда, согласно (45:2) из п. 45.1, $|\mathrm{H}|_1 = 3\gamma$, а согласно (45:9) из п. 45.3.3, $|\mathrm{H}|_2 = \frac{1}{2}|\mathrm{H}|_1 = \frac{3}{2}\gamma$. Мы потребовали выполнения равенства $\overline{\psi} = -\overline{\varphi}$, а теперь мы знаем, что

$$-3\gamma \leqq \overline{\psi} \leqq \frac{3}{2}\gamma.$$

Эти требования, очевидно, можно удовлетворить, если выбрать $\gamma$ достаточно большим. Затем нам также необходимо решение игры Н для $E(\overline{\psi})$. Существование такого решения (для $-3\gamma \leqq \overline{\psi} \leqq \frac{3}{2}\gamma$) будет доказано в § 47.

**46.10.4.** К этому результату следует добавить еще два замечания.

Во-первых, если мы хотим осуществить процесс расширения таким образом, чтобы старая теория обладала свойствами наследования, мы должны позаботиться о следующем: композиция Г из Δ и Н должна быть такой, чтобы из $e_0 = 0$ следовало $\overline{\varphi} = 0$ (и, значит, $\overline{\psi} = 0$). Ввиду (46:J) это означает, что либо Δ, либо Н несущественна. Последнее означает (см. в соответствующем месте), что к Δ добавляются только «болваны».

Таким образом, мы имеем:

(46:M) Старая теория остается наследственной тогда и только тогда, когда либо исходная игра Δ несущественна, либо расширение ограничивается добавлением к Δ «болванов»).

Во-вторых, уже в п. 44.6.2 предлагалось рассматривать внешний источник, который создает эксцессы и прокладывает путь для перехода от старой теории к новой, как нового игрока.

Приведенный выше результат (46:L) оправдывает и несколько иную точку зрения: внешним источником из п. 44.6.2 оказывается добавляемая к Δ игра Н, или, лучше сказать, множество $K$ ее игроков.

Теперь мы увидели, что для получения требуемого результата игра Н должна быть существенной. Кроме того, мы знаем, что существенная игра должна иметь $n \geqq 3$ участников, а доказательство (46:L) показало, что соответствующая игра Н с $n = 3$ участниками действительно существует.

Итак, мы видим следующее:

(46:N) Внешний источник, указанный в п. 44.6.2, может рассматриваться как группа новых игроков, но не как один игрок. Действительно, минимальное эффективное число членов этой группы равно 3.

**46.10.5.** Предыдущие рассуждения оправдали наш переход от старой теории к новой (в пределах нормальной зоны (b)) и внесли ясность в природу этого перехода. Мы видим теперь, что «здравый смысл» предположений п. 44.3 не годится для старой теории, но что он справедлив полностью в той новой области, к которой мы перешли. Это завершает теорию удовлетворительным образом.

Основным принципом рассуждений в пп. 44.4.3—46.10.4 был следующий: изучаемая игра первоначально рассматривалась как изолированное явление, но затем эта изоляция устранялась и игра погружалась, без изменений, всеми возможными способами в некоторую более широкую игру. Такой ход идей свойствен естественным наукам, особенно механике. Первая точка зрения соответствует анализу так называемых замкнутых систем, вторая соответствует их погружению, без взаимодействия, во все возможные более широкие замкнутые системы.

Методическая важность этого метода неоднократно подчеркивалась в современной литературе по теоретической физике, особенно в анализе структуры квантовой механики. Примечательно, что оказалось возможным столь существенно использовать этот метод в нашем исследовании.

## 46.11. Важность нормальной зоны

**46.11.1.** Результат (46:Г:b) определяет для каждого решения составной игры Γ в нормальной зоне, а тем более для каждого решения в смысле общей теории, числа $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$. Этот факт, а также непосредственные свойства чисел $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$, связанные с решением, по-видимому, являются настолько фундаментальными, что заслуживают более подробного нематематического обсуждения.

Мы рассматриваем две игры Δ и Η, в которых участвуют два непересекающихся множества игроков $J$ и $K$; правила этих игр обеспечивают полное отсутствие какой-либо физической связи между ними. Но тем не менее мы рассматриваем их как одну игру Γ; конечно, эта игра является составной, с двумя изолированными компонентами Δ и Η.

Найдем теперь все решения всего объединения, т. е. составной игры Γ. Так как нежелательно рассматривать что-либо вне Γ, мы придерживаемся первоначальной теории п. 30.1.1 и 42.4.1 [1]). Затем мы показали, что любое такое решение $\mathbf{U}_I$ определяет число $\overline{\varphi}$ [2]), обладающее следующим свойством: для каждого дележа $\vec{\alpha}$ из $\mathbf{U}_I$ игроки игры Δ (т. е. из $J$) вместе получают величину $\overline{\varphi}$, а игроки игры Η (т. е. из $K$) получают вместе величину $-\overline{\varphi}$. Таким образом, принцип организации, осуществленный в $\mathbf{U}_I$, должен обеспечить (помимо всего прочего) то, чтобы игроки игры Η при всех условиях передавали величину $\overline{\varphi}$ игрокам из Δ.

Остальные свойства решения $\mathbf{U}_I$, т. е. принципа организации, или нормы поведения в нем, состоят в следующем.

Во-первых, игроки игры Δ в своих взаимоотношениях друг с другом должны руководствоваться устойчивой нормой поведения при условии, что передача $\overline{\varphi}$ из другой группы игроков не подлежит обсуждению [3]).

Во-вторых, игроки игры Η в своих взаимоотношениях друг с другом должны руководствоваться устойчивой нормой поведения при условии, что передача $\overline{\varphi}$ другой группе игроков не подлежит обсуждению [4]).

В-третьих, передача $\overline{\varphi}$ должна лежать в границах (46:35) из п. 46.8.3, т. е. удовлетворять условиям

$$(46{:}35)\qquad |\Delta|_1 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2, \qquad -|\mathrm{H}|_2 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\mathrm{H}|_1.$$

---

[1]) То есть $e_0 = 0$.

[2]) Так как $\overline{\varphi} + \overline{\psi} = e_0 = 0$, мы не вводим $\overline{\psi} = -\overline{\varphi}$.

[3]) Иначе говоря, $J$-компонента $\mathbf{V}_J$ решения $\mathbf{U}_I$ есть решение игры Δ для $E(\overline{\varphi})$.

[4]) Иначе говоря, $K$-компонента $\mathbf{W}_K$ решения $\mathbf{U}_I$ есть решение игры Η для $E(-\overline{\varphi})$.

**46.11.2.** Смысл этих правил, очевидно, состоит в том, что любое решение, т. е. любой устойчивый социальный порядок в Г, основан на выплате определенной дани одной из двух групп другой. Величина этой дани есть существенная часть решения. Возможные величины дани, т. е. величины, которые могут появиться в решении, строго определены приведенными выше неравенствами (46:35). Это условие, в частности, показывает следующее:

Во-первых, среди всех возможностей существует нулевая дань, т. е. отсутствие какой-либо дани.

Во-вторых, нулевая дань является единственной возможностью тогда и только тогда, когда одна из двух игр Δ, Н несущественна (см. шестое замечание в п. 46.8.3).

В-третьих, во всех остальных случаях возможны как положительные, так и отрицательные дани,— иначе говоря, как игроки Δ, так и игроки Н могут быть группой, платящей дань.

Границы (46:35) налагаются обеими играми Δ и Н, т. е. объективными физическими возможностями обеих групп [1]). Эти границы выражают тот факт, что каждая группа имеет минимум, снизить который не может никакая форма социальной организации: $-|\Delta|_1$ и $-|H|_1$; вместе с тем каждая группа имеет максимум, выше которого она не может подняться ни при какой форме социальной организации: $|\Delta|_2$ и $|H|_2$.

Таким образом, в конкретных физических условиях, т. е. в игре, например, Δ, эти два числа $|\Delta|_1$ и $|\Delta|_2$ можно интерпретировать следующим образом: $-|\Delta|_1$ есть наихудшее, с чем еще можно примириться при любых условиях, а $|\Delta|_2$ есть максимальное требование, которое может найти отклик извне при каких-либо условиях [2]).

Результаты (45:E) и (45:F) из пп. 45.3.1, 45.3.2 теперь приобретают новое значение: согласно этим результатам, эти два числа могут обращаться в нуль только одновременно (когда игра Δ несущественна) и их отношение всегда лежит между определенными пределами.

## 46.12. Первое возникновение явления передачи: $n = 6$

**46.12.** Мы неоднократно видели (см. (46:J) из п. 46.8.3, а также второе и третье замечания п. 46.11.2), что характерные новые черты теории составной игры Г проявляются только в том случае, когда обе компоненты Δ и Н являются существенными. Это оказывается, когда $e_0 = 0$, но

$$\overline{\varphi} = -\overline{\psi} \neq 0,$$

т. е. имеет место ненулевая дань в смысле п. 46.11.

Теперь мы знаем, что для того, чтобы игра была существенной, в ней должно участвовать не меньше трех игроков. Если это имеет место как для Δ, так и для Н, то составная игра Г должна иметь не меньше шести игроков.

Как показывает следующее рассуждение, шести игроков действительно достаточно. Пусть обе игры, Δ и Н, являются существенными играми

[1]) Однако где именно фактическая величина $\overline{\varphi}$ лежит между этими границами, определяется не этими объективными данными, а решением, т. е. нормой поведения, которая оказывается общепринятой.

[2]) Нужно вспомнить, что во всех этих рассуждениях значение $v(J)$ коалиции всех игроков Δ принимается равным нулю; иначе говоря, мы обсуждаем убытки, вызванные единственно недостаточным кооперированием внутри группы и неблагоприятными общими социальными условиями, а также прибыли, вызванные единственно недостаточным кооперированием в других группах и благоприятными общими социальными условиями.

трех лиц, для которых $\gamma = 1$. Тогда $|\Delta|_1 = |H|_1 = 3$, $|\Delta|_2 = |H|_2 = {}^3/_2$ (см. п. 46.10.3). Следовательно при $-{}^3/_2 \leqq \overline{\varphi} \leqq {}^3/_2$ как $\overline{\varphi}$, так и $\overline{\psi} = -\overline{\varphi}$ заключены между $-3$ и ${}^3/_2$. Как будет показано в § 47, отсюда следует существование решений $\mathbf{V}_J$ и $\mathbf{W}_K$ соответственно игр $\Delta$ и H для $E(\overline{\varphi})$ и $E(\overline{\psi})$. Композиция $\mathbf{U}_I$ этих решений является тогда решением составной игры Г для данного $\overline{\varphi}$. Так как $\overline{\varphi}$ ограничено только неравенствами $-{}^3/_2 \leqq \overline{\varphi} \leqq {}^3/_2$, мы можем выбрать $\overline{\varphi}$ отличным от нуля.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

(46:O) $n = 6$ есть наименьшее число игроков, при котором в соответствующей игре может наблюдаться характерный новый элемент теории составных игр (т. е. возможность равенства $e_0 = 0$ при $\overline{\varphi} = -\overline{\psi} \neq 0$, см. рассуждения, приведенные выше).

Мы неоднократно выражали уверенность в том, что возрастание числа игроков вызывает не только количественное усложнение явлений, наблюдаемых для меньшего числа игроков, но может вызвать также и качественно новые явления. В частности такие явления наблюдались, когда число игроков последовательно возрастало до 2, 3, 4. Поэтому представляет интерес тот факт, что то же происходит, когда число игроков достигает шести [1]).

## § 47. СУЩЕСТВЕННЫЕ ИГРЫ ТРЕХ ЛИЦ В НОВОЙ ТЕОРИИ

### 47.1. Необходимость рассмотрения этого вопроса

**47.1.** Нам остается рассмотреть решения существенных игр трех лиц в соответствии с новой теорией.

Это необходимо, так как мы уже использовали в пп. 46.10 и 46.12 существование этих решений, но кроме того, их рассмотрение интересно также и само по себе. Ввиду той интерпретации, которую мы были вынуждены придать этим решениям в п. 46.12, а также ввиду их центральной роли в теории разложения [2]) желательно детально исследовать их структуру. Кроме того, знакомство с этими деталями приведет к другим интерпретациям, имеющим некоторое значение (см. пп. 47.8 и 47.9). Наконец, мы обнаружим, что принципы, использованные для нахождения рассматриваемых решений, имеют более широкое применение (см. пп. 60.3.2, 60.3.3).

### 47.2. Предварительные замечания

**47.2.1.** Мы будем рассматривать существенную игру трех лиц, обозначаемую через Г, с нормировкой $\gamma = 1$. Таким образом, $|\Gamma|_1 = 3$, $|\Gamma|_2 = {}^3/_2$ (см. п. 46.12). Мы хотим найти решения этой игры Г для множества $E(e_0)$ [3]). В приложениях, упоминавшихся выше, нам была нужна только

---

[1]) Относительно некоторых других качественно новых явлений, которые проявляются только для шести игроков, см. п. 53.2.

[2]) Это единственная задача абсолютно общего характера, для которой мы имеем в настоящее время полное решение!

[3]) Мы пишем Г и $e_0$, хотя использовались соответственно обозначения $\Delta$ и $\overline{\varphi}$, а также H и $\overline{\psi}$ $(= -\overline{\varphi})$.

Конечно, рассматриваемая теперь игра Г не имеет ничего общего с разложимой игрой Г, рассматривавшейся ранее.

нормальная зона $-3 \leqq e_0 \leqq 3/2$, но теперь мы предпочитаем рассматривать все значения $e_0$.

Это исследование будет проводиться графическим методом, который мы использовали при изложении старой теории в § 32. Поэтому мы будем следовать схеме § 32 в нескольких отношениях.

Характеристическая функция здесь та же самая что и в п. 32.1.1:

(47:1) $$\mathrm{v}(S) = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \text{ если } S \text{ имеет } \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \text{ элементов}$$

Обобщенный дележ есть вектор

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

три компоненты которого должны удовлетворять условиям (44:13) из п. 44.7.2, которые теперь принимают вид

(47:2) $$\alpha_1 \geqq -1, \quad \alpha_2 \geqq -1, \quad \alpha_3 \geqq -1.$$

Кроме того, согласно (44:11*) из п. 44.7.2 в $E(e_0)$ избыток должен быть равен $e_0$, и это условие теперь принимает вид

(47:3) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = e_0$$ [1].

**47.2.2.** Мы хотим представить графически эти дележи с помощью приема, описанного в п. 32.1.2. Но этот прием позволяет изобразить только такие тройки чисел, сумма которых равна нулю. Поэтому положим

(47:4) $$\alpha^1 = \alpha_1 - \frac{e_0}{3}, \quad \alpha^2 = \alpha_2 - \frac{e_0}{3}, \quad \alpha^3 = \alpha_3 - \frac{e_0}{3}.$$

Тогда условия (47:2) и (47:3) принимают вид

(47:2*) $$\alpha^1 \geqq -\left(1 + \frac{e_0}{3}\right), \quad \alpha^2 \geqq -\left(1 + \frac{e_0}{3}\right), \quad \alpha^3 \geqq -\left(1 + \frac{e_0}{3}\right),$$

(47 : 3*) $$\alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 = 0$$ [2].

Теперь становится возможным представление п. 32.1.2, причем нам нужно только заменить $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ на $\alpha^1$, $\alpha^2$, $\alpha^3$. С учетом этой оговорки можно использовать рис. 31.

По этим причинам для каждого вектора $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ из $E(e_0)$ мы образуем не только его *компоненты* в первоначальном смысле, но также его *квазикомпоненты* $\alpha^1$, $\alpha^2$, $\alpha^3$, определенные равенствами (47:4), и с помощью этих квазикомпонент мы используем графическое представление рис. 31.

Итак, это представление на плоскости выражает в точности условие (46:3 *). Остальные условия (47:2 *) поэтому эквивалентны ограничению, наложенному на точку $\vec{\alpha}$ в плоскости на рис. 31. Это ограничение получается

---

[1]) Читатель должен сравнить условия (47:1) — (47:3) с условиями (32:1) — (32:3) из п. 32.1.1; единственное отличие состоит здесь в равенстве (47:3).

[2]) При сравнении этих условий (47:2*) и (47:3*) с условиями (32:2) и (32:3) из п. 32.1.1 видно, что условия (47:3*) и (32:3) совпадают, а условия (47:2*) и (32:2) отличаются только коэффициентом пропорциональности $1 + \frac{e_0}{3}$.

таким же образом, что и аналогичное ограничение в п. 32.1.2: точка $\vec{\alpha}$ должна лежать внутри треугольника, образованного тремя прямыми $\alpha^1 = -(1+\frac{e_0}{3})$, $\alpha^2 = -(1+\frac{e_0}{3})$, $\alpha^3 = -(1+\frac{e_0}{3})$. Это есть в точности ситуация рис. 32, за исключением наличия множителя пропорциональности $1+\frac{e_0}{3}$ [1]), и она изображена на рис. 49. Заштрихованная область, которая будет называться *фундаментальным треугольником* представляет дележи $\vec{\alpha}$, удовлетворяющие условиям (47 : 2*) (47 : 3*), т. е. принадлежащие $E(e_0)$.

47.2.3. В этом графическом представлении мы выразим отношение доминирования. Так как мы используем новую теорию, рассуждения п. 31.1 относительно множества $S$ для отношения доминирования $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$, т. е. рассуждения относительно того, является оно заведомо необходимым или заведомо не необходимым, больше неприменимы. Поэтому мы изучим множество $S$ заново.

Рис. 49.

По-прежнему справедливо, что $S$ не может состоять из одного или из трех элементов. В первом случае $S = (i)$, так что согласно п. 30.1.1, $\alpha_i \leqq v((i)) = -1$, $\alpha_i > \beta_i$ и, следовательно, $\beta_i < -1$, что противоречит неравенству $\beta_i \geqq -1$ ввиду (47:2). Во втором случае $S = (1, 2, 3)$, так что согласно п. 30.1.1 $\alpha_1 > \beta_1$, $\alpha_2 > \beta_2$, $\alpha_3 > \beta_3$ и, следовательно, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, что противоречит равенству $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = e_0$ ввиду (47.3).

Таким образом, множество $S$ должно состоять из двух элементов, $S = (i, j)$ [2]). Тогда доминирование означает, что $\alpha_i + \alpha_j \leqq v((i, j)) = 1$ и $\alpha_i > \beta_i$, $\alpha_j > \beta_j$, т. е.

$$\alpha^i + \alpha^j \leqq 1 - \frac{2e_0}{3}$$

и $\alpha^i > \beta^i$, $\alpha^j > \beta^j$. Ввиду (47:3*) первое условие можно записать в виде

$$\alpha^k \geqq -\left(1 - \frac{2e_0}{3}\right).$$

Таким образом, мы установили следующее: отношение доминирования

$$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$$

---

[1]) См. сноску 2 на стр. 417. Здесь мы, конечно, предполагаем, что $1 + \frac{e_0}{3} \geqq 0$, т. е. что

$$e_0 \geqq -3 = -|\Gamma|_1.$$

Если $1 + \frac{e_0}{3} < 0$, т. е. $e_0 < -3 = -|\Gamma|_1$, то условия (47.2*), (47:3*) несовместны, и действительно, как мы знаем из (45:A), в этом случае множество $E(e_0)$ пусто.

[2]) $i, j, k$ есть перестановка 1, 2, 3.

означает, что

$$(47:5) \qquad \begin{cases} \text{либо } \alpha^1 > \beta^1,\ \alpha^2 > \beta^2 \text{ и } \alpha^3 \geqq -\left(1 - \frac{2e_0}{3}\right), \\ \text{либо } \alpha^1 > \beta^1,\ \alpha^3 > \beta^3 \text{ и } \alpha^2 \geqq -\left(1 - \frac{2e_0}{3}\right), \\ \text{либо } \alpha^2 > \beta^2,\ \alpha^3 > \beta^3 \text{ и } \alpha^1 \geqq -\left(1 - \frac{2e_0}{3}\right) \end{cases}$$ [1].

### 47.3. Рассмотрение шести случаев. Случаи (I) — (III)

**47.3.1.** После этих предварительных замечаний мы можем перейти к рассмотрению решений **V** игры Г для $E(e_0)$ для всех значений $e_0$.

Окажется удобным различать шесть случаев. Из этих случаев случай (I) соответствует (45:O:a), случаи (II) — (IV) и одна часть из случая (V) — (45.O:b) (нормальной зоне), а случаи (V) и (VI) (исключая эту часть) — (45:O:c) (все в п. 45.6.1).

**47.3.2.** Случай (I): $e_0 < -3$. В этом случае $1 + \frac{e_0}{3} < 0$, так что условия (47:2*) и (47 : 3*) несовместны, и $E(e_0)$ пусто (см. сноску 1 на стр. 418); следовательно, множество **V** также должно быть пустым.

Случай (II): $e_0 = -3$. В этом случае $1 + \frac{e_0}{3} = 0$ и из (47 : 2*) и (47 : 3*) следует, что $\alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = 0$, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = e_0/3 = -1$, $\vec{\alpha} = \{-1, -1, -1\}$. Таким образом, $E(e_0)$ состоит из одного элемента, и должно быть $\mathbf{V} = E(e_0)$ ввиду тех же рассуждений, которые использовались при доказательстве (31:O) из п. 31.2.3. Таким образом, эта ситуация очень похожа на ту, которая встретилась в несущественной игре (см. соответствующее место).

Случай (III): $-3 < e_0 \leqq 0$. В этом случае $1 + \frac{e_0}{3} > 0$, так что мы можем использовать рис. 49. Кроме того, $1 + \frac{e_0}{3} \leqq 1 - \frac{2e_0}{3}$, так что дополнительные условия (47:5) из п. 47.2.3 автоматически выполнены во всем фундаментальном треугольнике. Итак, (47:5) совпадает с (32:4) из п. 32.1.3 (см. сноску на этой стр.). Следовательно, снова применимы все рассуждения пп. 32.1.3—32.2.3, если ввести множитель пропорциональности $1 + \frac{e_0}{3}$.

Таким образом, в этом случае мы получаем решения для $E(e_0)$ простым умножением на $1 + \frac{e_0}{3}$ каждой компоненты описанного в п. 32.2.3 решения и прибавлением к результату $e_0/3$ (для перехода от $\alpha^i$ к $\alpha_i$).

### 47.4. Случай (IV). Первая часть

**47.4.1.** Случай (IV): $0 < e_0 < 3/2$. В этом случае $0 < 1 - \frac{2e_0}{3} < 1 + \frac{e_0}{3}$. Следовательно, прямые

$$\alpha^1 = -\left(1 - \frac{2e_0}{3}\right), \quad \alpha^2 = -\left(1 - \frac{2e_0}{3}\right), \quad \alpha^3 = -\left(1 - \frac{2e_0}{3}\right)$$

[1]) Эти условия отличаются от соответствующих условий (32:4) из п. 32.1.3 только дополнительным неравенством в конце каждой строки.

(которые соответствуют границам для дополнительных условий (47.5)) расположены по отношению к фундаментальному треугольнику на рис. 49 так, как это показано на рис. 50. Они разбивают фундаментальный треугольник на семь областей, каждую из которых можно охарактеризовать теми двухэлементными множествами $S$, которые являются эффективными в этой области в смысле (47:5). Список этих множеств приводится в табл. 25. Теперь мы можем вычертить аналог рис. 33, на котором для каждой точки фундаментального треугольника указаны заштрихованные области [1]), которые она доминирует. Это сделано на рис. 51 (см. табл. 25) в соответствии с (47.5). Необходимо рассматривать отдельно каждую из семи областей рис. 50, а каждую заштрихованную область рис. 51 нужно распространить на весь фундаментальный треугольник.

Таблица 25. К рис. 51

| Область | Эффективные двухэлементные множества $S$ | | |
|---|---|---|---|
| *1* | (1,2) | (1,3) | (2,3) |
| *2* | (1,2) | (1,3) | |
| *3* | (1,2) | | (2,3) |
| *4* | | (1,3) | (2,3) |
| *5* | | | (2,3) |
| *6* | | (1,3) | |
| *7* | (1,2) | | |

Из рис. 51 ясно, что никакая точка области *1* не может доминироваться точкой, лежащей вне этой области [2]). Следовательно, условие (44:E:c) п. 44.7.3, которое характеризует решение **V** для $E(e_0)$, т. е. для всего фундаментального треугольника, должно также выполняться для части **V**, содержащейся в области *1*, если рассматривается область *1* (вместо всего фундаментального треугольника, т. е. $E(e_0)$). Но область *1* есть треугольник, аналогичный фундаментальному треугольнику на рис. 32, за исключением коэффициента пропорциональности $1-\frac{2e_0}{3}$ [3]). Сравнение рис. 33 с областью *1* рис. 51 показывает, что условия доминирования те же самые.

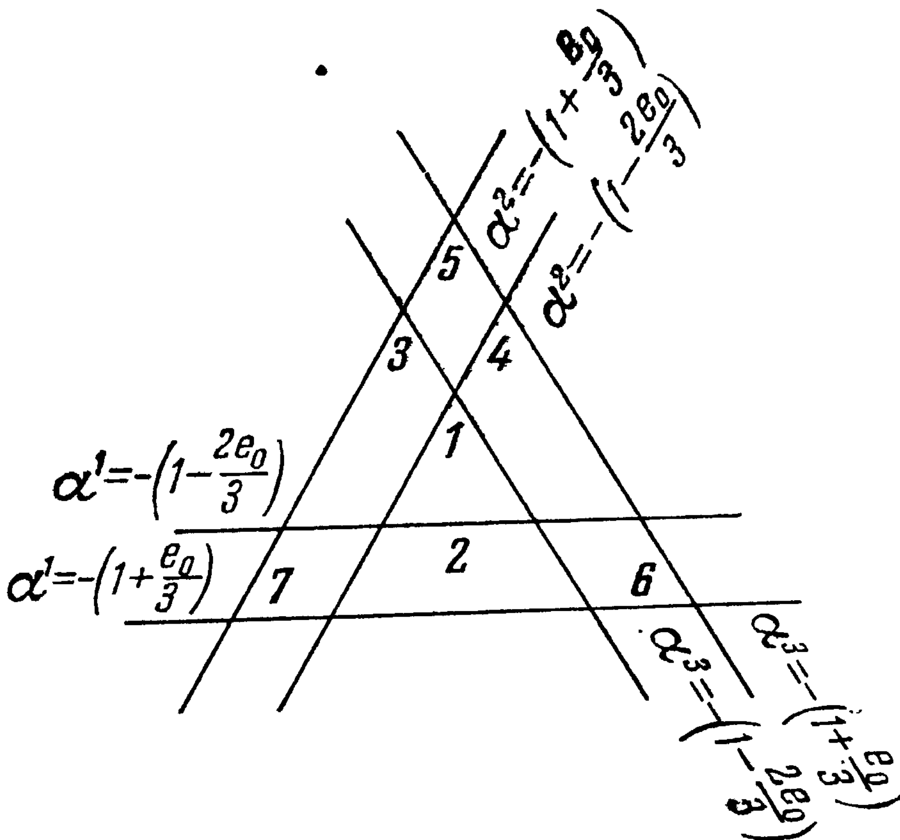



Рис. 50.

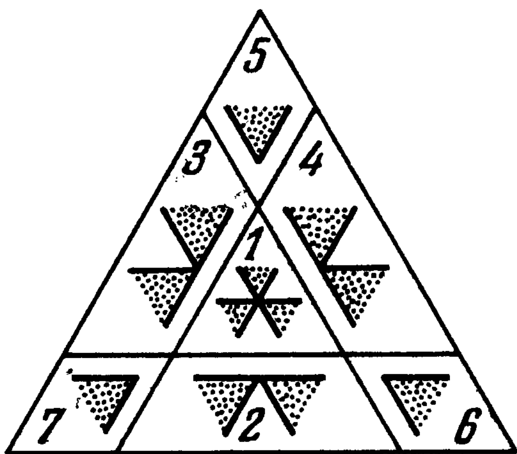



Рис. 51.

**47.4.2.** Следовательно, если ввести множитель пропорциональности $1-\frac{2e_0}{3}$, то все рассуждения пп. 32.1.3—32.2.3 применимы к части **V** содержащейся в области *1*.

Следовательно, часть **V**, содержащаяся в *1*, должна быть либо множеством $^{\circ}_{\circ}{}^{\circ}$, либо множеством —·—·—, которые указаны на рис. 52. (Пря-

[1]) Исключая их границы.

[2]) Включая ее границу.

[3]) Заметим, что $1-\frac{2e_0}{3}>0$.

*мая* —·—·—*может находиться в любом положении ниже точек* °°). *Однако* для того чтобы получить все решения, нужно произвести все перестановки элементов 1, 2, 3, т. е. треугольник с прямой —·—·— повернуть на 0°, 60° и 120°. (См. п. 32.2.3; множество $^{\circ}_{\circ}{}^{\circ}$ соответствует (32:B), а прямая —·—·—соответствует (32:A).) После того как часть **V**, содержащаяся в области *1*, найдена, мы перейдем к нахождению остальной части **V**. Так как **V** есть решение, эта остальная часть **V** должна лежать в области, которая не доминируется частью **V**, содержащейся в области *1*. Сравнение рис. 52 с рис. 51 показывает, что эта недоминируемая область следующая.

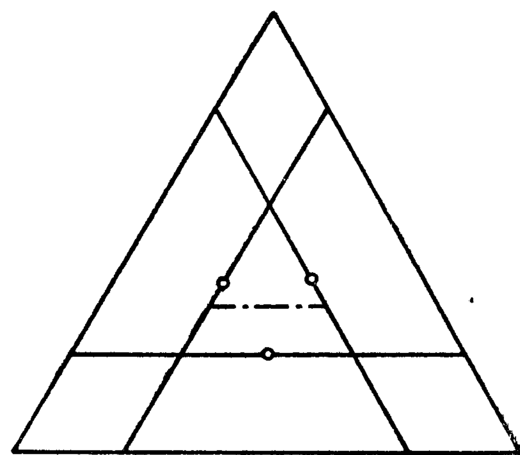


Рис. 52.

Для множества $^{\circ}_{\circ}{}^{\circ}$ она состоит из трех заштрихованных треугольников рис. 53, для прямой —·—·— она состоит из трех заштрихованных треугольников на рис. 54 [1]).

Из рис. 51 ясно, что никакая точка ни в одном из этих треугольников не может доминироваться точкой из другого треугольника [2]). Следовательно, условие (44:E:c) п. 44.7.3, которое характеризует решение **V** для $E(e_0)$, т. е. для всего фундаментального треугольника, и которое выпол-

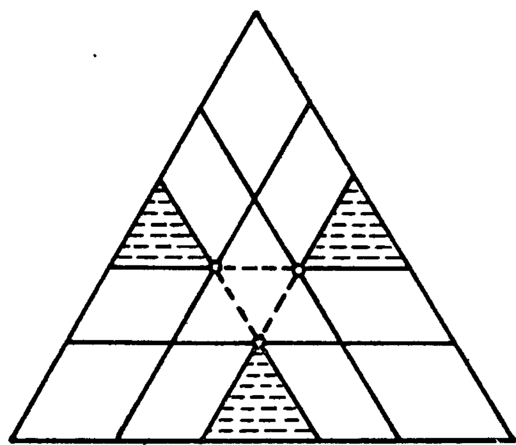


Рис. 53.

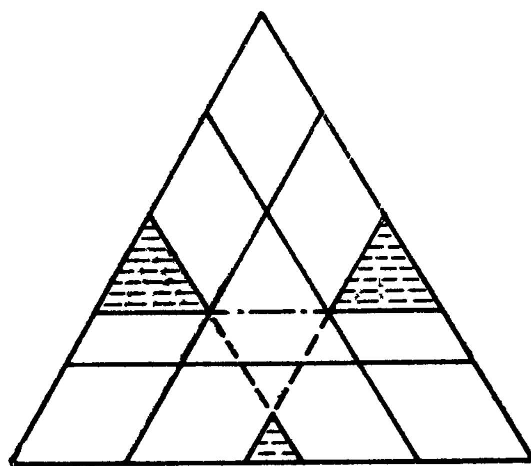


Рис. 54.

нено также для части **V**, содержащейся в области *1*, если рассматривается эта область (вместо всего фундаментального треугольника, т. е. $E(e_0)$), утверждает в точности следующее: (44:E:c) выполнено для части **V**, содержащейся в каждом заштрихованном треугольнике, если рассматривается этот треугольник.

## 47.5. Случай (IV). Вторая часть

**47.5.1.** Рассмотрим поэтому один из этих треугольников; обозначим его через *T*. Его положение в фундаментальном треугольнике [3]) и

[1]) Положение всех этих треугольников ясно указано на рисунках, за исключением нижнего треугольника на рис. 54. Этот треугольник лежит, конечно, вне внутреннего треугольника (области *1*) — это утверждение эквивалентно ограничению (32:8) из п. 32.2.2, см. также рис. 40 из этого пункта. Его положение по отношению к внешнему (фундаментальному) треугольнику менее определенно: он может стянуться в точку или даже исчезнуть совсем.

Нетрудно видеть, что последнее явление исключено, если размер (линейный) внутреннего треугольника меньше 1/4 внешнего; это означает, что $1-\frac{2e_0}{3}<\frac{1}{4}\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$, т. е. $e_0>1$. Мы не предполагаем обсуждать далее этот вопрос.

[2]) Все это относится либо к рис. 53, либо к рис. 54, но, конечно, не к обоим в одних и тех же рассуждениях!

[3]) С точностью до поворота на 0° или 120°. Для нижнего треугольника на рис. 54 вершина лежит не на внутреннем треугольнике, а ниже его (см. сноску 1 на этой стр.), но это не меняет наших рассуждений.

заштрихованные области, которые доминируются данной точкой в нем (взятые из рис. 51), показаны на рис. 55. Мы можем теперь ограничиться этим треугольником $T$ и отношением доминирования, которое в нем определено, и найти решение (44:E:c) по отношению к этому треугольнику.

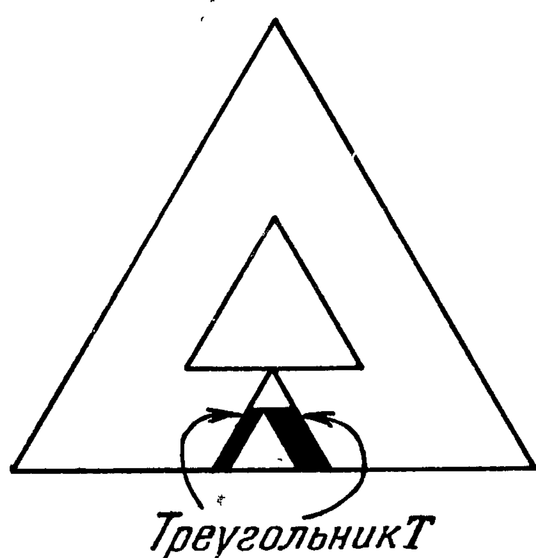



Рис. 55.

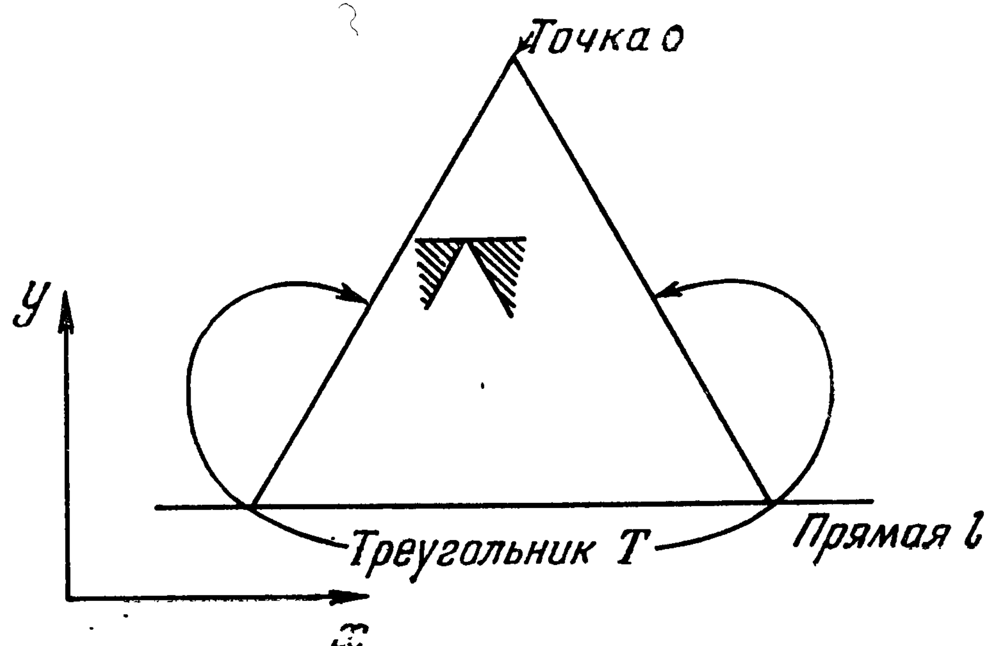



Рис. 56.

Мы вычертим отдельно $T$ и доминируемые области, а также введем в нем систему координат $x$, $y$ (рис. 56).

Заметим, что вершина $o$ не доминируется точками $T$ и поэтому должна принадлежать **V** [1,2]).

**47.5.2.** Рассмотрим теперь в $T$ две точки из **V** с различными ординатами $y$. Для того чтобы верхняя точка не доминировала нижнюю, последняя не должна находиться ни в одном из заштрихованных секторов,

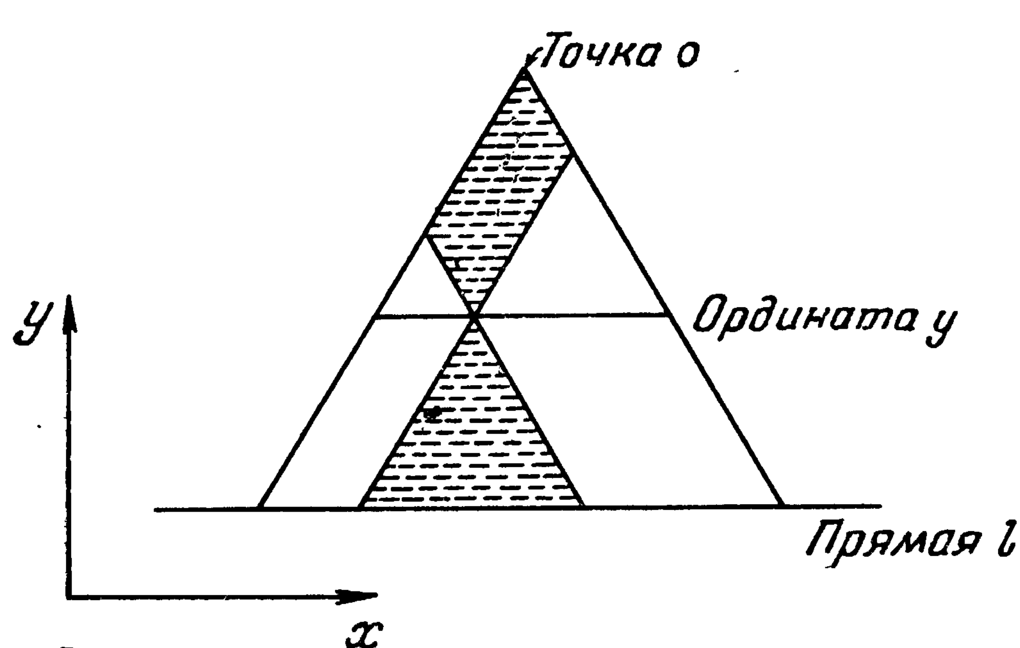



Рис. 57.

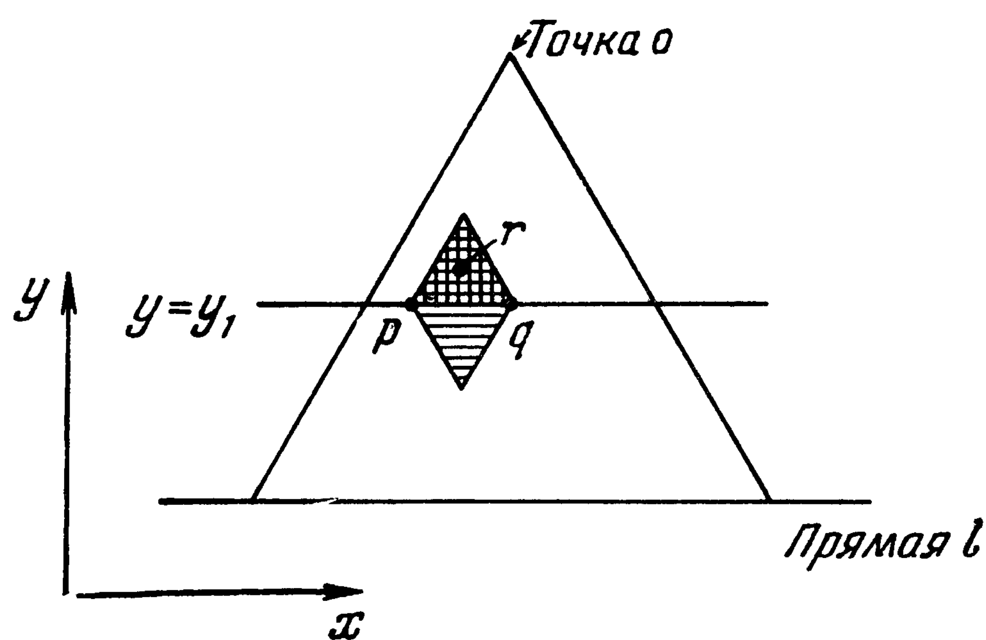



Рис. 58.

определяемых первой точкой, т. е. нижняя точка должна находиться в среднем секторе ниже первой, и обратно. Таким образом, если в $T$ дана точка из **V**, то все точки из **V** в $T$ с различными ординатами $y$ должны находиться в одной из двух заштрихованных областей, указанных на рис. 57.

**47.5.3.** Предположим теперь, что $y_1$ — ордината более чем одной точки из **V**. Пусть тогда $p$ и $q$ — две различные точки из **V**, ординаты которых равны $y_1$ (рис. 58). Выберем теперь точку $r$ внутри треугольника,

---

[1]) Для других заштрихованных треугольников (т. е. $T$), отличных от нижнего треугольника рис. 54, этот факт следует из других рассуждений, а именно: как показывают рис. 53, 54, вершина такого треугольника лежит на границе внутреннего треугольника (т. е. области *1*) и принадлежит множеству, которое, как мы знаем, является частью **V** в области *1*.

[2]) Когда нижний заштрихованный треугольник (т. е. $T$) рис. 54 вырождается в одну точку (см. сноску 1 на стр. 421), которая является, конечно, точкой $o$, она определяет часть **V** в $T$.

заштрихованного в клеточку. Сравнение рис. 58 с рис. 56 показывает, что эта точка $r$ доминирует как $p$, так и $q$. Так как $p$, $q \in \mathbf{V}$, $r$ не может принадлежать $\mathbf{V}$. Следовательно, в $\mathbf{V}$ должна существовать точка $s$, которая доминирует $r$. Повторное сравнение рис. 58 с рис. 56 показывает, что точка, которая доминирует $r$, должна также доминировать либо $p$, либо $q$. Так как все точки $s$, $p$, $q$ принадлежат $\mathbf{V}$, это невозможно.

**47.5.4.** Предположим теперь, что $y_1$ (в треугольнике $T$, т. е. между основанием $l$ и вершиной $o$) не есть ордината какой-либо точки, принадлежащей $\mathbf{V}$. Тогда наверняка существуют точки из $\mathbf{V}$ с ординатами $y \geqq y_1$; например, такой точкой является вершина $o$. Выберем из $\mathbf{V}$ точку $p$ с ординатой $y \geqq y_1$ и расположенную возможно ниже, т. е. точку с минимальной ординатой $y$ [1]) (рис. 59). Обозначим это минимальное значение через $y = y_2$. Ясно, что $y_1 < y_2$. По определению $y_2$ никакая точка из $\mathbf{V}$ не имеет ординаты $y$, для которой $y_1 \leqq y < y_2$, и, согласно приведенным выше рассуждениям, $p$ есть единственная точка из $\mathbf{V}$ с ординатой $y = y_2$.

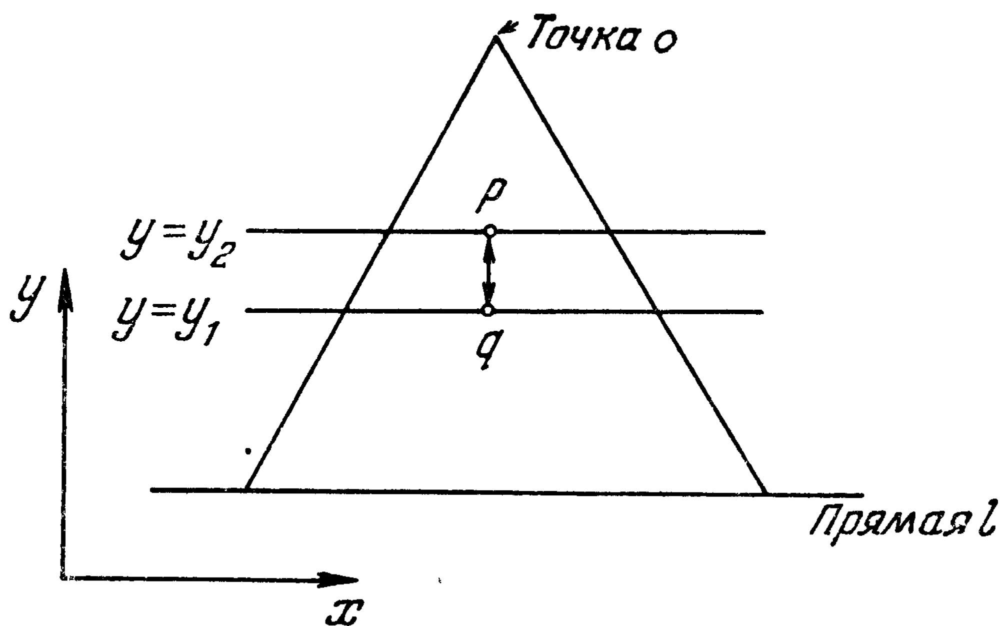



Рис. 59.

Спроектируем теперь точку $p$ по вертикали на прямую $y = y_1$; мы получим точку $q$. Точка $q$ не может принадлежать $\mathbf{V}$, и, следовательно, она доминируется некоторой точкой $s \in \mathbf{V}$. Поэтому эта точка $s$ не может находиться ниже $q$, т. е. ее ордината $y \geqq y_1$. Следовательно, $y \geqq y_2$. Сравнение рис. 59 с рис. 56 показывает, что $p$ не доминирует $q$. Следовательно, $s \neq p$, откуда необходимо следует, что $y \neq y_2$. Таким образом, $y > y_2$, т. е. $s$ находится определенно выше $p$. Повторное сравнение рис. 59 с рис. 56 показывает, что если точка $s$, лежащая выше $p$, доминирует точку $q$, то она должна также доминировать $p$. Так как обе точки $s$, $p$ принадлежат $\mathbf{V}$, это невозможно.

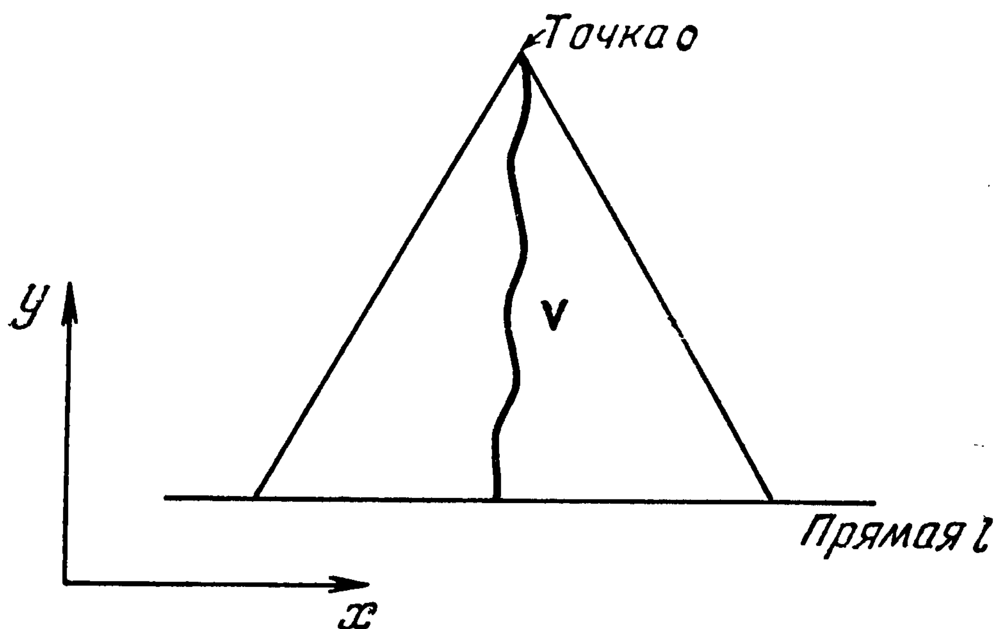



Рис. 60.

**47.5.5.** Подведем итоги: каждое $y$ (между $l$ и $o$) есть ордината в точности одной точки из $\mathbf{V}$. Если $y$ изменяется, то эта точка изменяется так, что сохраняются ограничения рис. 57, т. е. она изменяется в заштрихованных областях, указанных на этом чертеже. Другими словами:

(47:6) $\mathbf{V}$ (в $T$) представляет собой кривую, идущую от вершины $o$ до основания $l$, направление которой никогда не отклоняется от вертикали более чем на 30° [2]) (см. рис. 60).

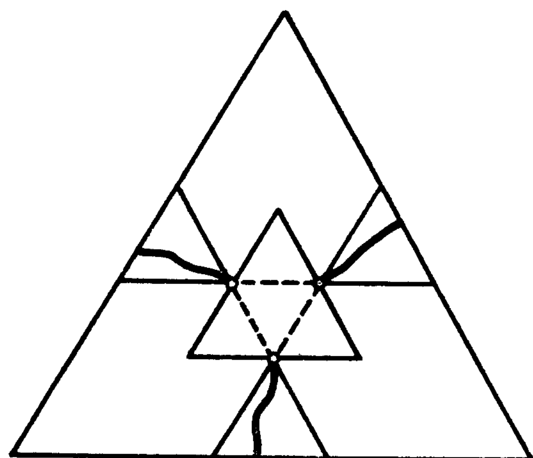
---

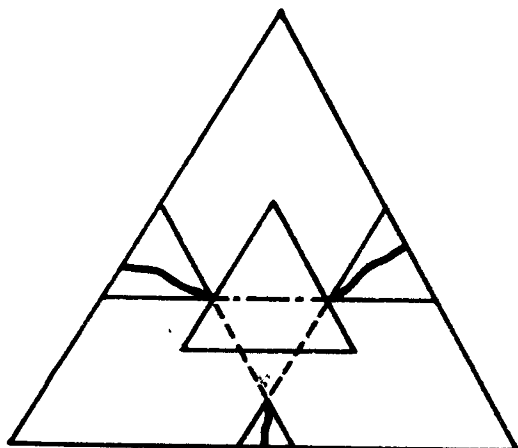
[1]) Это возможно, так как $\mathbf{V}$ есть замкнутое множество; см. утверждение (*) замечания на стр. 397.

[2]) Следовательно, она непрерывна.

Обратно, если дана произвольная кривая, удовлетворяющая (47:6), то из сравнения рис. 60 с рис. 56 становится ясно, что области, доминируемые точками из **V**, составляют в точности дополнение **V** в $T$. Таким образом, (47:6) есть точное определение части **V** в $T$ [1]).

Теперь мы можем получить общее решение **V** для $E(e_0)$ (т. е. для фундаментального треугольника), проводя в каждом заштрихованном треугольнике на рис. 53 и 54 кривые, соответствующие рис. 60. Результаты изображены соответственно на рис. 61 и 62 [2]).


Рис. 61.


Рис. 62.

Нужно отметить, что эти рисунки все еще имеют заметное сходство с рисунками, описывающими решения существенной игры трех лиц в старой теории (см. п. 32.2.3, что видно на внутреннем треугольнике на рис. 52). Новое представляют собой кривые в малых треугольниках, каждая из которых расположена в полосе между двумя главными треугольниками рис. 61 и 62. Ширина этой полосы, как показано на рис. 50 и следующих, измеряется числом $e_0$ [3]). Поэтому, когда $e_0$ стремится к нулю, новые решения приближаются к старым.

Следует также указать, что множество решений теперь гораздо разнообразнее, чем было раньше: можно выбирать произвольно целые кривые (соблюдая ограничения (47:6)). Далее мы увидим, что эти кривые наводят на мысль об одной интерпретации, имеющей дополнительное значение. (См. п. 47.8.)

## 47.6. Случай (V)

**47.6.1.** Случай (V): $3/2 \leqq e_0 < 3$. В этом случае

$$1-\frac{2e_0}{3}\leqq 0<1+\frac{e_0}{3} \quad \text{и} \quad -2\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)<1+\frac{e_0}{3}\ ^{4)}.$$

Как легко проверить, эти неравенства выражают тот факт, что ориентация внутреннего треугольника из рис. 50 противоположна ориентации внешнего (фундаментального) треугольника, но внутренний треугольник все еще расположен целиком внутри внешнего, как показано на рис. 63. Внешний треугольник снова разбивается на семь областей, каждую из которых можно охарактеризовать теми двухэлементными множествами, которые эффективны в ней в смысле (47:5) из п. 47.2.3. Единственное отличие между рассматриваемым случаем и случаем (IV) (т. е. рис. 50) состоит в поведении области *1*. Список областей и соответствующих им эффективных множеств приведен ниже в таблице 26 к рис. 64.

---

[1]) Это также верно в случае, когда $T$ вырождается в точку; см. сноску 1 на стр. 421.

[2]) Нижний треугольник на рис. 62 может выродиться в точку или даже исчезнуть совсем; см. сноску 1 на стр. 421.

[3]) Стороны внешнего (фундаментального) треугольника задаются уравнениями $\alpha^i = -\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$, стороны внутреннего треугольника — уравнениями $\alpha^i = -\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)$ (см. рис. 50). Разность чисел $-\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$ и $-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)$ равна $e_0$.

[4]) Это последнее неравенство эквивалентно неравенству $e_0 < 3$.

Теперь мы можем вычертить аналоги рис. 33 и 51, показывающие для каждой точки фундаментального треугольника заштрихованные области [1]), которые она доминирует. Это сделано на рис. 64 (см. табл. 26) в соответствии с (47:5).

Из рис. 64 ясно, что никакая точка области *1* [2]) не доминируется никакой точкой [3]). Следовательно, решение **V** должно содержать всю область *1*.

**47.6.2.** Теперь, когда найдена часть **V**, содержащаяся в области *1*, перейдем к определению остальной части **V**. Так как **V** есть решение, эта остальная часть **V** должна содержаться в области, которая не доминируется уже известной частью **V**, т. е. областью *1*. Рассмотрение рис. 64 показывает, что эта недоминируемая область состоит в точности из трех треугольников *2*, *3*, *4* [4]).

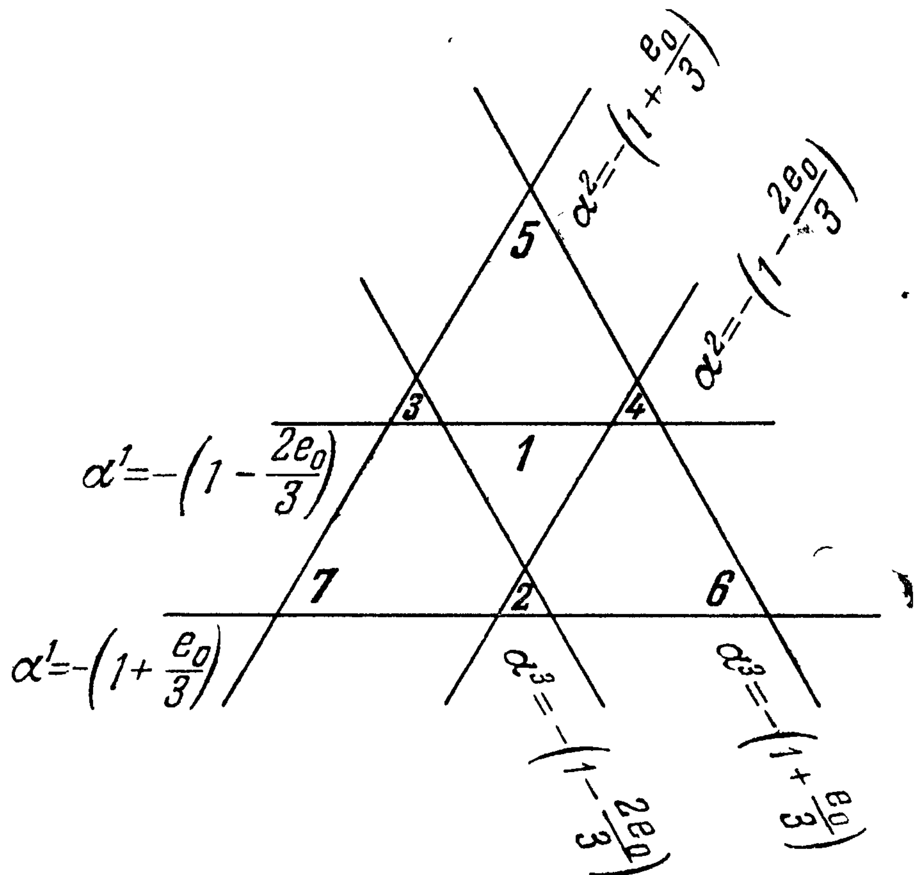


Рис. 63.

Из рис. 64 ясно, что никакая точка ни в одном из этих трех треугольников не может доминироваться точкой из другого треугольника. Поэтому рассуждения п. 47.4.2 показывают, что **V** должно удовлетворять в точности следующим требованиям: для части **V** в каждом из этих треугольников должно выполняться условие (44:E:c) из п. 44.7.3, рассматриваемое для этого треугольника (вместо всего фундаментального треугольника, т. е. $E(e_0)$).

В треугольниках *2*, *3*, *4* эти условия совпадают с условиями, описанными на рис. 55, 56 для треугольника *T*. Поэтому можно повторить дословно все рассуждения пп. 47.5.1—47.5.4, и частями **V** в треугольниках *2*, *3*, *4*

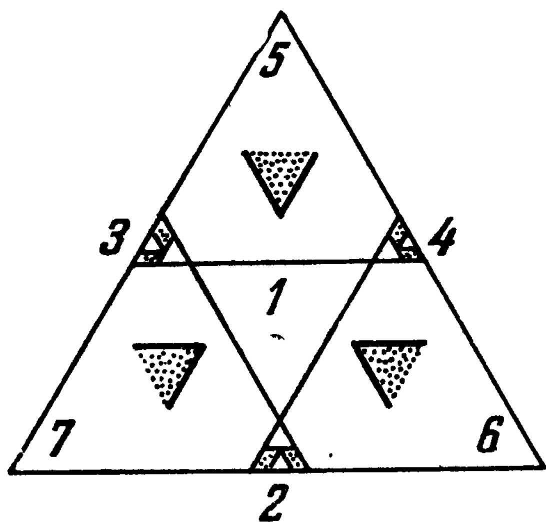


Рис. 64.

Таблица 26. К рис. 64

| Область | Эффективные двухэлементные множества S | | |
|---|---|---|---|
| *1* | | | |
| *2* | (1,2) | (1,3) | |
| *3* | (1,2) | | (2,3) |
| *4* | | (1,3) | (2,3) |
| *5* | | | (2,3) |
| *6* | | (1,3) | |
| *7* | (1,2) | | |

[1]) Исключая их границы.

[2]) Включая ее границу.

[3]) То есть никаким дележом $\vec{\alpha}$ из $E(e_0)$. Легко показать, что они не доминируются никаким дележом $\vec{\alpha}$ вообще — ввиду (45:D) п. 45.2.4 они являются исключенными дележами. Внутренние точки области *1* также не доминируются никакими другими точками. Иначе говоря, они не доминируются никакими $\vec{\alpha}$ из $E(e_0)$. Точно так же легко показать, что они не доминируются никаким дележом $\vec{\alpha}$ вообще — они являются вполне исключенными дележами, см. (45:C) из п. 45.2.4. Эти утверждения можно также проверить непосредственно, используя определения п. 45.2.

[4]) Оставшаяся часть фундаментального треугольника доминируется границей области *1*, которая принадлежит *1*.

являются кривые, как показано на рис. 60, характеризуемые условием (47:6) п. 47.5.5.

Теперь мы можем получить общее решение **V** для $E(e_0)$ (т. е. для фундаментального треугольника) проведением таких кривых в треугольниках *2*, *3*, *4* рис. 64. Результат показан на рис. 65. Относительно дальнейших замечаний, касающихся этих решений, см. пп. 47.8 и 47.9.

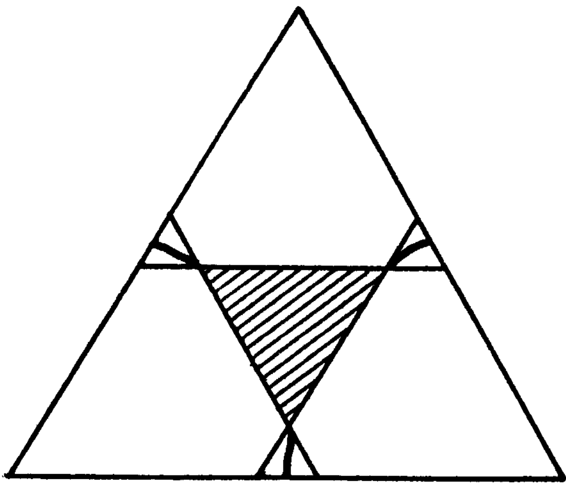


Рис. 65.

### 47.7. Случай (VI)

**47.7.** $e_0 \geqq 3$. В этом случае

$$1-\frac{2e_0}{3}<0<1+\frac{e_0}{3}$$

и

$$-2\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)\geqq 1+\frac{e_0}{3}\text{[1]}.$$

Как легко проверить, эти неравенства выражают тот факт, что внутренний треугольник на рис. 63 имеет по-прежнему ту же самую ориентацию, но что он достигает границ внешнего (фундаментального) треугольника и, возможно, выходит за его пределы[2]), как изображено на рис. 66. Единственное различие между рассматриваемым случаем и случаем (V) (т. е. рис. 63) состоит в отсутствии областей *2*, *3*, *4*. Расположение областей показано на рис. 66.

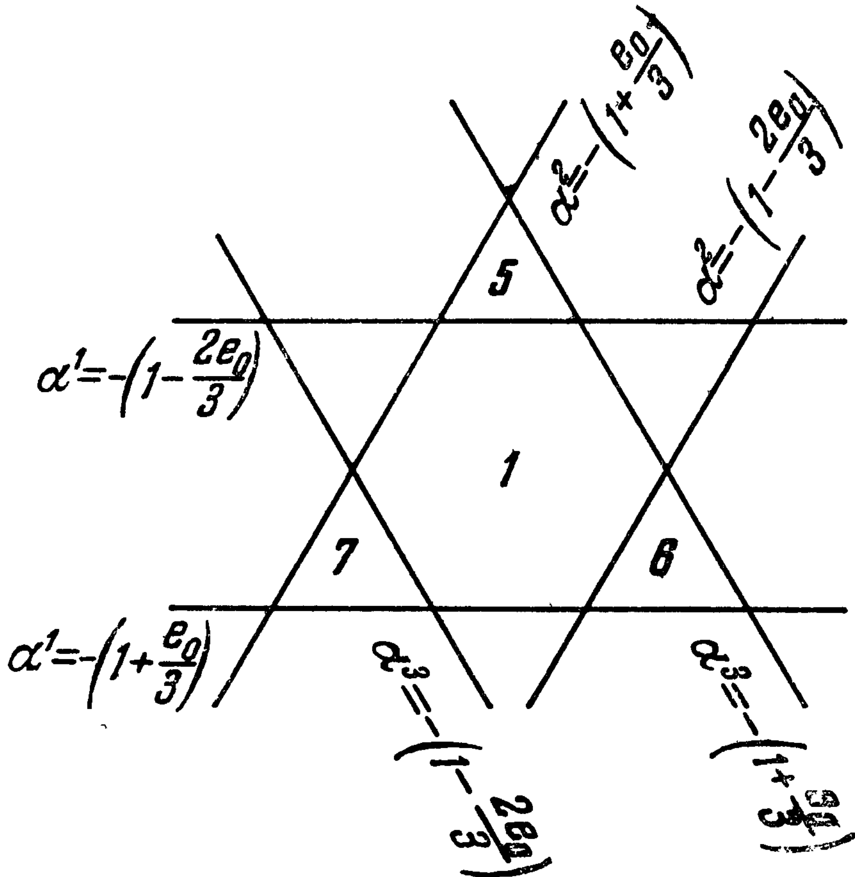



Рис. 66.

Аналог рис. 33, 51 и 64, показывающий отношения доминирования, приведен на рис. 67 (см. табл. 27).

Рассуждения п. 47.6.1, доказывающие что **V** содержит всю область *1*, можно повторить дословно. Рассмотрение рис. 67 показывает, что в фундаментальном треугольнике нет части, не доминируемой областью *1* [3]).

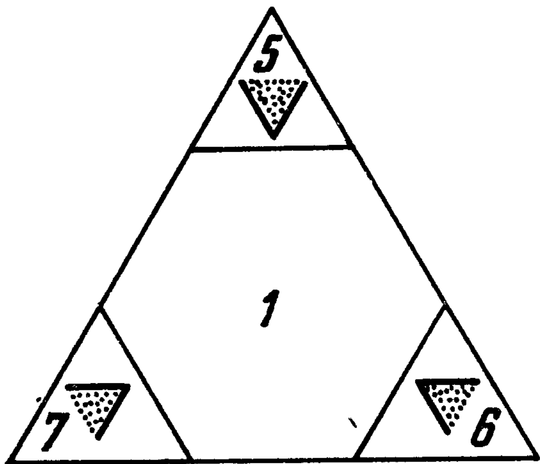



Рис. 67.

Таблица 27. К рис. 67

| Область | Эффективные двухэлементные множества $S$ | | |
|---|---|---|---|
| *1* | | | |
| *5* | | | (2,3) |
| *6* | | (1,3) | |
| *7* | (1,2) | | |

Следовательно, **V** в точности совпадает с областью *1*. Дальнейшие замечания относительно этого решения см. в п. 47.9.

[1]) Это последнее неравенство эквивалентно неравенству $e_0 \geqq 3$.

[2]) Когда $e_0 > 3$.

[3]) Остальная часть фундаментального треугольника доминируется границей области *1*, которая принадлежит *1*.

### 47.8. Интерпретация результатов. Кривые (одномерные части) в решении

**47.8.1.** Решения, полученные в ходе рассуждений пп. 47.2—47.7, заслуживают краткого исследования с целью их интерпретации. Следует обратить внимание на тот факт, что неоднократное проявление небольшого числа характерных качественных свойств весьма существенно для характеризации структуры этих решений, поскольку они отличаются от известных свойств решений существенной игры трех лиц в старой теории. Эти свойства состоят в следующем: наличие произвольных кривых, удовлетворяющих ограничению (47:6) из п. 47.5.5, при $0 < e_0 < 3$; двумерные области, которые появляются при $e_0 > 3/2$. Теперь мы приступим к их интерпретации.

Рассмотрим сначала случай (IV): $0 < e_0 < 3/2$ (в «нормальной» зоне). Рассмотрим те решения этого случая, которые обобщают недискриминирующее решение старой теории (см. 33.1.3 и (32:B) из п. 32.2.3). Такое решение изображено на рис. 61.

На этом рисунке показаны три точки °, которые образуют аналог решения в старой теории. Беря, например, нижнюю точку °, легко можно проверить, что для нее

$$\alpha^1 = -\left(1-\frac{2e_0}{3}\right) = -1+\frac{2e_0}{3}, \quad \alpha^2=\alpha^3=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{e_0}{3},$$

т. е.

$$\alpha_1 = -1+e_0, \quad \alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, эти три точки соответствуют такой ситуации, когда два игрока образовали коалицию, получив свой общий выигрыш (равный 1) и разделив его поровну между собой, но выигрыш третьего игрока не достиг своего минимального значения, равного —1, потому что он сохранил, кроме этого, общий доступный эксцесс $e_0$.

Далее, кривые, исходящие из этих точек ° (в полосе между двумя треугольниками), соответствуют ситуации, в которой общий эксцесс $e_0$ не остается в бесспорном владении проигравшего игрока. Требуя любую часть эксцесса, победившая коалиция вымогает величину, большую единицы, т. е. величину, большую той, которую она в действительности может получить в игре; иначе говоря, эта коалиция перестает быть эффективной (см. области *2*, *3*, *4* на рис. 50 и 51). Поэтому состояние дел этой коалиции, т. е. распределение в ней прибылей, определяется теперь не правилами игры, т. е. угрозами партнеров друг другу, а нормой поведения. Этот факт выражается кривой, которая составляет часть решения. Возможные угрозы партнеров друг другу все еще ограничивают в определенных пределах эту кривую (см. (47.6) из п. 47.5.5), а в остальном она совершенно произвольна. Нужно еще раз подчеркнуть, что этот произвол как раз и выражает неединственность устойчивых норм поведения, однако определенная норма поведения, т. е. решение, соответствует определенной кривой, т. е. правилу поведения в этой ситуации.

**47.8.2.** Эти рассуждения приводят нас к следующей возможной интерпретации:

(47:A) При наличии положительного эксцесса может случиться, что коалиция получит некоторую его долю сверх своего эффективного максимального выигрыша. Эта возможность возникает только благодаря норме поведения, а не физическим возможностям

в игре. Так получаемая доля эксцесса может изменяться от 0% до 100% и не определяется нормой поведения. Однако норма поведения однозначно определяет распределение между членами коалиции полученной доли эксцесса. Это правило распределения будет зависеть от того, какая именно норма поведения выбрана из множества возможных устойчивых норм поведения, и если выбранная норма поведения меняется, то это правило будет меняться в значительной степени, хотя и не совершенно произвольно.

Мы уже видели, что произвольные кривые, соответствующие (47:6), возникают во многих решениях, и в дальнейшем они будут возникать снова. Приведенная выше интерпретация, по-видимому, согласуется с ними во всех случаях.

Неопределенность распределения эксцесса между выигравшей коалицией и проигравшим игроком (в данном решении) представляет собой пример того, как некоторые социальные установления могут оставаться достаточно свободными даже в условиях фиксированного социального порядка. Наши кривые выражают дальнейший факт, состоящий в том, что в то время, как выбирается такое неопределенное распределение, некоторые игроки могут быть связаны друг с другом определенными соглашениями. (Мы увидим далее примеры этого в третьем замечании пп. 67.2.3, 67.3.3 и 62.6.2.)

### 47.9. Продолжение. Области (двумерные части) в решении

**47.9.1.** Интерпретация (47:A) из п. 47.8.2 могла бы быть опробована применением ее к обобщению дискриминирующего решения старой теории (см. п. 33.1.3 и (32:A) из п. 32.2.3), как это изображено на рис. 62. Это могло бы привести к некоторым поучительным точкам зрения, особенно по отношению к кривой в нижнем треугольнике рис. 62. Однако мы воздержимся от дальнейшего исследования этого случая.

Обратимся вместо этого к случаям (V) и (VI), именно, когда $e_0 > 3/2$ (эксцессы являются «слишком большими» в смысле пп. 44.6.1 и 45.2). Эти случаи характеризуются тем обстоятельством, что их решения содержат двумерные области. Действительно, могут встретиться две различные ситуации.

(a) Случай (V), т. е. $3/2 < e_0 < 3$. Решение **V** содержит двумерную область *1* и, кроме того, кривые, как описывалось в п. 47.8 (см. рис. 65).

(b) Случай (VI), т. е. $e_0 \geqq 3$. Единственное решение есть двумерная область *1* и больше ничего (см. рис. 67).

Появление в решении двумерных областей показывает, что норма поведения не содержит правил распределения, по крайней мере в известных пределах. В случаях (a) и (b) эти пределы определены. В случае (a) кривые из п. 47.8 появляются вне этих пределов, т. е. норма поведения все еще допускает образование некоторых коалиций; в случае (b) это уже не так.

**47.9.2.** Итак, мы видим, что «дезорганизующее» действие «слишком большого» эксцесса, т. е. поступления из внешнего источника (см. п. 44.6.1), проявляется на двух последовательных стадиях: в случае (a) он представляет некоторую центральную область, но не исключает некоторых условных коалиций; в случае (b) норма поведения больше не допускает образования коалиций, но она налагает некоторые ограничивающие принципы на распределение.

Мы видели, что эти последовательные стадии дезорганизации достигаются соответственно при $e_0 = 3/2$ и 3 [1]).

Эти рассуждения представляются чрезвычайно поучительными в качественном отношении при исследовании возможностей для норм поведения и организаций. Кажется весьма вероятным, что они станут полезным руководством для дальнейшего развития теории. Однако, следует предостеречь читателя от вывода из этих количественных результатов далеко идущих заключений. Они применяются к игре трех лиц с эксцессом [2]), которая, как показано, является простейшей моделью для их приложения. Однако, должно быть достаточно ясно, что увеличение числа участников существенно изменяет условия.

---

[1]) Заметим, что $|\Gamma|_2 = 3/2$.

[2]) А следовательно, и к разложению игры шести лиц в старой теории; см. п. 46.12.

*Глава X*

# ПРОСТЫЕ ИГРЫ

## § 48. ВЫИГРЫВАЮЩИЕ И ПРОИГРЫВАЮЩИЕ КОАЛИЦИИ И ИГРЫ, В КОТОРЫХ ОНИ ВСТРЕЧАЮТСЯ

### 48.1. Второй случай п. 41.1. Решения, принимаемые коалициями

**48.1.1.** Программа, сформулированная в п. 34.1, дает возможность произвести далеко идущие обобщения игр, соответствующих восьми вершинам куба $Q$, введенного в п. 34.2.2. Вершина $VIII$ (а также соответственно вершины $II$, $III$ и $IV$) была рассмотрена в п. 35.2.1 и явилась источником обобщения, приводящего к теории композиции и разложения, которой посвящена глава IX. Теперь мы перейдем к вершине I (а также соответственно к $V$, $VI$, $VII$), которую исследуем аналогичным образом.

Обобщая принцип, частный случай которого проявляется в этой игре, мы придем к обширному классу игр, называемых *простыми*. Оказывается, что изучение этого класса дает важную информацию, необходимую для более глубокого понимания общей теории в смысле п. 34.1.

**48.1.2.** Рассмотрим вершину $I$, которая обсуждалась в п. 35.1. Как оказалось в п. 35.1.1, эта игра обладает следующими характерными чертами. Цели игроков сводятся к образованию некоторых коалиций, состоящих либо из игрока 4 и одного его союзника, либо из всех трех остальных игроков. Любая такая коалиция является выигрывающей в полном смысле слова. Любая коалиция, которая меньше перечисленных коалиций, является полностью проигрывающей. Таким образом, количественный фактор (выражаемые характеристической функцией выигрыши) можно рассматривать здесь как нечто вторичное — основной целью является успешное образование некоторых решающих коалиций.

Все сказанное наводит на мысль, что конкретное число игроков — четыре — и конкретная схема решающих коалиций не являются существенными и что из данного примера можно извлечь и более общий принцип.

**48.1.3.** Для осуществления этого обобщения полезно следующее замечание. В нашем примере решающими коалициями (создание которых и было единственной целью игроков) оказались

(48:1) $\qquad (1, 4), (2, 4), (3, 4), (1, 2, 3).$

Теперь нам будет удобно считать выигрывающими коалициями не только эти коалиции, но и все их собственные надмножества:

(48:2) $\qquad (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4), (1, 2, 3, 4).$

Заметим, что хотя коалиции (48:2) и содержат участников, присутствие которых для победы не обязательно, но тем не менее эти коалиции — выигрывающие в том смысле, что их противники проигрывают [1]). Эти противники образуют коалиции, которые являются дополнениями к множествам (48:1), (48:2), т. е.

(48:3) $\qquad (2, 3), (1, 3), (1, 2), (4), (3), (2), (1), \varnothing.$

---

[1]) То есть эти дополнения являются линейными в смысле п. 31.1.4. См. рассуждения в п. 35.1.1.

Таким образом, (48:1) и (48:2) — это выигрывающие коалиции, а (48:3) — проигрывающие.

Легко проверить, что каждое подмножество множества $I = (1, 2, 3, 4)$ принадлежит ровно одному из этих двух классов [1]).

## 48.2. Выигрывающие и проигрывающие коалиции

**48.2.1.** Рассмотрим теперь множество $n$ игроков $I = (1, 2, \ldots, n)$. Обобщая схему п. 48.1.3, разделим семейство всех подмножеств $I$ на два таких класса $W$ и $L$, что подмножества из $W$ являются выигрывающими коалициями, а подмножества из $L$ — проигрывающими. Аналоги свойств коалиций из п. 48.1.3 можно сформулировать следующим образом.

Обозначим семейство всех подмножеств $I$ через $\overline{I}$ [2]). Сопоставление каждому подмножеству $S$ его дополнения (в $I$)

(48:4) $$S \rightarrow -S$$

есть, очевидно, взаимно однозначное отображение $\overline{I}$ на себя. Мы можем утверждать следующее:

(48:A:a) Каждая коалиция является либо выигрывающей, либо проигрывающей, но не может быть той и другой одновременно. Это значит, что множества $W$ и $L$ дополняют в $\overline{I}$ друг друга.

(48:A:b) Взятие дополнения (в $I$) переводит выигрывающие коалиции в проигрывающие и наоборот, т. е. преобразование (48:4) отображает $W$ и $L$ друг на друга.

(48:A:c) Коалиция будет выигрывающей, если выигрывающей является какая-либо ее часть; таким образом, семейство $W$ содержит вместе с каждой коалицией все ее надмножества.

(48:A:d) Коалиция является проигрывающей, если она есть часть проигрывающей коалиции; иными словами, $L$ содержит вместе с каждой коалицией все ее подмножества.

**48.2.2.** Прежде чем обсуждать понятия выигрывающих и проигрывающих коалиций в их связи с игрой, проанализируем несколько более подробно структуру условий (48:A:a) — (48:A:d).

Заметим сначала, что, хотя для истолкования игры нам необходимы оба класса коалиций $W$ и $L$, эти классы друг друга определяют. Это взаимное определение осуществляется даже двумя способами. Задавая класс $W$ (или $L$), можно для построения другого класса использовать как (48:A:a), так и (48:A:b). Иными словами, отправляясь от одного из этих классов, мы получаем другой следующим образом:

Согласно (48:A:a). Возьмем данный класс как целое и найдем его дополнение в $\overline{I}$.

Согласно (48:A:b). Возьмем отдельно все элементы данного класса и заменим каждый из них дополнением в $I$ [3]).

Следует заметить также, что если данное множество $W$ (или $L$) обладает свойством (48:A:c) или соответственно (48:A:d), то множество,

---

[1]) (1, 2, 3, 4) имеет $2^4 = 16$ подмножеств. Из них 8 входят в списки (48:1) и (48:2), а 8 — в (48:3).

[2]) Так как $I$ содержит $n$ элементов, $\overline{I}$ состоит из $2^n$ элементов.

[3]) Читатель должен заметить удивительное свойство этого условия. Мы получаем один и тот же результат независимо от того, ищем мы дополнения ко всему множеству или же отдельно к каждому его элементу.

полученное из исходного посредством (48:A:a) или (48:A:b), будет обладать свойством (48:A:c) или соответственно (48:A:d).

Замечание. Это действительно верно как для (48:A:a), так и для (48:A:b) и не зависит от того, приводят ли (48:A:a) и (48:A:b) к одному и тому же множеству. Точнее:

(48:B) Пусть множество $M$ обладает свойством (48:A:c) (соответственно (48:A:d)). Тогда оба множества, которые получены из него посредством (48:A:a) и (48:A:b) (мы не предполагаем их совпадения), обладают свойством (48:A:d) (или (48:A:c)).

Доказательство. Мы должны показать, что оба преобразования (48:A:a) и (48:A:b) переводят (48:A:c) в (48:A:d) и наоборот.

Ясно, что (48:A:c) эквивалентно следующему:

(48:A:c*) Если $S \in M$ и $T \notin M$, то $S \not\supseteq T$.

Аналогично (48:A:d) эквивалентно утверждению

(48:A:d*) Если $S \notin M$ и $T \in M$, то $S \not\subseteq T$.

Преобразование (48:A:a) меняет ролями условия принадлежности и непринадлежности множеству $M$. Следовательно, оно меняет ролями (48:A:c*) и (48:A:d*). Преобразование (48:A:b) меняет ролями символы $\subseteq$ и $\supseteq$. Следовательно, оно также меняет (48:A:c*) и (48:A:d*).

Из сказанного выше следует, что мы можем построить всю структуру, рассматривая только одно из двух множеств, $W$ или $L$. Мы должны только требовать, чтобы оба преобразования (48:A:a) и (48:A:b) приводили к одному и тому же множеству (которое будет тогда соответственно $L$ или $W$) и чтобы было удовлетворено соответствующее условие (48:A:c) или (48:A:d) (оставшееся условие выполняется автоматически).

Таким образом, мы имеем только два условия, налагаемых на $W$ или на $L$: во-первых, эквивалентность (48:A:a) и (48:A:b) и, во-вторых, (48:A:c) или (48:A:d).

Первое из этих условий означает следующее. Элементы, не принадлежащие множеству, совпадают с дополнениями (в $I$) элементов этого множества. Другими словами, из двух взаимно дополнительных (в $I$) множеств $S$ и $-S$ одно и только одно принадлежит $W$ (соответственно $L$).

Объединяя сказанное выше, мы получим следующее.

Множества $W$ ($\subseteq \overline{I}$) характеризуются следующими свойствами:

(48:W)

(48:W:a) Из двух взаимно дополнительных (в $I$) множеств $S$ и $-S$ одно и только одно принадлежит $W$.

(48:W:b) $W$ содержит все надмножества своих элементов.

Множества $L$ ($\subseteq \overline{I}$) характеризуются следующими свойствами:

(48:L)

(48:L:a) Из двух взаимно дополнительных множеств $S$ и $-S$ одно и только одно принадлежит $L$.

(48:L:b) $L$ содержит все подмножества своих элементов.

Переформулируем это еще раз.

Если для $W$ (для $L$) выполняется (48:W) (соответственно (48:L)), то (48:A:a) и (48:A:b) дают одно и то же множество $L$ (соответственно $W$). Для $W$ и $L$ выполняются (48:A:a) — (48:A:d), а для $L$ (для $W$) выполняется (48:L) (или соответственно (48:W)). Обратно, если для $W$ и $L$ выполняются (48:A:a) — (48:A:d), то для них порознь выполняются (48:W) и (48:L).

# § 49. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОСТЫХ ИГР

## 49.1. Общие понятия выигрывающих и проигрывающих коалиций

**49.1.1.** Перейдем теперь к рассмотрению связи между выигрывающими и проигрывающими коалициями в самой игре.

Итак, предположим, что задана игра $n$ лиц Г. Во всех последующих рассмотрениях удобно ограничиться старой теорией в смысле п. 30.1.1 или п. 42.4.1. Следовательно, как указано в п. 42.5.3, мы можем предполагать, что Г является игрой с нулевой или с постоянной суммой. В данном случае мы предпочитаем выбрать в качестве Г игры с нулевой суммой.

Кроме этого, никаких ограничений на Г не налагается и, в частности, не предполагается ее нормирование.

**49.1.2.** Проанализируем сначала понятие проигрывающей коалиции. Повторяя, по существу, то же, что было сказано в п. 35.1.1, можно рассуждать следующим образом [1]). Игрок $i$, когда он остается один, получает количество $\mathrm{v}((i))$. Это, очевидно, самое худшее, что может с ним произойти, так как от дальнейших потерь он может предохранить себя без чьей-либо помощи. Таким образом, мы можем считать игрока $i$, когда он получает $\mathrm{v}((i))$, полностью побежденным. Коалиция $S$ может считаться побежденной, если она получает $\sum_{i \in S} \mathrm{v}((i))$, так как в этом случае каждый игрок $i$ в ней обязательно должен получить $\mathrm{v}((i))$ [2]). Таким образом критерием побежденности коалиции является:

$$\mathrm{v}(S) = \sum_{i \in S} \mathrm{v}((i)).$$

В терминологии п. 31.1.4 это означает, что коалиция $S$ линейная (см. также сноску 3 на стр. 312).

Мы получили удовлетворительное определение семейства $L_\Gamma$ [3]) всех проигрывающих (побеждаемых) коалиций.

(49:L) $L_\Gamma$ есть множество всех линейных множеств $S\ (\subseteq I)$.

Теперь легко определить выигрывающие коалиции. Естественно принять, что они противоположны проигрывающим, т. е. что система $W_\Gamma$ всех выигрывающих коалиций определяется так:

(49:W) $W_\Gamma$ есть множество всех множеств $S\ (\subseteq I)$, для которых множество $-S$ линейно.

Из общих соображений должно быть ясно (это, впрочем, немедленно проверяется с помощью пп. 27.1.1—27.1.2), что множества $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ инвариантны относительно стратегической эквивалентности.

---

[1]) Различие состоит в том, что рассматриваемая здесь игра Г является более общей.

[2]) Так как ни один игрок $i$ не обязан соглашаться на меньшее, чем $\mathrm{v}((i))$, и вся коалиция $S$ имеет в сумме $\sum_{i \in S} \mathrm{v}((i))$, это единственный способ, которым они могут произвести разделение.

[3]) Для того чтобы избежать путаницы, мы будем пользоваться обозначениями $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ вместо $W$ и $L$ из п. 48.2.2. Различие состоит здесь в том, что п. 48.2.2 посвящен постулированию свойств, которые кажутся желательными для понятий выигрывания и проигрывания, в то время как данный анализ определяет множества, полученные из конкретной игры Г.

Эти две точки зрения сольются в (49:E) из п. 49.3.3.

**49.1.3.** Мы не имеем оснований ожидать, что определенные выше семейства $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ удовлетворяют условиям (48:A:a) — (48:A:d) (для $W$ и $L$) из п. 48.2.1. Игра в ее рассматриваемой общности не обязана принадлежать к тому простому типу, где единственной целью всех игроков является образование определенных решающих коалиций и нет никаких других мотивов, которые входят в количественное описание игры [1]. Поэтому необходимо ввести ограничения, чтобы выразить те свойства, которые мы имеем в виду. Точная формулировка этого ограничения является нашей непосредственной задачей.

Тем не менее мы начнем с определения того, в какой степени условия (48:A:a) — (48:A:d) выполняются для игры Г во всей ее общности. Мы дадим ответ в несколько шагов.

(49:A) Семейства $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ всегда удовлетворяют условиям (48:A:b) — (48:A:d).

Доказательство. (48:A:b) получается немедленно сопоставлением (49:L) и (49:W) из п. 49.1.2 [2]).

(48:A:c) и (48:A:d). Так как мы уже располагаем (48:A:b), мы можем применить (48:B) из п. 48.2.2 [3]) и, следовательно, утверждения (48:A:c) и (48:A:d) следуют друг из друга. Но (48:A:d) совпадает с (31:D:c) из п. 31.1.4, что видно из рассмотрения (49:L).

Таким образом, главное различие между нашими заданными $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ и структурой из п. 48.2 лежит в (48:A:a), т. е. в вопросе, являются ли $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ дополняющими друг друга множествами или нет. Мы можем разбить это утверждение на две части.

(49:1)

(49:1:a) $$W_\Gamma \cap L_\Gamma = \varnothing \text{ [4]},$$

(49:1:b) $$W_\Gamma \cup L_\Gamma = \overline{I} \text{ [5]}.$$

(49:1:a) возвращает нас к знакомым понятиям.

(49:B)

(49:B:a) (49:1:a) выполняется тогда и только тогда, когда игра Г существенна.

(49:B:b) Если игра Г несущественна, то $W_\Gamma = L_\Gamma = \overline{I}$ [6]).

Доказательство. (49:B:a). Отрицанием (49:1:a) является существование такого $S$, что оба множества $S$ и $-S$ линейные. В силу (31:E:b) из п. 31.1.4 это равносильно несущественности игры.

---

[1]) Наше рассмотрение игр четырех лиц содержит много иллюстраций таких мотивов, для которых в конце п. 36.1.2 дан хороший пример. Эта ситуация является действительно общей — класс игр, которые мы сейчас имеем в виду, является в определенном смысле крайним случаем (см. заключительное замечание из п. 49.3.3).

[2]) Действительно, понятие выигрывания было основано на понятии проигрывания как раз посредством операции дополнения.

[3]) Теперь понятно, почему мы отделили (48:A:a) от (48:A:b) в п. 48.2.1. В нашем случае выполняется (48:A:b), но не (48:A:a).

[4]) Может показаться странным, что условие «никакая коалиция не может быть одновременно выигрывающей и проигрывающей» должно быть сформулировано отдельно. Значение этого условия выявится в (49:B) и в сноске 6 ниже.

[5]) Утверждается, что каждая коалиция,—т. е. каждое подмножество $I$,— либо выигрывающая, либо проигрывающая. Это, конечно, тот принцип, на основании которого мы хотим ограничить Г.

[6]) Таким образом, когда игра несущественна, коалиция может быть одновременно выигрывающей и проигрывающей,— очевидно, что в этом случае нахождение ее в том или ином состоянии не играет роли.

(49:B:b). $W_\Gamma = L_\Gamma = \overline{I}$ означает, что каждое $S$ из $\overline{I}$ линейное. В силу (31:E:c) из п. 31.1.4 это равносильно несущественности.

Прежде чем перейти к (49:1:b), заметим, что $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ обладают одним свойством, которого нет среди (48:A:a) — (48:A:d):

(49:C) $L_\Gamma$ содержит пустое множество и все одноэлементные множества [1]).

Доказательство. Это утверждение совпадает с (31:D:a), (31:D:b) из п. 31.1.4.

(49:C) является действительно новым условием, т. е. оно не вытекает из (48:A:a) — (48:A:d). Мы проверим это ниже, в п. 49.2. Таким образом, в наших правдоподобных рассуждениях в п. 48.2 мы рассмотрели черты, с необходимостью присущие $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$. Мы должны, следовательно, быть уверены в том, что данные условия содержат все, что надо. Это значит, что условия (48:A:b) — (48:A:d) и (49:C) вместе с результатом (49:B) о несущественности характеризуют $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ полностью. Это будет показано ниже, в п. 49.3.

### 49.2. Особая роль одноэлементных множеств

**49.2.1.** Мы начнем с обещанного примера пары семейств $W$ и $L$, которые удовлетворяют (48:A:a) — (48:A:d) [2]), но не удовлетворяют (49:C). Фактически мы можем указать все такие пары.

(49:D) $W$ и $L$ удовлетворяют (48:A:a) — (48:A:d), но не (49:C) тогда и только тогда, когда они имеют следующий вид. $W$ есть множество всех $S$, содержащих $i_0$, а $L$ есть множество всех $S$, не содержащих $i_0$, где $i_0$ — произвольный, но фиксированный игрок.

Доказательство. Достаточность. Непосредственно проверяется, что $W$ и $L$, образованные указанным способом, удовлетворяют (48:A:a) — (48:A:d). (49:C) нарушается, так как одноэлементное множество $(i_0)$ принадлежит $W$ и не принадлежит $L$.

Необходимость. Предположим, что $W$ и $L$ удовлетворяют (48:A:a) — (48:A:d), но не удовлетворяют (49:C). Пусть $(i_0)$ — одноэлементное множество, которое не принадлежит $L$ [3]). Тогда $(i_0)$ принадлежит $W$. Каждое $S$, содержащее $i_0$, принадлежит $W$ в силу (48:A:c). Если $S$ не содержит $i_0$, то $-S$ содержит $i_0$; следовательно, в силу сказанного выше, $-S$ принадлежит $W$ и, в силу (48:A:b), $S$ принадлежит $L$.

Наконец, в силу (48:A:a), множества $W$ и $L$ не пересекаются; следовательно, $W$ совпадает с множеством тех $S$, которые содержат $i_0$, а $L$ — с множеством тех $S$, которые не содержат $i_0$.

**49.2.2.** Имеет смысл кратко прокомментировать этот результат.

$W$ и $L$, образованные в (49:D), не могут быть множествами $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ ни для какой игры, так как для них не выполняется (49:C). Это может показаться странным, так как (49:D) воплощает очень ясную идею типа «выигрывания» и «проигрывания», описанную соответствующими $W$ и $L$. Действительно, они описывают ситуацию, в которой коалиция

[1]) По смыслу нашего полного анализа игр коалиция из одного игрока должна рассматриваться как проигрывающая, так как этому игроку не удалось отыскать партнеров для коалиции.

[2]) Мы упоминали первоначально только (48:A:b) — (48:A:d), но сделанное усиление не вызывает затруднений.

[3]) Если пустое множество не принадлежит $L$, то вследствие (48:A:d) никакое множество не может принадлежать $L$, а следовательно, и любое $(i_0)$.

выигрывает, когда игрок $i_0$ принадлежит ей, и проигрывает в противном случае. Почему не может быть построена игра, соответствующая этому частному случаю?

Причина кроется в том, что в описанных условиях, «выигрывание» вообще не является мотивом образования коалиций [1]). Игрок $i_0$ выигрывает без чьей-либо помощи. Более того, в нашей терминологии это положение $i_0$ не является победой — оно есть не результат применения какой-либо стратегии [2]), а лишь фиксированное положение, предоставленное ему правилами игры [3]). Игра, в которой коалиции не приводят к преимуществу, несущественна [4]), даже если один игрок $i_0$ будет иметь в ней значительное фиксированное преимущество.

Читатель понимает, конечно, что все это только дополнительный комментарий к результатам, которые уже строго установлены выше (в (49:C) и (49:D)).

## 49.3. Характеризация семейств $W$ и $L$ в реальных играх

**49.3.1.** Мы вернемся теперь ко второму вопросу, упомянутому в конце п. 49.1.3. Пусть даны два семейства $W$ и $L$, которые удовлетворяют (48:A:b) — (48:A:d) и (49:C), а также (49:1:a) [5]). Мы хотим построить существенную игру Г, для которой $W_\Gamma = W$ и $L_\Gamma = L$. Выполняя это построение, нормируем Г с $\gamma = 1$.

Множества $S$ из $L_\Gamma$ характеризуются тем, что они линейные, т. е. тем, что $\mathrm{v}(S) = -p$, где $p$ есть число элементов в $S$ [6]). Ввиду сказанного выше множества $S$ из $W_\Gamma$ характеризуются тем фактом, что $-S$ принадлежит $L_\Gamma$, т. е. что $\mathrm{v}(-S) = -(n-p)$. Так как $\mathrm{v}(-S) = -\mathrm{v}(S)$, мы можем написать, что $\mathrm{v}(S) = n - p$.

Таким образом, мы показали, что искомые отношения $W_\Gamma = W$, $L_\Gamma = L$ эквивалентны следующему:

(49:2) Для $q$-элементного множества $S$ $(q = 0, 1, \ldots, n)$

(49:2:a) $$\mathrm{v}(S) = n - q$$

тогда и только тогда, когда $S$ принадлежит $W$, а

(49:2:b) $$\mathrm{v}(S) = -q$$

тогда и только тогда, когда $S$ принадлежит $L$.

Таким образом, нашей задачей является построение игры Г (нормированной с $\gamma = 1$) с характеристической функцией $\mathrm{v}(S)$, которая удовлетворяет (49:2).

---

[1]) Эквивалентное рассмотрение было проведено для частного случая в п. 35.1.4.

[2]) Мы всегда считали это тем же самым, что и образование соответствующих коалиций.

[3]) См. наше рассмотрение основных значений $a'$, $b'$, $c'$ в игре трех лиц в п. 22.3.4. Полное обсуждение стратегической эквивалентности (см. п. 27.1.1) было проведено в том же духе. Преимущества, подобные данному, могут быть устранены стратегически эквивалентным преобразованием, в то время как преимущества, которые обусловлены образованием коалиций,— нет.

[4]) Следовательно, для нее $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ не будут совпадать с $W$ и $L$, описанными (49:D), а будут удовлетворять условию (49:B:b).

[5]) Мы требуем выполнения (49:1:a), потому что имеем в виду главным образом существенные игры (см. (49:B)). Впоследствии, как будет показано в (49:E), мы сделаем наше обсуждение исчерпывающим.

[6]) Напоминаем, что все $\mathrm{v}((i)) = -\gamma = -1$.

**49.3.2.** Утверждение (49:2) определяет v $(S)$ для $S$ из $W$ и $L$, поэтому нам остается определить ее значения только для тех $S$, которые не принадлежат ни одному из этих множеств. Попытаемся приписать им всем значение 0. Согласно этому мы полагаем:

$$\mathrm{v}(S)=\begin{cases} n-q, \text{ если } S\in W, \\ -q, \text{ если } S\in L \end{cases}\Big\}\ S \text{ является } q\text{-элементным множеством, } q=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$
$$\qquad 0 \quad \text{в остальных случаях}^{1)}.$$

Мы докажем сначала, что v $(S)$ есть характеристическая функция, т. е. что она удовлетворяет соотношениям (25:3:a) — (25:3:c) из п. 25.3.1. Мы докажем эти условия в их эквивалентной форме (25:A) из п. 25.4.2.

Случай $p=1$ со знаком $=$. v $(I)=0$, так как, в силу (48:A:b) и (49:C), $I=-\varnothing$ принадлежит $W$.

Случай $p=2$ со знаком $=$. v $(S_1)+$ v $(S_2)=0$, если $S_1$ и $S_2$ — дополнительные множества. Действительно, если оба $S_1$ и $S_2$ не принадлежат $W$ или $L$, то v $(S_1)=$ v $(S_2)=0$. Если одно из $S_1$ и $S_2$ принадлежит $W$ или $L$, то, в силу (48:A:b), другое принадлежит соответственно $L$ или $W$. Предположим по симметрии, что $S_1\in L$, $S_2\in W$. Пусть $S_1$ имеет $q$ элементов; тогда $S_2$ имеет $n-q$ элементов. Но тогда v $(S_1)=-q$ и v $(S_2)=q$. Итак, в любом случае v $(S_1)+$ v $(S_2)=0$.

Случай $p=3$ со знаком $\leqq$. v $(S_1)+$ v $(S_2)+$ v $(S_3)\leqq 0$, где $S_1$, $S_2$, $S_3$ попарно не пересекаются, и объединение их равно $I$. Действительно, если ни одно из множеств $S_1$, $S_2$, $S_3$ не принадлежит $W$, то v $(S_1)$, v $(S_2)$, v $(S_3)\leqq 0$ [2]. Если одно из $S_1$, $S_2$, $S_3$ принадлежит $W$, то мы можем по симметрии предполагать, что это $S_3$. Следовательно, $-S_3=S_1\cup S_2$ принадлежит $L$ в силу (48:A:b), а $S_1$ и $S_2$ принадлежат $L$ в силу (48:A:d). Пусть $S_1$ имеет $q_1$ элементов, $S_2$ имеет $q_2$ элементов, а $S_3$ имеет $n-q_1-q_2$ элементов. Тогда v $(S_1)=-q_1$, v $(S_2)=-q_2$, v $(S_3)=q_1+q_2$. Итак, в любом случае v $(S_1)+$ v $(S_2)+$ v $(S_3)\leqq 0$.

**49.3.3.** Таким образом, v $(S)$ соответствует игре Γ. Установим теперь оставшиеся утверждения.

Характеристическая функция v $(S)$ (т. е. игра Γ) нормирована, и $\gamma=1$. Действительно, все v $((i))=-1$.

v $(S)$ удовлетворяет (49:2). Вследствие (48:A:b) и того, что v $(-S)=-$ v $(S)$, обе части (49:2) переходят друг в друга при замене $S$ на $-S$. Рассмотрим поэтому только вторую половину утверждения.

Если $S\in L$, то ясно, что v $(S)=-q$. Если $S$ не принадлежит $L$, то из v $(S)=-q$ следует, что $-q=0$ [3], т. е. $q=0$. Но это означает, что $S$ является пустым множеством в противоречии с (49:C).

Итак, игра Γ обладает всеми требуемыми свойствами.

Мы в состоянии теперь доказать следующее исчерпывающее утверждение:

(49:E) Для того чтобы два семейства $W$ и $L$ были семействами $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ для соответствующей игры Γ, необходимо и достаточно выполнения следующих требований:

Если игра Γ несущественна, то $W=L=\overline{I}$.

Если игра Γ существенна, то выполняются (48:A:b) — (48:A:d), (49:c), (49:1:a).

---

1) Первые два условия непротиворечивы ввиду (49:1:a).

2) Ясно, что v $(S)\leqq 0$, если $S\notin W$.

3) Так как $n-q\neq -q$, $S$ не может принадлежать $W$; следовательно, v $(S)=0$.

Доказательство в случае, когда игра Г несущественна, непосредственно следует из (49:B:b).

Пусть игра Г существенна. Необходимость была установлена в (49:A), (49:B:a) и (49:C). Достаточность вытекает из произведенного построения.

В заключение упомянем другую интерпретацию (49:2). Вспомним неравенства (27:7) из п. 27:2 (описываемые также на рис. 30), которые определяют ограничения, налагаемые на v $(S)$. Оказывается, что $W_Г$ есть множество тех $S$, для которых v $(S)$ достигает верхнего предельного значения, а $L_Г$ — множество тех $S$, для которых v $(S)$ достигает нижнего предельного значения.

## 49.4. Точное определение простоты

**49.4.** (49:E) позволяет нам дать строгое определение того класса игр, который мы упомянули в пп. 48.1.2 и 48.2.1 и который был описан более детально в п. 49.1.3. Речь идет о том классе игр, где единственной целью всех игроков является образование определенных решающих коалиций и где нет никаких других мотивов, которые входят в количественное описание игры.

При комбинировании той части (49:E), которая относится к существенным играм, с (49:1) оказывается, что формальным выражением этой идеи является

(49:1:b) $$W_Г \cup L_Г = \overline{I}.$$

Действительно, это условие выражает то, что любая данная коалиция $S$ принадлежит либо к выигрывающей, либо к проигрывающей категории, без какого-либо дальнейшего подразделения.

В соответствии с этим введем определение: существенная игра, которая удовлетворяет (41:1:b), называется *простой*.

Понятие простоты инвариантно относительно стратегической эквивалентности, поскольку таковыми являются $W_Г$ и $L_Г$.

## 49.5. Некоторые элементарные свойства простоты

**49.5.1.** Прежде чем заняться детальным математическим исследованием введенного понятия, рассмотрим еще раз заключительное замечание из п. 49.3. Смысл этого замечания состоит в том, что существенные игры — простые, если значения v $(S)$ лежат для каждого $S$ на границе [1]) области, определенной неравенствами (27:7) из п. 27.2.

Множество всех существенных игр $n$ лиц (нормированных; $\gamma = 1$) может быть представлено как геометрическая фигура, размерность которой видна из табл. 24. Говоря более точно, соответствующие неравенства определяют выпуклую многогранную область $Q_n$ в линейном пространстве соответствующей размерности, и точки этой области описывают все такие игры [2]).

**49.5.2.** Например, для $n = 3$ размерность равна 0 и область $Q_3$ есть единственная точка.

---

[1]) Эта граница состоит из двух точек: верхнего предельного значения $n - p$ и нижнего предельного значения $-p$ ($\gamma = 1$). v $(S)$ должно быть одним из этих двух значений, безразлично каким.

[2]) Читатель, который знаком с $n$-мерной линейной геометрией, заметит, что так как множество $Q_n$ определяется линейными неравенствами, оно должно быть многогранником. Рассуждения из п. 27.6 позволяют заключить, что этот многогранник выпуклый.

Для $n = 4$ размерность равна 3 и областью $Q_4$ является куб $Q$ из п. 34.2.2.

Простыми играми являются те игры, для которых мы находимся на границе каждого определяющего неравенства. Относительно выпуклой многогранной области $Q_n$ это означает, что простые игры соответствуют вершинам $Q_n$, $n = 3, 4$.

Например, для $n = 3$ множество $Q_3$ состоит из единственной точки, т. е. ничего, кроме вершины, в нем нет; поэтому существенная игра трех лиц простая [1]). Для $n = 4$ множество $Q_4$ есть куб $Q$, и простым играм соответствуют его вершины I—VIII [2]).

### 49.6. Простые игры и их $W$ и $L$. Минимальные выигрывающие коалиции $W^m$

**49.6.1.** Комбинируя (49:E) с определением простоты, мы получаем следующее.

(49:F) Для того чтобы два данных семейства $W$ и $L$ были множествами $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ для некоторой соответствующей игры Γ, необходимо и достаточно выполнения следующих условий: (48:A:a) — (48:A:d), (49:C).

То, что $S$ из (49:2) пробегает все подмножества $I$, является определяющим для простоты. Поэтому для простых игр и только для них знание $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ позволяет определить v $(S)$ при условии, что игра нормирована и $\gamma = 1$. Без последнего условия это определяет игру с точностью до стратегической эквивалентности.

Переформулируем сказанное:

(49:G) Игра Γ определяется своими $W_\Gamma$ и $L_\Gamma$ с точностью до стратегической эквивалентности тогда и только тогда, когда она простая.

Поэтому, согласно (49:F) и (49:G), теория простых игр эквивалентна теории тех пар семейств $W$ и $L$, которые удовлетворяют (48:A:a) — (48:A:d), (49:C).

**49.6.2.** При изучении описанных выше пар $W$ и $L$ следует вспомнить п. 48.2.2 и, в частности, (48:W) и (48:L), а также (49:2). Согласно этим условиям, для того чтобы определить пару $W$ и $L$, достаточно указать либо $W$, либо $L$.

Условия (48:A:a) — (48:A:d) заменяются тогда на (48:W), если используется $W$, или на (48:$L$), если используется $L$.

Условие (49:C) непосредственно относится к $L$. Можно отнести его и к $W$, применив (48:A:b); при этом упомянутые в нем множества следует заменить их дополнениями.

Ради полноты мы переформулируем (48:W) и (48:L) вместе с соответствующими формами (49:C).

---

[1]) См. также (50:A) из п. 50.1.1.

[2]) Поскольку дело касается вершин $I, V, VI, VII$, это неудивительно. Наше рассуждение началось с них в п. 48.1, и наше понятие простоты было получено из них посредством обобщения.

Появление вершин $II, III, IV, VIII$ может даже озадачить. Мы исследовали в п. 35.2 соответствующие игры как прототипы разложимости. Однако они также простые, как это будет следовать из (50:A) и начала п. 51.6.

Множества $W\ (\subseteq \overline{I})$ характеризуются следующими свойствами:

(49:W*)

(49:W*:a) Из двух дополнительных (в $I$) множеств $S$ и $-S$ одно и только одно принадлежит $W$.

(49:W*:b) $W$ содержит все надмножества своих элементов.

(49:W*:c) $W$ содержит $I$ и все $(n-1)$-элементные множества.

Множества $L\ (\subseteq \overline{I})$ характеризуются следующими свойствами:

(49:L*)

(49:L*:a) Из двух дополнительных (в $I$) множеств $S$ и $-S$ одно и только одно принадлежит $L$.

(49:L*:b) L содержит все подмножества своих элементов.

(49:L*:c) $L$ содержит пустое множество и все одноэлементные множества.

Как было указано выше, мы можем строить теорию, либо опираясь на $W$ с (49:W*), либо — на $L$ с (49:L*).

**49.6.3.** Обычному способу мышления в большей мере свойственно указывать выигрывающие коалиции, а не проигрывающие; мы будем пользоваться поэтому первой из упомянутых процедур.

В связи с этим заметим, что некоторое подмножество множества $W$ оказывается равным по важности самому $W$. Это — множество тех элементов $S \in W$, которые не имеют собственных подмножеств, принадлежащих $W$. Назовем такие $S$ *минимальными* элементами $W$ (т. е. $W_\Gamma$), а их семейство обозначим через $W^m$ (т. е. $W^m_\Gamma$).

Интуитивное значение этого понятия ясно. Введенные минимальные выигрывающие коалиции действительно являются решающими. Это — те выигрывающие коалиции, из которых ни один участник не может быть удален. (Следует вспомнить, что наше обсуждение в п. 48.1.3 началось с перечисления этих коалиций для рассматриваемой там игры.)

## 49.7. Решения простых игр

**49.7.1.** Эвристические рассмотрения, которые привели нас к понятию простых игр, делают правдоподобным то, что исследование игр, принадлежащих этой категории, может оказаться легче, чем исследование произвольных игр $n$ лиц с нулевой суммой. Для подтверждения этого мы должны исследовать, как определяются решения в простых играх. Так как мы рассматриваем теперь старую форму теории, нужно принять во внимание п. 30.1.1 [1]). Начнем с замечания, что можно ожидать значительного упрощения от того факта, что в простой игре каждое множество либо заведомо необходимо, либо заведомо не необходимо (см. п. 31.1.2).

**49.7.2.** Для того чтобы установить это утверждение, докажем сначала:

(49:H) В любой существенной игре $\Gamma$ все множества $S$ из $W_\Gamma$ заведомо необходимы, а все множества $S$ из $L_\Gamma$ заведомо не необходимы.

---

[1]) В терминах новой формы теории, введенной в п. 44.7.2 и в последующих пунктах, это означает, что мы ищем решения для $E\,(0)$, т. е. при этом эксцессы ограничены значением 0.

Роль этого ограничения станет яснее в третьем замечании в п. 51.6.

Доказательство. Если множество $S$ принадлежит $L_\Gamma$, то оно линейное и, следовательно, заведомо не необходимо в силу (31:F) из п. 31.1.5. Если $S$ принадлежит $W_\Gamma$, то $-S$ линейное и $S \neq \varnothing$ (потому что $\varnothing$ принадлежит $L_\Gamma$ и, следовательно, не принадлежит $W_\Gamma$). Поэтому $S$ заведомо необходимо в силу (31:G) из п. 31.1.5.

Мы можем теперь выполнить сформулированное выше обещание относительно простых игр; фактически это можно сделать двумя различными путями.

(49:I) В любой простой игре $\Gamma$ все множества $S$ из $W_\Gamma$ заведомо необходимы, а все другие заведомо не необходимы.

Доказательство. Комбинируем (49:H) с тем фактом, что в простой игре $L_\Gamma$ является точным дополнением $W_\Gamma$.

(49:J) В любой простой игре $\Gamma$ все множества $S$ из $W_\Gamma^m$ заведомо необходимы, а все остальные множества заведомо не необходимы [1]).

Доказательство. Мы можем заменить $W_\Gamma$ из (49:I) на его подмножество $W_\Gamma^m$, т. е. перевести все $S$ из $W_\Gamma - W_\Gamma^m$ из заведомо необходимого класса в заведомо не необходимый, используя (31:C) из п. 31.1.3. Действительно, каждое $S \in W_\Gamma$ обладает подмножеством $T \in W_\Gamma^m$.

Из этих двух критериев, (49:I) и (49:J), последний более полезен. Их важность выявится при фактическом нахождении решений простых игр [2]). Действительно, этот анализ простых игр дает возможность самого глубокого проникновения в теорию игр со многими участниками [3]).

# § 50. МАЖОРИТАРНЫЕ ИГРЫ И ГЛАВНОЕ РЕШЕНИЕ

## 50.1. Примеры простых игр. Мажоритарные игры

**50.1.1.** Прежде чем двинуться дальше, полезно привести несколько примеров простых игр, т. е. пар $W$ и $L$ из (49:F). Нам известно из п. 49.6.2, что достаточно рассмотреть $W$, характеризуемое утверждениями (49:W*).

Рассмотрим поэтому несколько возможных способов введения таких $W$, т. е. возможные определения понятия выигрывания.

Принцип мажоритарности напрашивается как один из возможных способов определения выигрывания. Естественно определить $W$ как семейство всех таких множеств $S$, которые содержат большинство игроков. Следует заметить, однако, что мы при этом должны исключить равенство: действительно, (49:W*:a) устанавливает для этого $W$, что для каждого множества $S$ либо $S$, либо $-S$ должно содержать большинство игроков; таким образом, исключается, что оба множества содержат точно половину игроков. Другими словами, общее число участников должно быть нечетным.

Таким образом, если $n$ нечетно, то мы можем определить $W$ как множество всех $S$ с числом элементов больше чем $n/2$ [4]). Простую игру [5]),

---

[1]) Сравнение (49:I) и (49:J) показывает, что $S$ из $W_\Gamma - W_\Gamma^m$ одновременно заведомо необходимо и заведомо не необходимо. Это — другая иллюстрация замечания в конце замечания на стр. 293.

[2]) См. пп. 50.5.2 и 55.2.

[3]) См. пп. 55.2 — 55.11 и, в частности, общие замечания в § 54.

[4]) Так как минимальное целое число, большее чем $n/2$, есть $(n+1)/2$ ($n$ нечетно), мы можем говорить, что $S$ должно иметь элементов не меньше чем $(n+1)/2$.

[5]) Точнее, класс стратегически эквивалентных игр (с $n$ участниками).

которая таким образом получается, будем называть *чисто мажоритарной игрой*.

Наименьшим $n$, для которого такая игра может быть построена [1]), является 3. Известно, что существует только одна существенная игра 3 лиц, и для нее $W$ состоит из двух- и трехэлементных множеств, т. е. множеств с числом элементов, бо́льшим чем 3/2. Таким образом, мы видим:

(50:A) Единственная существенная игра трех лиц является простой; это — чисто мажоритарная игра трех участников.

Для дальнейших возможных $n$ (т. е. $n = 5, 7, \ldots$) чисто мажоритарная игра оказывается лишь одной из многих возможностей.

**50.1.2.** Чисто мажоритарная игра возможна только при нечетных $n$; но простые игры существуют также и для четных $n$. Действительно, для нашего прототипа простой игры (см. пп. 48.1.2, 48.1.3) было $n = 4$.

Однако понятие мажоритарности легко распространяется на случай четных $n$. Введем для этого понятие *взвешенного большинства*. Пусть каждому игроку $1, \ldots, n$ приписан *численный вес*, скажем соответственно $w_1, \ldots, w_n$. Определим $W$ как множество всех таких $S$, которые содержат бо́льшую часть общего веса. Это означает следующее:

(50:1) $$\sum_{i \in S} w_i > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i,$$

или, что то же самое,

(50:2) $$\sum_{i \in S} w_i > \sum_{i \in -S} w_i.$$

Мы должны снова позаботиться об исключении ничейного случая. Однако благодаря большей общности нашего данного построения лучше непосредственно перейти к полному рассмотрению (49:W*).

**50.1.3.** Рассмотрим, следовательно, какие ограничения накладывает (49:W*) на числа $w_1, \ldots, w_n$.

(49:W*:a). Так как мы можем выразить принадлежность $S$ к $W$ посредством неравенства (50:2), множество $-S$ будет принадлежать $W$, если

(50:3) $$\sum_{i \in S} w_i < \sum_{i \in -S} w_i.$$

Итак, (49:W*: a) означает, что выполняется одно и только одно из двух соотношений (50:2) и (50:3). Это означает, очевидно, что никогда не выполняется

(50:4) $$\sum_{i \in S} w_i = \sum_{i \in -S} w_i$$

или, в эквивалентной форме, что никогда не выполняется

(50:5) $$\sum_{i \in S} w_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

(49:W*:b). Используя определение $W$ в форме (50:1), мы видим, что это условие выполняется, если все $w_i \geqq 0$ [2]).

---

[1]) То есть число, которое нечетно и для которого игра может быть существенной.

[2]) Это, конечно, вполне правдоподобное условие. Удивительно здесь то, что мы не требуем, чтобы $w_i > 0$, т. е. что мы можем допустить существование нулевых весов.

(49:W*:c). Снова используя (50:1), мы видим, что $I = (1, 2, \ldots, n)$ принадлежит $W$. Для произвольного $n$ — 1-элементного множества $S = I - (i_0)$ условие (50:1) означает, что

$$w_{i_0} < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

Суммируя сказанное выше, мы получаем

(50:B) Веса $w_1, \ldots, w_n$ могут использоваться в (50:1) или (50:2) для задания $W$, удовлетворяющего (49:W*), тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(50:B:a) Для всех $i_0 = 1, \ldots, n$

$$0 \leqq w_{i_0} < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i;$$

(50:B:b) Для всех $S \subseteq I$

$$\sum_{i \in S} w_i \neq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

Иными словами, игрок всегда имеет неотрицательный вес, который никогда не достигает половины общего веса и не превосходит ее; никакая комбинация игроков не обладает точно половиной общего веса [1]).

Простую игру, которая получена на основе такого $W$ [2]), будем называть *взвешенной мажоритарной игрой* ($n$ участников с весами $w_1, \ldots, w_n$). Мы будем также обозначать эту игру символом $[w_1, \ldots, w_n]$.

Таким образом, чисто мажоритарной игре приписывается символ

$$[1, \ldots, 1].$$

Следует заметить, что игра четырех лиц, соответствующая вершине $I$ куба $Q$, которая рассматривалась в пп. 48.1.2 и 48.1.3, может быть описана как взвешенная мажоритарная игра. Действительно, принцип выигрывания, найденный в п. 48.1.3, может быть выражен тем, что игрокам 1, 2, 3 придается один и тот же вес, а игроку 4 двойной вес. Это значит, что такой игре следует приписать символ [1, 1, 1, 2].

## 50.2. Однородность

**50.2.1.** Введение мажоритарных игр и описывающих их символов $[w_1, \ldots, w_n]$ является известным шагом в направлении количественной (числовой) классификации и характеризации простых игр. Есть все основания думать, что полное осуществление такой программы было бы желательным. Простота была определена в комбинаторных, теоретико-множественных терминах, и следует ожидать, что числовая характеризация облегчит обращение с ними. Такая характеризация обычно облегчает более исчерпывающее, количественное понимание рассматриваемого понятия. Кроме того, в стоящей перед нами проблеме мы в конце концов ищем решения, которые определяются численно, и поэтому представляется вероятным, что числовая характеризация будет соответствовать им более прямо, чем комбинаторная.

[1]) Первое требование устраняет трудности из п. 49.2, второе — исключает равенство.

[2]) Точнее, класс стратегически эквивалентных игр.

Однако сделанный нами первый шаг еще далек от осуществления этого перехода.

С одной стороны, простой игре может соответствовать более одного символа $[w_1, \ldots, w_n]$. В действительности, каждой простой игре, которой соответствует хотя бы один символ, соответствует бесконечно много символов [1]. С другой стороны, мы не знаем, всем ли простым играм соответствуют такие символы [2].

Мы начнем с рассмотрения первого пробела. Так как одной простой игре могут соответствовать различные символы $[w_1, \ldots, w_n]$, некоторая естественная процедура должна выделять какой-нибудь конкретный символ среди остальных по какому-нибудь удобному принципу выбора. Желательно определить в этом принципе такие требования, которые повышали бы значимость и полезность компонент $w_1, \ldots, w_n$.

Начнем с нескольких предварительных рассмотрений. Условия (50:1) и (50:2) приводят к рассмотрению разности

(50:6) $$a_S = 2\sum_{i \in S} w_i - \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i \in S} w_i - \sum_{i \in -S} w_i.$$

Это число $a_S$ выражает, насколько коалиция $S$ перевешивает своих противников, сколь велико ее взвешенное большинство. Непосредственно можно получить следующие свойства:

(50:C) $$a_S = -a_{-S}.$$

Доказательство. Воспользуемся последней формой (50:6) для $a_S$.

(50:D:a) $a_S > 0$ тогда и только тогда, когда $S$ принадлежит $W$.

(50:D:b) $a_S < 0$ тогда и только тогда, когда $S$ принадлежит $L$.

50:D:c) $a_S = 0$ невозможно.

Доказательство. (50:D:a) справедливо по определению. (50:D:b) вытекает непосредственно из (50:D:a) и (50:C). (50:D:c) следует непосредственно из (50:D:a) и (50:D:b), так как $W$ и $L$ исчерпывают все возможные $S$. Оно также совпадает с (50:B:b).

**50.2.2.** Теперь естественно попытаться установить веса $w_1, \ldots, w_n$ так, чтобы количество $a_S$, которое гарантирует победу, было одним и тем же для каждой выигрывающей коалиции. Нерационально было бы, однако, требовать этого фактически для всех $S$ из $W$. Если $S$ принадлежит $W$, то любое его надмножество $T$ также принадлежит $W$, и для них возможно $a_T > a_S$ [3]. Так как такое $T$ содержит участников, которые для выигрыша не обязательны, представляется естественным ими пренебрегать. Это значит, что мы требуем постоянства $a_S$ только для тех $S$ из $W$, которые не являются собственными надмножествами других элементов из $W$. В терминологии, введенной в п. 49.6.3, это выглядит так: требуется, чтобы $a_S$ было постоянным для минимальных элементов $W$, т. е. для элементов $W^m$.

Согласно этому мы вводим определение.

(50:E) Веса $w_1, \ldots, w_n$ называются однородными, если $a_S$ из (50:6) имеют общее значение, обозначаемое через $a$ для всех $S$ из $W^m$.

---

[1] Очевидно, что достаточно малые изменения $w_i$ не нарушают справедливости (50:1), в частности, потому, что (50:5) исключается по (50:B:b).

[2] Мы увидим в п. 53.2, что некоторым простым играм не соответствуют символы.

[3] Так, например, $T = I \supseteq S$, $a_I > a_S$, кроме случая, когда $w_i = 0$ для $i$, не принадлежащих $S$.

Всегда, когда (50:E) выполняется, мы будем вместо $[w_1, \ldots, w_n]$ писать $[w_1, \ldots, w_n]_h$.

Ясно, что $a > 0$. Общий положительный множитель не влияет на существенные свойства $w_1, \ldots, w_n$; поэтому в случае однородности мы можем воспользоваться этим для окончательной нормировки, полагая $a = 1$.

В заключение заметим, что игры, упомянутые в конце п. 50.1.3, однородны и нормированы с $a = 1$. Это — чисто мажоритарные игры нечетного числа участников $[1, \ldots, 1]$ и игра, соответствующая вершине $I$ куба $Q$ $[1, 1, 1, 2]$. Эти игры могут быть соответственно записаны как $[1, \ldots, 1]_h$ и $[1, 1, 1, 2]_h$. Действительно, читатель легко проверит, что в обоих случаях $a = 1$ для всех $S \in W^m$.

## 50.3. Более прямое использование понятия дележа при образовании решений

**50.3.1.** Однородный случай, введенный выше, тесно связан с обычным экономическим понятием дележа. Сейчас мы предполагаем это показать.

Скажем более точно. Мы определили в п. 30.1.1 общее понятие дележей и построили с его помощью понятие решений. При образовании их мы руководствовались теми же принципами оценки, которые используются в экономике, и поэтому следует ожидать некоторой связи с обычным экономическим понятием дележа. Однако наши рассмотрения увели нас довольно далеко от этого понятия. Особенно это относится к тем построениям, которые были необходимы, когда мы обнаружили, что именно множества дележей, т. е. решения, а не отдельные дележи должны быть предметом нашей теории. Теперь окажется, что для некоторых простых игр связь с обычным экономическим понятием дележа может быть установлена несколько более прямо. Можно сказать, что для этих игр частного вида связь между таким примитивным понятием и нашими решениями может быть установлена непосредственно. Фактически это даст простой метод для нахождения некоторого частного решения в каждой из этих игр.

**50.3.2.** Эти два понятия решения, т. е. эти две процедуры, эффективно дополняют друг друга. Обычное экономическое понятие дает нам полезные предположения относительно вида некоторого решения. После этого можно воспользоваться математической теорией для определения искомого решения и пополнения требований, формулируемых при традиционном подходе (см. п. 50.4, с одной стороны, и п. 50.5 и следующие,— с другой).

Эти рассмотрения служат также и другой цели. Они с большой ясностью выявляют ограничения обычного подхода. Обычный подход приложим в этой форме только для простых игр, но даже и здесь не всегда и не без помощи нашей математической теории. Кроме того, он не выявляет всех решений в тех играх, к которым он применяется. (Дальнейшие замечания по этому поводу встретятся в ходе обсуждений и, в частности, в п. 50.8.2.)

В связи с этим мы снова подчеркиваем, что любая игра является моделью возможной социальной или экономической организации и любое решение является возможной устойчивой нормой поведения в ней. Как игры, так и решения не исчерпываются упомянутым методом, т. е. неулучшенным экономическим понятием дележа. Будет показано, что те простые игры, которые могут быть обработаны этим частным методом, тесно связаны с однородными взвешенными мажоритарными играми, обобщением которых они являются.

### 50.4. Обсуждение описанного прямого подхода

**50.4.1.** Рассмотрим простую игру Γ, которую мы будем считать нормированной с $\gamma = 1$, но на которую мы не будем налагать никаких дальнейших ограничений. Попытаемся рассмотреть ее с точки зрения обычных экономических идей, не привлекая нашей систематической теории.

Ясно, что в этой игре единственной целью игроков является образование выигрывающей коалиции, и как только минимальная коалиция такого сорта образована, у ее участников не будет никаких мотивов привлекать дополнительных членов. Поэтому можно предположить, что минимальные выигрывающие коалиции $S \in W^m$ — это как раз те структуры, которые следует создавать. Следовательно, правдоподобно предположение, что судьба игрока предоставляет ему только две существенные альтернативы: либо ему удается присоединиться к одной из желательных коалиций, либо нет. В последнем случае он проигрывает и потому получает сумму $-1$. В первом случае он преуспевает, и согласно обычным представлениям нужно приписать этому успеху некоторое численное значение. Это значение может оказаться различным для различных игроков. Для игрока $i$ мы обозначим его через $-1 + x_i$, так что $x_i$ есть разность между проигрышем и успехом для игрока $i$ [1]).

**50.4.2.** Сформулируем теперь ограничения, которые должны быть наложены на эти $x_1, \ldots, x_n$ в ходе обычного экономического рассмотрения.

Первое. Для каждого значения $x_i$ необходимо

(50:7) $$x_i \geqq 0.$$

Второе. Если окажется, что никакая минимальная выигрывающая коалиция не содержит некоторого игрока $i$, то для него не существует никаких других альтернатив, кроме значения $-1$, и поэтому мы можем никакого $x_i$ для него не определять [2]).

Третье. Если минимальная выигрывающая коалиция $S$ становится эффективной, то дележ между игроками должен быть следующим. Каждый игрок, не принадлежащий $S$, получает $-1$, а каждый игрок из $S$ получает $-1 + x_i$. Сумма этих величин должна равняться 0. Это означает, что

$$0 = \sum_{i \notin S} (-1) + \sum_{i \in S} (-1 + x_i) = -n + \sum_{i \in S} x_i,$$

т. е.

(50:8) $$\sum_{i \in S} x_i = n.$$

В нашей системе обозначений это распределение описывается вектором $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ с компонентами

$$\alpha_i = \begin{cases} -1, & \text{если } i \text{ не принадлежит } S, \\ -1 + x_i, & \text{если } i \text{ принадлежит } S. \end{cases}$$

Обозначим этот вектор через $\vec{\alpha}^S$. Наше первое условие и данное условие фактически устанавливают только то, что $\vec{\alpha}^S$ есть дележ в смысле п. 30.1.1.

---

[1]) Мы предполагаем здесь, что существует только один способ выигрывания, т. е. что разность $x_i$ одна и та же, к какой бы минимальной выигрывающей коалиции игрок ни присоединился. Это правдоподобно, так как в простой игре существует только один вид успеха и каждая коалиция является либо выигрывающей, либо проигрывающей.

[2]) Для действительно актуальных простых игр таких $i$ не существует, т. е. каждый игрок принадлежит к некоторой минимальной выигрывающей коалиции. См. первое рассмотрение в п. 51.7.1 и (51:O) в 51.7.3.

**50.4.3.** Продолжая обычную линию рассуждений, мы хотим теперь определить числа $x_1, \ldots, x_n$ из равенств и неравенств, задаваемых тремя сделанными выше ограничениями. Выполняя это, нужно рассмотреть еще один вопрос. Мы установили в третьем замечании, что $S$ должно быть минимальным выигрывающим подмножеством, т. е. принадлежать $W^m$. Однако уместен вопрос, все ли множества $S$ из $W^m$ могут быть при этом использованы.

Действительно, настоящая процедура есть не что иное, как обычная процедура определения цен для дополнительных товаров посредством их различного использования [1]). Здесь эти альтернативные использования могут быть более многочисленными, чем различные рассматриваемые товары, т. е. $W^m$ может иметь больше элементов, чем $n$ [2]). В такой ситуации можно ожидать, что некоторые варианты не прибыльны, и включать их в третье ограничение не требуется. В действительности мы уже использовали этот принцип, беря $S$ только из $W^m$, а не произвольно из $W$, потому что $S$ из $W - W^m$ (выигрывающие коалиции, отличные от минимальных), явно расточительны. Есть ли у нас гарантия, что все $S$ из $W^m$ должны рассматриваться как эквивалентные по прибыльности? Они, очевидно, не расточительны в упомянутом выше грубом смысле; никакого участника в $S$, принадлежащем $W^m$, нельзя удалить, не вызвав поражения. Но, как показывают многочисленные экономические примеры, неприбыльность может возникнуть и менее прямыми путями Таким образом, остается открытым вопрос, о каких $S$ из $W^m$ должна все-таки идти речь в третьем ограничении.

Ясно, однако, что если $S$ из $W^m$ не включено в рассмотрение, т. е. если для него не выполняется

$$\sum_{i \in S} x_i = n, \tag{50:8}$$

то оно заведомо неприбыльно, т. е. в (50:8) мы должны иметь знак $>$ вместо $=$:

$$\sum_{i \in S} x_i > n. \tag{50:9}$$

Таким образом, возникает вопрос: по какому именно критерию мы определяем, какие $S$ попадают под третье замечание, т. е. для каких $S$ должно выполняться (50:8). Обозначим множество их через $U$ ($\subseteq W^m$). Тогда (50:9) должно выполняться для $S$ из $W^m - U$. Таким образом, задача состоит в определении множества $U$ [3]).

## 50.5. Связь с общей теорией. Точная формулировка

**50.5.1.** Вместо попыток словесного описания посвятим этот пункт возврату к нашей систематической теории. Из утверждения, сделанного в п. 50.4, мы сохраним следующее. Рассмотрим систему минимальных выигрывающих коалиций, т. е. множество $U \subseteq W^m$ и числа $x_i$. Составим, как в п. 50.4, дележ

$$\vec{\alpha}^S = \{\alpha_1^S, \ldots, \alpha_n^S\},$$

---

[1]) В этом случае больше подходит пример услуг. Предметом рассмотрения является здесь общая услуга игрока $i$ внутри коалиции, к которой он присоединился.

[2]) См. четвертое замечание в 53.1.

[3]) Было бы грубой ошибкой пытаться определить $W^m - U$ (и, таким образом, $U$) через (50:9). Это условие не ограничивает достаточным образом $x_1, \ldots, x_n$, а определение этих чисел и есть подлинная цель!

где

$$\alpha_i^S = \left\{ \begin{array}{ll} -1, & \text{если } i \text{ не принадлежит } S, \\ -1 + x_i, & \text{если } i \text{ принадлежит } S, \end{array} \right\} S \in U.$$

То, что этот вектор $\vec{\alpha}^S$ при $S \in U$ действительно является дележом, выражается, как мы знаем, условиями из п. 50.4:

(50:7) $$x_i \geqq 0,$$

(50:8) $$\sum_{i \in S} x_i = n, \quad S \in U.$$

Образуем множество **V** таких $\vec{\alpha}^S$, где $S \in U$. Мы будем определять, подходят ли эти $U$ и $x_i$, определяя, является ли **V** решением в смысле п. 30.1.1.

Далее мы увидим, что результат, который при этом получается, может быть сформулирован словесно и окажется вполне разумным с обычной экономической точки зрения. Однако может возникнуть вопрос, можно ли четко и недвусмысленно установить этот результат обычными процедурами. Это может служить иллюстрацией того, как наша математическая теория служит путеводителем даже для чисто словесных рассуждений при обычном экономическом подходе (см. п. 50.7.1).

**50.5.2.** Мы приступаем к исследованию, является ли **V** решением.

Определим сначала, когда некоторый данный дележ $\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ доминируется данным $\vec{\alpha}^T$, где $T \in U$. Так как игра простая, можно предполагать, что множество $S$ из п. 30.1.1 для этого доминирования принадлежит $W$ (или даже $W^m$, если учесть (49:I) или (49:J) из п. 49.7.2). Для каждого $i \in S$ должно быть $\alpha_i^T > \beta_i \geqq -1$; для каждого $i$, не принадлежащего $T$, будет $\alpha_i = -1$. Следовательно, $S \subseteq T$. Далее, $T \in U \subseteq W^m$, а $S \in W$; поэтому из $S \subseteq T$ следует $S = T$. Итак, мы видим: множество $S$ из п. 30.1.1 для этого доминирования должно быть нашим $T$. Это $T$ здесь можно использовать, так как оно принадлежит $U \subseteq W^m \subseteq W$ (см. выше). Следовательно, доминирование $\vec{\alpha}^T \succ \vec{\beta}$ означает $\alpha_i^T > \beta_i$ для $i \in T$, т. е.

(50:10) $$\beta_i < -1 + x_i \quad \text{для } i \in T.$$

Обозначим для любого дележа $\vec{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ множество всех таких $i$, что

(50:11) $$\beta_i \geqq -1 + x_i,$$

через $R(\vec{\beta})$. Тогда (50:10) устанавливает, что множества $R(\vec{\beta})$ и $T$ не пересекаются. Другим способом записи этого будет

(50:12) $$-R(\vec{\beta}) \supseteq T.$$

Повторяем:

(50:F) $\vec{\alpha}^T \succ \vec{\beta}$ эквивалентно (50:12).

Из этого мы можем вывести следующее:

(50:G) Пусть $U^*$ — множество всех $R$ $(\subseteq I)$, которые содержат некоторое подмножество, принадлежащее $U$. Пусть $U^+$ — множество всех $R$ $(\subseteq I)$, для которых $-R$ не принадлежит $U^*$. Тогда $\vec{\beta}$ не доминируется никаким элементом из **V** тогда и только тогда, когда $R(\vec{\beta})$ принадлежит $U^+$.

Доказательство. То, что $\vec{\beta}$ доминируется некоторым элементом из **V**, т. е. некоторым $\vec{\alpha}^T$, где $T \in U$, означает, что (50:12) выполняется для некоторого $T \in U$. Это равносильно тому, что $-R(\vec{\beta}) \in U^*$, т. е. что $R(\vec{\beta}) \notin U^+$.

Следовательно, $R(\vec{\beta})$ принадлежит $U^+$ тогда и только тогда, когда $\vec{\beta}$ не доминируется никаким элементом из **V**.

**50.5.3.** Прежде чем перейти к дальнейшему, рассмотрим четыре простых свойства множества $U^+$ из (50:G).

(50:H:a) $U^* = U^+ = W$, если $U = W^m$.

Доказательство. Предположим, что $U = W^m$. Тогда $U^*$ состоит из тех множеств, которые содержат подмножества, принадлежащие $W^m$, т. е. минимальные выигрывающие подмножества. Следовательно, $U^* = W$. Операция, которая приводит в (50:G) от $U^*$ к $U^+$, является комбинацией преобразований (48:A:a) и (48:A:b) из п. 48.2.1. Мы уже тогда заметили, что, когда эти два преобразования применяются к $W$, они компенсируют друг друга. Следовательно, $U^* = W$ дает $U^+ = W$.

(50:H:b) $U^*$ — монотонная, а $U^+$ — антимонотонная операция. Иными словами, из $U_1 \subseteq U_2$ следует $U_1^* \subseteq U_2^*$ и $U_1^+ \supseteq U_2^+$.

Доказательство. Достаточно вспомнить определения из (50:G), чтобы увидеть, что $U_1 \subseteq U_2$ влечет $U_1^* \subseteq U_2^*$, а это в свою очередь влечет $U_1^+ \supseteq U_2^+$.

(50:H:c) Для всех наших $U \subseteq W^m$ выполняется $U^* \subseteq W \subseteq U^+$.

Доказательство. Комбинируем (50:H:a) и (50:H:b) (подставляя $U$, $W^m$ вместо $U_1$, $U_2$).

(50:H:d) $U^*$ и $U^+$ содержат все надмножества своих элементов.

Доказательство. Для $U^*$ это очевидно. Рассматриваемое свойство эквивалентно сформулированному в (48:A:c) из п. 48.2.1. (Берем $W$ вместо $U^*$, $U^+$.) Далее, операция, которая приводит в (50:G) от $U^*$ к $U^+$, является комбинацией преобразований (48:A:a) и (48:A:b) из п. 48.2.1 (см. доказательство (50:H:a)). Применение (48:B) из п. 48.2.2 к этим двум преобразованиям показывает, что рассматриваемое свойство сохраняется при переходе от $U^*$ к $U^+$.

**50.5.4.** Заметим, что $U^*$ и $U^+$ допускают простую словесную интерпретацию. Если мы знаем о принадлежащих $U$ коалициях только то, что они выигрывающие, то о каких коалициях можно сказать, что они заведомо выигрывающие, а о каких, — что они не являются заведомо проигрывающими?

Первыми являются такие коалиции, которые имеют подмножества, принадлежащие $U$, т. е. коалиции из $U^*$. Заведомо проигрывающими будут дополнения к ним, т. е. коалиции, не принадлежащие $U^+$. Следовательно, $U^*$ есть множество первых упомянутых коалиций, а $U^+$ — множество вторых.

Теперь смысл утверждений (50:H:a) — (50:H:c) становится ясным. Для $U = W^m$ все очевидно. Заведомо выигрывающие коалиции в точности

совпадают с теми, которые не являются заведомо проигрывающими, и они образуют множество $W$. По мере того как $U$ убывает, пробел между этими множествами коалиций расширяется. Первое множество убывает как подмножество $W$, а второе возрастает как надмножество $W$.

Утверждение (50:H:d) в равной степени правдоподобно.

## 50.6. Переформулирование полученного результата

**50.6.1.** Утверждение (50:G) из п. 50.5.2 позволяет нам установить следующее:

(50:I) **V** является решением в том и только в том случае, если $R(\vec{\beta})$ принадлежит $U^+$ тогда и только тогда, когда $\vec{\beta}$ принадлежит **V**.

Итак, нам только остается решить, когда выполняется (50:I). С этой целью рассмотрим $R \in U^+$ и определим $\vec{\beta}$, для которого $R(\vec{\beta}) = R$.

Рассмотрим три возможности:

(50:13) $$\sum_{i \notin R} (-1) + \sum_{i \in R} (-1 + x_i) \gtreqless 0,$$

т. е.

(50:14) $$\sum_{i \in R} x_i \gtreqless n.$$

Если существует $\vec{\beta}$, для которого $R(\vec{\beta}) = R$, то мы имеем

(50:15) $$0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \geqq \sum_{i \notin R} (-1) + \sum_{i \in R} (-1 + x_i),$$

т. е. имеем в (50:13) и (50:14) знак $\leqq$. Поэтому $>$ в (50:13), (50:14) исключает существование какого-либо $\vec{\beta}$ с $R(\vec{\beta}) = R$. Поэтому впредь можно не рассматривать множества $R$ из $U^+$ с $>$ в (50:13) и (50:14). Рассмотрим с другой стороны $R \in U^+$ с $<$ в (50:13) и (50:14). Тогда существует бесконечно много способов выбора $\vec{\beta}$ с $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$ и

$$\beta_i \geqq \begin{cases} -1, & \text{если } i \notin R, \\ -1 + x_i, & \text{если } i \in R. \end{cases}$$

Для всех них должно быть $R(\vec{\beta}) \supseteq R$. Следовательно, они принадлежат **V** в силу (50:H:d). Так как множество **V** конечно, эти $\vec{\beta}$ не могут все принадлежать **V**. Мы получили противоречие. Оно означает, что множества $R \in U^+$ с $<$ в (50:13) и (50:14) не могут существовать.

**50.6.2.** Остается рассмотреть множества из $U^+$, которые имеют в (50:13) и (50:14) знак $=$. Согласно сказанному выше, эти множества должны представлять в точности $\vec{\beta} \in$ **V**.

Если $\vec{\beta} \in$ **V**, т. е. если $\vec{\beta} = \vec{\alpha}^T$, где $T \in U$, то мы имеем следующую ситуацию: $R(\vec{\beta})$ есть $T$ плюс множество тех $i$, для которых $x_i = 0$. $T$ принадлежит $U \subseteq U^* \subseteq U^+$ (второе включение следует из (50:H:c)); следовательно, $R(\vec{\beta})$ принадлежит $U^+$. Также

$$\sum_{i \in R(\vec{\beta})} x_i = \sum_{i \in T} x_i = n.$$

Итак, мы имеем в (50:13) и (50:14) знак $=$. Следовательно, все $\vec{\beta}$ из **V** удовлетворяют этому условию.

Обратно. Рассмотрим $R \in U^+$ с $=$ в (50:13), (50:14). Добавление к $R$ всех тех $i$, для которых $x_i = 0$, не влияет ни на факт принадлежности $R$ к $U^+$ (по 50:H:d), ни на равенство (50:14). Поэтому мы можем предполагать, что $R$ содержит все эти $i$.

Если теперь для дележа $\vec{\beta}$ имеет место $R(\vec{\beta}) = R$, то $\beta_i \geqq -1 + x_i$, для $i \in R$. Но всегда $\beta_i \geqq -1$. Так как $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$, это влечет

(50:16) $$\beta_i = \begin{cases} -1, & \text{если } i \notin R, \\ -1 + x_i, & \text{если } i \in R. \end{cases}$$

Наоборот, из (50:16) следует, что $\vec{\beta}$ является дележом, для которого $R(\vec{\beta}) = R$. Следовательно, наше требование в этом случае состоит в том, что $\vec{\beta}$ из (50:16) должно быть некоторым $\vec{\alpha}^T$, где $T \in U$. Это означает, что $T$ и $R$ различаются только элементами $i$, для которых $x_i = 0$. Это свойство нечувствительно по отношению к нашей начальной модификации $R$, к включению всех таких $i$ в $R$.

Подведем итоги.

(50:J) Для того чтобы **V** было решением, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее.

Назовем игрока $i$ безразличным, если $x_i = 0$[1]. Тогда мы имеем

(50:8*) $$\sum_{i \in T} x_i = n$$

для множеств $T$ из $U$ и также для всех тех множеств, которые отличаются от них только безразличными элементами.

Кроме того, мы должны потребовать

(50:9*) $$\sum_{i \in T} x_i > n$$

для всех остальных $T$ из $U^+$.

При использовании этого результата нужно сначала выбрать множество $U \subseteq W^m$, затем попытаться определить $x_i$ из (50:8*) и, наконец, проверить, удовлетворяют ли эти $x_i$ неравенствам

(50:7) $$x_i \geqq 0$$

и (50:9*).

---

[1]) Эти $i$ вносят некоторое усложнение, которое в дальнейшем усугубляется тем фактом, что мы не располагаем примерами игр, в которых они действительно присутствовали бы. Может оказаться, что они никогда не существуют; безразличный игрок $i$ характерен тем, что он принадлежит некоторой минимальной выигрывающей коалиции, но никогда не получает доли в выигрыше.

В такой ситуации находится исключенный игрок в дискриминирующем решении игры трех лиц (см. (32:A) в п. 32.2.3 с $c = 1$). Но там решение было бесконечным множеством, тогда как наше **V** должно быть конечным.

Было бы интересным решить этот существенный вопрос; во всяком случае, мы должны здесь предусмотреть существование безразличных $i$ во избежание потери общности или строгости.

### 50.7. Интерпретация полученного результата

**50.7.1.** Результат (50:J) позволяет сформулировать обещанное в п. 50.5.1 словесное утверждение. Эта формулировка такова.

Решение **V** находится путем выбора произвольного множества $U$ тех минимальных выигрывающих коалиций (т. е. $U \subseteq W^m$), которые рассматриваются как прибыльные. Числа $x_i$ должны удовлетворять соответствующим уравнениям (50:8*). Однако после этого мы должны проверить, что некоторые другие коалиции заведомо неприбыльны в смысле (50:9*). Это требуется не только для тех коалиций, которые известны как выигрывающие (т. е. $W$), но и для всех тех, про которые нельзя сказать, что они определенно проигрывают одной из коалиций из $U$ (т. е. $U^+$), исключая, конечно, коалиции из самого $U$ [1]).

Читатель может теперь судить, оправдывается ли этой формулировкой заключительное замечание п. 50.1.1.

**50.7.2.** Вопрос о нахождении надлежащего $U$ для (50:I) довольно деликатный. Здесь дает себя чувствовать антимонотонность $U^+$ (см. (50:H:b) из п. 50.5.3). Уменьшение $U$, т. е. числа уравнений, увеличивает $U^+$, т. е. число неравенств, и наоборот.

В частности, если мы выберем $U$ максимально возможным, т. е. возьмем $U = W^m$, то неравенства, связанные с $U^+$, не создают трудностей вообще. Действительно, $U = W^m$ влечет $U^+ = W$ в силу (50:H:a) из п. 50.5.3. Любое $T$ из $W$ определенно обладает таким подмножеством $S$, которое минимально в $W$, т. е. принадлежит $U = W^m$. Если $T$ отличается от этого $S$ не только безразличными элементами, то $x_i > 0$ для некоторых $i$ из $T - S$ и, следовательно, $\sum\limits_{i \in T} x_i > \sum\limits_{i \in S} x_i = n$, т. е. неравенство (50:9*) выполнено.

Таким образом, $U = W^m$ всегда дает решение **V**, если равенства (50:8*) (вместе с (50:7)) могут быть решены.

Однако, как мы выяснили в п. 50.4.3, мы не имеем права ожидать априори, что так будет всегда, и, в частности, в том случае, когда уравнений (50:8*) (т. е. элементов $W^m$) больше, чем переменных $x_i$.

Последнее возражение не является абсолютным; в действительности легко найти простую игру, в которой число этих уравнений превосходит число переменных, а решение тем не менее существует [2]). С другой стороны, существуют простые игры, для которых эти уравнения не имеют решения. Пример этого несколько менее тривиален [3]), но возможно, что это явление довольно общее. Когда оно имеет место, надлежит исследовать, нельзя ли найти решение **V** подходящим выбором $U \subset W^m$. Трудность и тонкость этого вопроса комментировались уже в начале этого пункта [4]).

---

[1]) А также те коалиции, которые отличаются от них только безразличными элементами.

[2]) В первый раз это окажется в случае $n = 5$, см. пятое замечание в п. 53.1.

[3]) В первый раз это окажется в случае $n = 6$, см. пятое замечание в п. 53.2.5.

[4]) Не известно никаких примеров простых игр с решением **V**, выведенным из $U \subset W^m$, но не установлено также, что их нет. Возникающий далее вопрос о том, обладает ли каждая простая игра решением **V**, соответствующим некоторому $U \subseteq W^m$, остается также открытым.

Проблема представляется довольно важной. Решение может оказаться трудным. Представляется, что эта проблема имеет некоторое сходство с решенными вопросами, упомянутыми в замечании на стр. 177—178, но воспользоваться этой связью пока не удавалось.

### 50.8. Связь с однородными мажоритарными играми

**50.8.1.** Ограничимся теперь случаем $U = W^m$. Это значит, что мы предполагаем, что полная система уравнений

(50:17) $$\sum_{i \in S} x_i = n \text{ для всех } S \in W^m$$

может быть решена вместе с неравенствами

(50:7) $$x_i \geqq 0.$$

Мы видим, что в этом случае множество **V** всех $\vec{\alpha}^S$, где $S \in W^m$, является решением. В этом и только в этом случае мы будем называть **V** *главным простым решением* игры.

Имеется определенное сходство между этими ограничениями и ограничениями, которые характеризуют однородную взвешенную мажоритарную игру. Действительно, последняя определяется через

(50:18) $$\sum_{i \in S} w_i = b \text{ для всех } S \in W^m,$$

где

$$b = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i + a\right), \quad a > 0$$

(объединение (50:D) и (50:E) из п. 50.2), и

(50:19) $$w_i \geqq 0.$$

На самом деле здесь мы имеем дело с бо́льшим, чем простое сходство. Так, если дана система $w_i$, удовлетворяющая соотношениям (50:18) и (50:19), то система, удовлетворяющая (50:17) и (50:7), получается следующим образом.

Число $b$ из (50:18) положительно. Умножение всех $w_i$ на общий положительный множитель оставляет все без изменения, и, выбрав в качестве множителя $n/b$, мы можем заменить в (50:18) $b$ на $n$. Теперь мы можем просто положить $x_i \equiv w_i$, и соотношения (50:18), (50:19) перейдут в (50:17), (50:7).

Если, наоборот, дана система $x_i$, удовлетворяющая (50:17), (50:7), то здесь возникает дополнительная трудность. Мы можем положить $w_i \equiv x_i$ [1]). Тогда (50:7) перейдет в (50:19), а (50:17) даст (50:18) с $b = n$, т. е. $a = 2n - \sum_{i=1}^{n} w_i$. Но теперь возникает вопрос, будет ли удовлетворяться условие $a > 0$, т. е. будет ли

(50:20) $$\sum_{i=1}^{n} x_i < 2n.$$

Суммируя сказанное выше, мы получаем:

(50:K) Каждая однородная взвешенная мажоритарная игра обладает главным простым решением.

---

[1]) Те $i$, которые не принадлежат никакой выигрывающей коалиции, производят легкое искажение, так как они не имеют никакого $x_i$ (см. второе ограничение в п. 50.4), в то время как мы требуем, чтобы они равнялись $w_i$. Однако, как легко заключить из сноски 2 на стр. 446, мы можем положить соответствующие $w_i = 0$.

Обратно, если (простая) игра обладает главным простым решением, то однородные веса для нее можно получить из этого решения тогда и только тогда, когда выполнено (50:20).

**50.8.2.** Найденная связь между однородными весами и главным простым решением существенна. Однако следует подчеркнуть, что однородная взвешенная мажоритарная игра, вообще говоря, имеет, кроме главного простого решения [1]), и другие решения. Кроме того, игра с главным простым решением может не удовлетворять неравенству (50:20), т. е. может не быть знака $<$ в

(50:21) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \lesseqqgtr 2n\ ^{2)}.$$

Наконец, при этом мы не должны терять из поля зрения основного ограничения всех наших рассуждений. Рассматриваем ли мы понятие «обычного» дележа в его узком смысле из п. 50.8.1 (т. е. $U = W^m$) или в более широкой первоначальной форме из пп. 50.6, 50.7.1 (т. е. $U \subseteq W^m$, см. (50:1) из п. 50.6.2), оно по определению ограничивается простыми играми. То, что необходимо выходить за их пределы, равно как и за пределы описанных здесь частных решений, и что это заставит нас решительно вернуться к систематической теории из п. 30.1.1, было указано в конце п. 50.3.

## § 51. МЕТОДЫ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ВСЕХ ПРОСТЫХ ИГР

### 51.1. Предварительные замечания

**51.1.1.** Начиная с п. 50.1.1, мы вводили конкретные простые игры, которые допускали характеризацию с помощью числового критерия вместо первоначального теоретико-множественного (см. начало п. 50.2.1). Мы видели, однако, что эти численные процедуры можно было осуществлять различными способами и что не было уверенности в том, что все простые игры можно перечислить с их помощью. Следовательно, желательно найти комбинаторные (теоретико-множественные) методы, которые дадут систематическое перечисление всех простых игр.

Это действительно необходимо для того, чтобы обозреть возможности простых игр и, в частности, увидеть, насколько продвинули нас рассмотрённые численные процедуры. Окажется, что имеющие решающее значение примеры неочевидных возможностей появляются только при относительно большом числе игроков [3]), так что чисто словесный анализ не может быть достаточно эффективным.

**51.1.2.** Мы указывали в конце п. 49.6.3, что перечисление всех простых игр эквивалентно перечислению их семейств $W$, т. е. всех семейств

---

[1]) Главное простое решение существенной игры трех лиц ($[1, 1.1]_h$, см. конец п. 50.2) есть первоначальное решение из п. 29.1.2, т. е. (32:B) из п. 32.2.3. О существовании других решений мы знаем из пп. 32.2.3 и 33.1.

Главное простое решение вершины $I$ куба $Q$ ($[1, 1, 1, 2]_h$, см. конец п. 50.2) есть первоначальное решение из п. 35.1.3. Мы обсудим эту игру вместе с более общей игрой $[1, \ldots, 1, n-2]_h$ ($n$ участников) в п. 55 и получим все решения.

Все эти ссылки делают ясным то, что решения, отличные от главного простого, весьма важны (см. пп. 33.1 и 54.1).

[2]) Знак $=$ в первый раз встречается в случае $n = 6$, см. четвертое замечание в п. 53.2.4. Знак $>$ в первый раз встречается в случае $n = 6$ или 7, см. шестое замечание в п. 53.2.6.

[3]) $n = 6, 7$, см. п. 53.2.

$W$, которые удовлетворяют (49:$W^*$) из п. 49.6.2. Мы также заметили там, что, возможно, полезно заменить рассмотрение $W$ (всех выигрывающих коалиций) рассмотрением $W^m$ (всех минимальных выигрывающих коалиций).

Каждая из этих процедур обеспечивает перечисление всех простых игр. Использование $W$ предпочтительнее с идейной точки зрения, так как $W$ имеет более простое определение, а $W^m$ вводится с помощью $W$. Для практического перечисления всех простых игр, что в данный момент является нашей целью, использование $W^m$ предпочтительнее, так как $W^m$ меньше, чем $W$ [1]), и, следовательно, описывается более просто.

Мы последовательно опишем обе эти процедуры. Окажется, что их обсуждения дадут естественное применение понятий удовлетворяемости и насыщения, введенных в п. 30.3.

### 51.2. Метод насыщения. Перечисление посредством $W$

**51.2.1.** Множество $W$ характеризуется свойствами (49:$W^*$) из п. 49.6.2, т. е. условиями (49:W*:a) — (49:W*:c), которые и составляют (49:W*).

Отбросим пока (49:W*:c) и рассмотрим только (49:W*:a) и (49:W*:b). Из этих двух условий следует, что никакие два элемента из $W$ не могут быть непересекающимися [2]). Другими словами, если обозначить отрицание дизъюнктности, т. е. $S \cap T \neq \varnothing$, через $S\mathscr{R}_1T$, то из (49:W*:a) и (49:W*:b) следует $\mathscr{R}_1$-удовлетворяемость [3]). Более исчерпывающим утверждением в этом направлении является следующее:

(51:A) (49:W*:a), (49:W*:b) эквивалентны $\mathscr{R}_1$-насыщенности.

Доказательство. $\mathscr{R}_1$-насыщенность $W$ означает следующее:

(51:1) $S$ принадлежит $W$ тогда и только тогда, когда $S \cap T \neq \varnothing$ для всех $T$ из $W$.

Из (49:W*:a) и (49:W*:b) следует (51:1). Действительно, пусть $W$ удовлетворяет (49:W*:a) и (49:W*:b). Если $S$ принадлежит $W$, то мы знаем, что $S \cap T \neq \varnothing$ для всех $T$ из $W$. Если $S$ не принадлежит $W$, то тогда $T = -S$ принадлежит $W$, по (49:W*:a), и $S \cap T = \varnothing$.

Из (51:1) следует (49:W*:a) и (49:W*:b). Действительно, пусть $W$ удовлетворяет (51:1). Докажем сначала (49:W*:b), а затем (49:W*:a).

(49:W*:b). Если $S$ удовлетворяет критерию (51:1), то это верно и для каждого надмножества $S$. Следовательно, $W$ содержит все надмножества своих элементов.

(49:W*:a). Благодаря доказанному выше $-S$ не принадлежит $W$ тогда и только тогда, когда никакое подмножество $-S$ не принадлежит $W$, т. е. когда любое $T$ из $W$ не содержится в $-S$ или, что то же самое, когда для любого $T$ из $W$ $S \cap T \neq \varnothing$. По (51:1) это означает просто, что $S$ принадлежит $W$.

Таким образом, во всех случаях ровно одно из $S$ и $-S$ принадлежит $W$.

---

[1]) Семейства множеств $W$ и $L$ не пересекаются. Они имеют одинаковое число элементов в силу (48:A:b) из п. 48.2.1. Вместе они исчерпывают $\overline{I}$, которое содержит $2^n$ элементов. Следовательно $W$, так же как и $L$, содержит ровно $2^{n-1}$ элементов.

Число элементов в $W^m$ может быть различным, но всегда значительно меньше (см. четвертое замечание в п. 53.1).

[2]) Доказательство. Пусть $S$, $T$ принадлежат $W$ и $S \cap T = \varnothing$. Тогда $-S \supseteq T$ и, следовательно, $-S$ принадлежит $W$ по (49:W*:b), таким образом, нарушается (49:W*:a).

[3]) См. определения в п. 30.3.2.

Ясно, что отношение $S\mathscr{R}_1 T$ симметрично; следовательно, мы можем применить (30:G) из п. 30.3.5 [1]).

**51.2.2.** Для того чтобы обсудить (49:W*) на этой основе, следует ввести в рассмотрение (49:W*:c). Это может быть сделано двумя путями. Первый путь полезен для последующего сравнения.

(51:B) Семейство $W$ удовлетворяет (49:W*) тогда и только тогда, когда оно $\mathscr{R}_1$-насыщено и не содержит ни $\varnothing$, ни одноэлементных множеств.

Доказательство. (49:W*) объединяет (49:W*:a), (49:W*:b) и (49:W*:c). Первые два условия по (51:A) означают $\mathscr{R}_1$-насыщенность. Если считать (49:W*:a) выполненным, то (49:W*:c) может быть установлено следующим образом. Если $S$ есть $I$ или $n$ — 1-элементное множество, то $-S$ не принадлежит $W$. Поэтому ни $\varnothing$, ни одноэлементные множества не принадлежат $W$.

Польза от второго пути более непосредственная. Пусть $V_0$ — семейство всех множеств, описываемых в (49:W*:c), т. е. оно состоит из $I$ и всех $n$ — 1-элементных подмножеств $I$. Тогда мы имеем

(51:C) $V$ есть подмножество $W$, удовлетворяющего (49:W*), тогда и только тогда, когда $V \cup V_0$ $\mathscr{R}_1$-удовлетворяемо.

Доказательство. То, что $W \supseteq V$ и для $W$ выполняется (49:W*), означает следующее. $W \supseteq V$, $W$ удовлетворяет (49:W*:a), (49:W*:b), т. е. является $\mathscr{R}_1$-насыщенным в силу (51:A). $W$ удовлетворяет (49:W*:c), т. е. $W \supseteq V_0$. Другими словами, мы ищем $\mathscr{R}_1$-насыщенное $W \supseteq V \cup V_0$, т. е. хотим узнать, может ли $V \cup V_0$ быть расширено до $\mathscr{R}_1$-насыщенного множества.

Далее, мы знаем, что применимо (30:G) из п. 30.3.5, и, следовательно, результаты последней части п. 30.3.5 также применимы [2]). Возможность этого расширения эквивалентна $\mathscr{R}_1$-удовлетворяемости $V \cup V_0$.

**51.2.3.** Переформулируем (51:C) более подробно.

(51:D) Семейство $V$ будет подмножеством $W$, удовлетворяющего (49:W*), тогда и только тогда, когда оно обладает следующими свойствами:

(51:D:a) Любые два $S$ и $T$ из $V$ пересекаются.

(51:D:b) $V$ не содержит ни $\varnothing$, ни одноэлементных множеств.

Доказательство. Согласно (51:C) мы должны доказать, $\mathscr{R}_1$-удовлетворяемость $V \cup V_0$, т. е. что любые два $S$ и $T$ из $V$ или $V_0$ пересекаются.

Если оба множества $S$ и $T$ принадлежат $V$, то это совпадает с (51:D:a).

Если оба множества $S$ и $T$ принадлежат $V_0$, то оба они имеют $\geqq n-1$ элементов. Следовательно, они не могут быть непересекающимися [3]).

---

[1]) Следует вспомнить, что в п. 30.3.5 мы предполагали справедливость $x\mathscr{R}x$, т. е. в нашем случае $S\mathscr{R}_1 S$. Это означает, что $S \neq \varnothing$, так как $S\mathscr{R}_1 S$ нарушается при $S = \varnothing$.

Однако (49:W*:a) и (49:W*:b) исключают $\varnothing$ из $W$; следовательно, мы можем использовать в качестве области $D$ из п. 30.3.2, вместо $\overline{\overline{I}}$ (семейства всех подмножеств $I$) $\overline{\overline{I}} - \varnothing$ (семейство всех непустых подмножеств $I$). Это избавляет нас от $S = \varnothing$.

[2]) Заметим, что область $D = \overline{\overline{I}} - \varnothing$ (см. предыдущую сноску) конечна.

[3]) Мы используем то, что $2(n-1) > n$, т. е. $n > 2$, т. е. $n \geqq 3$. Следовало бы сказать об этом подробно с самого начала, но это вполне естественное допущение, так как простые игры (т. е. множества с (49:W*)) существуют только для $n \geqq 3$ (см. пп. 49.4 и 49.5).

Из множеств $S$ и $T$ одно принадлежит $V$, а другое $V_0$. По симметрии можно предположить, что $S \in V$, а $T \in V_0$. Итак, $S$ из $V$ не может быть дизъюнктным с $I$ или с любым $n$ — 1-элементным множеством, а это совпадает с (51:D:b).

(51:D) решает вопрос о перечислении всех $W$. Начиная с любого $V$, которое удовлетворяет (51:D:a) и (51:D:b) [1]), мы можем увеличивать его постепенно до тех пор, пока это можно делать, не нарушая (51:D:a) и (51:D:b). Когда этот процесс не может быть продолжен дальше, мы имеем $V$, которое является максимальным подмножеством $W$ (с 49:W*)), т. е. мы получаем нужное $W$. Проводя этот последовательный процесс построения всеми возможными путями, мы получим все искомые $W$.

Читатель может попытаться проделать это для $n = 3$ или $n = 4$. Окажется, что даже для небольших $n$ эта процедура чрезвычайно громоздка, хотя она является строгой и исчерпывающей для всех $n$.

### 51.3. Основания для перехода от $W$ к $W^m$. Трудности использования $W^m$

**51.3.1.** Рассмотрим семейства $W^m$ из п. 49.6.

Мы хотим охарактеризовать эти $W^m$ непосредственно и найти некоторый простой процесс построения их всех. Далее мы выведем два различных способа характеризации, оба — типа насыщения. Первый будет введен асимметричным отношением, а второй — симметричным. Таким образом, именно второй способ, который подходит для искомого построения, аналогичен построению $W$ в п. 51.2.

Мы тем не менее приведем обе характеризации, потому что их эквивалентность весьма поучительна. Первая в некоторых (технических) отношениях напоминает определение решения (см. пп. 30.3.3 и 30.3.7), и, следовательно, переход к эквивалентной второй форме интересен тем, что указывает пути разрешения проблем этого типа. Ранее мы упоминали (в п. 30.3.7), сколь желателен мог бы быть соответствующий переход для нашего понятия решения.

**51.3.2.** Пусть $W$ — семейство, содержащее все надмножества своих элементов, например удовлетворяющее (49:W*:b). Тогда семейство $W^m$ его минимальных элементов определяет $W$. Действительно, ясно, что $W$ является семейством надмножеств всех элементов $W^m$.

Следовательно, если дано семейство $V$ и мы ищем такое $W$, удовлетворяющее (49:W*), что $V = W^m$, то это $W$ обязательно должно быть семейством $\widetilde{V}$ надмножеств всех элементов $V$.

Следовательно, $V = W^m$ для $W$, удовлетворяющего (49:W*), тогда и только тогда, когда эти два требования удовлетворяются для семейства $W = \widetilde{V}$ [2]). Перейдем теперь к преобразованию этой характеризации $V = W^m$ в характеризацию насыщения.

Обозначим утверждение, что ни $S \cap T = \varnothing$, ни $S \supset T$, через $S\mathscr{R}_2T$. Тогда мы имеем:

(51:E) $V = W^m$ для $W$, удовлетворяющего (49:W*), тогда и только тогда, когда $V$ $\mathscr{R}_2$-насыщено и не содержит ни $\varnothing$, ни одноэлементных множеств.

---

[1]) В принципе мы можем начать с пустого множества. Читатель заметит, что исключение $\varnothing$ из $V$ (см. выше) не влияет на возможность $V = \varnothing$.

[2]) То есть $W = \widetilde{V}$ есть единственное семейство, которое может удовлетворять этим требованиям, но даже для него они могут не выполняться.

Доказательство. Согласно сказанному выше мы должны проверить только, обладает ли $W = \tilde{V}$ желательными свойствами.

$V = W^m$. Пусть $S$ — минимальный элемент в этом $W$. Тогда $S \supseteq T$ для некоторого $T$ из $V$. $T$ принадлежит $W$ и поэтому минимальность $S$ исключает $S \supset T$. Следовательно, $S = T$, т. е. $S$ принадлежит $V$.

Таким образом, остается рассмотреть только обратное свойство, т. е. будет ли каждое $S \in V$ действительно минимальным в $W$. Любое $S \in V$, очевидно, принадлежит $W$. Поэтому минимальность означает невозможность $S \supset T'$, где $T' \in W$, т. е. невозможность $S \supset T' \supseteq T$, где $T \in V$. Это влечет невозможность $S \supset T$, где $T \in V$, и, наоборот, следует из нее (при $T' = T$). Итак, мы имеем следующее условие.

(51:2) Неверно, что $S \supset T$ для $S$, $T \in V$.

$W$ удовлетворяет (49:W*). Мы должны рассмотреть (49:W*:a), (49:W*:b), (49:W*:c) порознь. Сделаем это в другом порядке.

(49:W*:b). Очевидно, что $W = \tilde{V}$ содержит все надмножества своих элементов, поэтому данное условие выполняется автоматически.

(49:W*:c). Пусть (49:W*:a) доказано. (См. ниже.) Тогда (49:W*:c) может быть установлено так. Если $S$ есть $I$ или $n$ — 1-элементное множество, то $-S$ не принадлежит $W$. Следовательно, ни $\varnothing$, ни одноэлементные множества не принадлежат $W$, т. е. никакое подмножество их не находится в $V$. Итак, мы имеем следующее условие:

(51:3) Ни $\varnothing$, ни какое-либо одноэлементное множество не принадлежат $V$.

(49:W*:a). Рассмотрим доказательство в два этапа.

$S'$ и $-S'$ не могут одновременно принадлежать $W$. Поэтому если $S$ и $T$ принадлежат $V$, то мы не можем иметь $S \subseteq S'$, $T \subseteq -S'$. Существование такого $S'$ влечет $S \cap T \neq \varnothing$ и, наоборот, следует отсюда (при $S' = S$). Итак, мы имеем условие:

(51:4) Неверно, что $S \cap T = \varnothing$ для $S$, $T \in V$.

Одно из множеств $S$ и $-S$ должно принадлежать $W$. Предположим, что ни $S$, ни $-S$ не принадлежит $W$. Это означает, что ни для какого $T \in V$ не может быть $T \subseteq S$ или $T \subseteq -S$. Последнее означает, что $S \cap T = \varnothing$. Тем самым ни для какого $T \in V$ не может быть $T = S$, или $S \supset T$, или $S \cap T = \varnothing$. Иначе говоря, $S$ не принадлежит $V$, и ни для какого $T \in V$ не выполняется отрицание $S \mathscr{R}_2 T$ [1]).

Таким образом, $S$ не принадлежит $V$, но $S \mathscr{R}_2 T$ для всех $T \in V$.

Мы должны теперь выразить то, что это невозможно, т. е.

(51:5) Если $S \mathscr{R}_2 T$ для всех $T \in V$, то $S$ принадлежит $V$.

Значит, (51:2)—(51:5) являются нужными критериями.

Сформулируем (51:2) и (51:4) вместе следующим образом. $S \mathscr{R}_2 T$ для всех $S$, $T \in V$, т. е.

(51:6) $S \mathscr{R}_2 T$ для всех $T \in V$, если $S$ принадлежит $V$.

(51:5) и (51:6) вместе выражают $\mathscr{R}_2$-насыщенность $V$. Таким образом, это условие и (51:3) образуют критерий, и это в точности то, что мы хотели доказать.

(51:E) представляет некоторый интерес, потому что это — полный аналог (51:B). Таким образом, эти характеризации $W$ и $W^m$ отличаются

[1]) То есть фактически либо $S \supset T$, либо $S \cap T = \varnothing$.

только заменой

$$S\mathscr{R}_1T\text{: неверно, что } S \cap T = \varnothing,$$

на

$$S\mathscr{R}_2T\text{: ни } S \cap T = \varnothing\text{, ни } S \supset T.$$

Так как, однако, мы заменяем симметричное отношение $\mathscr{R}_1$ на несимметричное $\mathscr{R}_2$, утверждение (51:E) не может быть использовано тем же способом, каким мы использовали (51:B) или, вернее, основное (51:A).

## 51.4. Измененный подход. Перечисление посредством $W^m$

**51.4.1.** Перейдем теперь ко второй процедуре. Она состоит в анализе следующего вопроса. Если дана система $V$, то что означает выполнение включения $V \subseteq W^m$ для $W$, удовлетворяющего (49:W*)?

$V \subseteq W^m$ означает следующее. Каждое $S \in V$ есть минимальный элемент $W$. Это значит, что такое $S$ должно принадлежать $W$, но его собственные подмножества не должны принадлежать $W$. Так как $W$ удовлетворяет (49:W*:b), т. е. содержит надмножества всех своих элементов, это достаточно установить только для максимального собственного подмножества $S$, т. е. для $S - (i)$, где $i \in S$. Так как $W$ удовлетворяет (49:W*:a), вместо того, чтобы говорить, что $S - (i)$ не принадлежит $W$, мы можем сказать, что $-(S - (i)) = (-S) \cup (i)$ принадлежит $W$. Итак, мы видим следующее.

(51:F) $V \subseteq W^m$ ($W$ удовлетворяют (49:W*)) означает в точности следующее. Каждое $S \in V$ принадлежит $W$, и для каждого $i$ из этого $S$ объединение $(-S) \cup (i)$ принадлежит $W$.

Мы теперь докажем утверждение:

(51:G) $V$ есть подмножество $W^m$ для $W$, удовлетворяющего (49:W*), тогда и только тогда, когда оно обладает следующими свойствами:

(51:G:a) Любые два $S$, $T$ из $V$ пересекаются.

(51:G:b) Ни для каких двух $S$ и $T$ из $V$ не будет $S \supset T$.

(51:G:c) Для $S$ и $T$, принадлежащих $V$ из $S \cup T = I$ следует, что $S \cap T$ есть одноэлементное множество

(51:G:d) Ни $\varnothing$, ни одноэлементное множество, ни $I$ не должны принадлежать $V$.

Доказательство. Пусть $V_1$ — семейство всех множеств $(-S) \cup (i)$, где $S \in V$ и $i \in S$. Тогда $V \subseteq W^m$ означает по (51:F), что $V \cup V_1 \subseteq W$. Согласно (51:D) это возможно для некоторого $W$, удовлетворяющего (49:W*), если $V \cup V_1$ удовлетворяют (51:D:a) и (51:D:b). Сформулируем поэтому (51:D:a) и (51:D:b) для $V \cup V_1$.

(51:D:a). Если оба множества $S$ и $T$ принадлежат $V$, то это совпадает с (51:G:a). Пусть оба множества $S$ и $T$ принадлежат $V_1$. Это значит, что $S = (-S') \cup (i)$ и $T = (-T') \cup (i)$, где $S'$, $T' \in V$, $i \in S'$, $j \in T'$. То, что $S$ и $T$ не пересекаются, означает, что $-S'$ и $-T'$ также не пересекаются, т. е. $S' \cup T' = I$; $(i)$ и $(j)$ не пересекаются, т. е. $i \neq j$, $(-S')$ и $(j)$ не пересекаются, т. е. $j \in S'$, и, наконец, $(-T')$, $(i)$ не пересекаются, т. е. $i \in T'$.

Суммируя все сказанное, мы получаем $S' \cup T' = I$: а $i$ и $j$ — два различных элемента, оба из $S'$ и $T'$, т. е. из $S' \cap T'$.

Теперь мы должны сформулировать невозможность этого. Именно, если $S' \cup T' = I$, то $S' \cap T'$ не может обладать двумя различными элементами. Так как $S' \cap T'$ не может быть пустым множеством, по (51:G:a), это означает, что оно должно быть одноэлементным множеством.

Таким образом, получилось в точности (51:G:c) (с $S'$ и $T'$ вместо $S$ и $T$).

Пусть из множеств $S$ и $T$ одно принадлежит $V$, а другое $V_1$. Мы можем предположить, в силу симметрии, что $S$ принадлежит $V$, а $T$ принадлежит $V_1$. Итак, $T = (-T') \cup (j)$, где $T' \in V$, а $j \in T'$. То, что $S$ и $(-T') \cup (j)$ не пересекаются, означает, что множества $S$ и $-T'$ не пересекаются, т. е. $S \subseteq T'$; $S$ и $(j)$ не пересекаются, т. е. $j$ не принадлежит $S$.

Суммируя сказанное, мы получим $S \subseteq T'$, а $j$ принадлежит $T'$ и не принадлежит $S$.

Теперь мы должны сформулировать невозможность этого, т. е. отрицание $S \subset T'$. Но это есть просто (51:G:b).

(51:D:b). Ни $\varnothing$, ни одноэлементные множества не должны принадлежать ни $V$, ни $V_1$. Последнее означает, что мы не можем иметь множества $(-S) \cup (i)$, где $S \in V$ и $i \in S$. Такое множество $(-S) \cup (i)$ может быть только одноэлементным, а это означало бы, что $-S = \varnothing$, т. е. $S = I$.

Резюмируя, мы получаем: ни $\varnothing$, ни одноэлементные множества, ни $I$ не должны принадлежать $V$. Это совпадает с (51:G:d).

Таким образом, мы, как и хотели, получили условия (51:G:a) — (51:G:d).

(51:G) решает проблему перечисления всех $W^m$ совершенно так же, как (51:D) решало соответствующую проблему для $W$. Начиная с произвольного $V$, которое удовлетворяет (51:G:a)—(51:G:b) [1]), мы будем увеличивать его последовательно до тех пор, пока это можно делать без нарушения (51:G:a)—(51:G:d). Когда этот процесс нельзя будет продолжать дальше, мы получим $V$, которое максимально среди всех подмножеств вида $W^m$ для соответствующего $W$ со свойствами (49:W*), т. е. мы имеем такое $W^m$. Производя этот процесс построения всеми возможными способами, мы получим все искомые $W^m$.

**51.4.2.** Наши последние замечания показывают, что практическое перечисление всех простых игр может быть основано на (51:G), и мы хотим фактически проделать это в п. 52. Но сначала, однако, лучше провести некоторые другие рассмотрения.

Мы намерены теперь проанализировать несколько более подробно утверждение о том, что (51:G) есть условие типа насыщения.

Заметим сначала, что так как (51:G:b) относится к двум произвольным множествам $S$ и $T$ из $V$, мы можем поменять их местами, т. е. мы можем заменить (51:G:b) на

(51:G:b*) Ни для каких двух $S$ и $T$ из $V$ не будет выполнено ни $S \supset T$ ни $S \subset T$.

Обозначим утверждение, что $S$ и $T$ удовлетворяют (51:G:a), (51:G:b*), (51:G:c),— т. е. что ни $S \cap T = \varnothing$, ни $S \supset T$, ни $S \subset T$, ни $S \cup T = I$ за исключением случая, когда $S \cap T$ — одноэлементное множество,— через $S\mathscr{R}_3T$.

Тогда (51:G) устанавливает просто, что $V$ является $\mathscr{R}_3$-удовлетворяемым, а также со свойством (51:G:d). Пусть теперь областью $D$ будет семейство $\overline{\overline{I}}$ тех подмножеств $I$, для которых выполнено (51:G:d), т. е. не являю-

1) В принципе мы можем начать с пустого множества.

щихся ни $\varnothing$, ни одноэлементными множествами, ни самим $I$. Тогда последние замечания п. 51.4.1 показывают, что множества $W$ являются максимальными $\mathscr{R}_3$-удовлетворяемыми подмножествами из $\overline{\overline{I}}$.

Ясно, что отношение $S\mathscr{R}_3T$ симметрично [1]). Следовательно, мы можем применить (30:G) из п. 30.3.5. Это даст нам следующее.

(51:H) $V = W^m$ для $W$ со свойствами (49:W*) тогда и только тогда, когда $V\mathscr{R}_3$-насыщено (в $\overline{\overline{I}}$).

Сравнение (51:F) и (51:H) показывает, что нам удалось перейти от асимметричного $\mathscr{R}_2$ к симметричному $\mathscr{R}_3$ и выполнить тем самым обещание, данное в сноске 1 на стр. 290.

**51.4.3.** Чрезвычайно поучительно сравнить $\mathscr{R}_2$ (из п. 51.3.2) с нашим $\mathscr{R}_3$:

$S\mathscr{R}_2T$ : ни $S \cap T = \varnothing$, ни $S \supset T$,

$S\mathscr{R}_3T$ : ни $S \cap T = \varnothing$, ни $S \supset T$, ни $S \subset T$, ни $S \cup T = I$, за исключением случая, когда $S \cap T$ есть одноэлементное множество.

Простая симметризация $\mathscr{R}_2$ (см. п. 30.3.2) дала бы три первые части этого описания $\mathscr{R}_3$, но не последнюю. Эта последняя часть — существенное достижение (51:G) и (51:H) и не связана какими-либо очевидными путями с тремя остальными.

Из этого можно заключить, сколь запутанными должны быть операции, с помощью которых программа п. 30.3.7 могла бы быть выполнена, если бы это оказалось вообще возможным.

### 51.5. Простота и разложение

**51.5.1.** Рассмотрим связи между понятием простой игры и понятием разложения.

Предположим, следовательно, что Γ — разложимая игра с компонентами Δ и Η ($J$ и $K$ — дополнительные множества в $I$). Тогда мы должны ответить на вопрос, что означает простота игры Γ применительно к Δ и Η.

Начнем с определения множеств $W$ и $L$. Так как мы должны рассмотреть их для всех трех игр, необходимо отметить их зависимость от игры. Поэтому мы будем писать $W_\Gamma$, $L_\Gamma$; $W_\Delta$, $L_\Delta$; $W_H$, $L_H$.

Следует добавить, что мы не предполагаем существенности или какой-либо нормировки игр Γ, Δ, Η. Удобно, однако, предположить, что все они являются играми с нулевой суммой [2]).

(51:I) $S = R \cup T$ ($R \subseteq J$, $T \subseteq K$) принадлежит $W_\Gamma$ ($L_\Gamma$) тогда и только тогда, когда $R$ принадлежит $W_\Delta$ ($L_\Delta$), а $T$ принадлежит $W_H$ ($L_H$).

Доказательство. Заменим $S$ на его дополнение (в $I$), т. е. на $I - S$ [3]); заменим, далее, $R$ и $T$ их соответствующими дополнениями

[1]) $S\mathscr{R}_3T$ выполняется в $\overline{\overline{I}}$, $S \cap S = \varnothing$ верно только для $S = \varnothing$; $S \supset S$ не верно никогда; $S \cup S = I$ справедливо только при $S = I$; следовательно, ничего этого не может быть для $S \in \overline{\overline{I}}$.

[2]) Читатель, который помнит рассуждения п. 46.10, может пожелать узнать в этом месте, как улаживается вопрос об эксцессах (в Γ, Δ, $H$ соответственно $e_0$, $\overline{\varphi}, \overline{\psi}$). Этот вопрос будет выяснен в п. 51.6.

[3]) Предпочтительнее писать дополнение таким способом вместо обычного $-S$, $-R$, $-T$, так как теперь дополнения берутся относительно различных множеств.

(в $J$, $K$). Это преобразование заменяет $W_\Gamma$, $W_\Delta$, $W_H$ на $L_\Gamma$, $L_\Delta$, $L_H$ и обратно. Следовательно, наше утверждение относительно $W$ влечет утверждение относительно $L$ и обратно. Мы собираемся доказать последнее.

То, что $S$ принадлежит $L_\Gamma$, выражается в виде

(51:7) $$\mathrm{v}(S) = \sum_{i \in S} \mathrm{v}((i)).$$

Так как $\Delta$ и $H$ суть компоненты, мы имеем $\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}(R) + \mathrm{v}(T)$. Следовательно, мы можем переписать (51:7):

(51:8) $$\mathrm{v}(R) + \mathrm{v}(T) = \sum_{i \in R} \mathrm{v}((i)) + \sum_{i \in T} \mathrm{v}((i)).$$

То, что $R$ принадлежит $L_\Delta$, а $T$ принадлежит $L_H$, выражается через

(51:9) $$\mathrm{v}(R) = \sum_{i \in R} \mathrm{v}((i)),$$

(51:10) $$\mathrm{v}(T) = \sum_{i \in T} \mathrm{v}((i)).$$

Утверждение, которое мы должны доказать, есть эквивалентность (51:7) и свойств (51:9), (51:10).

Ясно, что из (51:9) и (51:10) следует (51:7). Обратное верно, так как всегда

$$\mathrm{v}(R) \geqq \sum_{i \in R} \mathrm{v}((i)),$$

$$\mathrm{v}(T) \geqq \sum_{i \in T} \mathrm{v}((i))$$

(см. (31:2) из п. 31.1.4).

**51.5.2.** Мы теперь можем доказать следующее:

(51:J) Игра $\Gamma$ проста тогда и только тогда, когда из двух ее компонент $\Delta$ и $H$ одна проста, а вторая несущественна.

Доказательство. Необходимость. Простота $\Gamma$ означает следующее.

(51:11) Для любого $S \subseteq I$ верно одно и только одно из следующих двух утверждений:

(51:11:a) $S$ принадлежит $W_\Gamma$;

(51:11:b) $S$ принадлежит $L_\Gamma$.

Положим $S = R \cup T$ ($R \subseteq J$, $T \subseteq K$) и применим (51:I) к (51:11). В результате мы получим следующее:

(51:12) Для любых двух множеств $R \subseteq J$ и $T \subseteq K$ верно одно и только одно из следующих двух утверждений:

(51:12:a) $R$ принадлежит $W_\Delta$ и $T$ принадлежит $W_H$;

(51:12:b) $R$ принадлежит $L_\Delta$ и $T$ принадлежит $L_H$.

Положим теперь $R = \emptyset$ и $T = K$. Тогда $R$ принадлежит $L_\Delta$, а $T$ принадлежит $W_H$. Следовательно, из (51:12:a) будет следовать, что $W_\Delta$ и $L_\Delta$ имеют общий элемент $R$, а из (51:12:b) будет следовать, что $W_H$ и $L_H$ имеют общий элемент $T$. В силу (49:E) из п. 49.3.3 (примененного к $\Delta$, $H$ вместо $\Gamma$), из первого следует несущественность $\Delta$, а из второго — несущественность $H$.

Итак, мы видим:

(51:13) Если Г — простая игра, то либо игра Δ, либо Н несущественна.

Достаточность. Предположим, по симметрии, что несущественная игра есть Н. Тогда (49:Е) из п. 49.3.3 показывает, что каждое $T \subseteq K$ принадлежит и к $W_{\text{Н}}$, и к $L_{\text{Н}}$. Следовательно, мы можем теперь переформулировать характеристику (51:12) простоты Г.

(51:14) Для любого $R \subseteq J$ верно одно и только одно из следующих двух утверждений:

(51:14:a) $R$ принадлежит $W_\Delta$;

(51:14:b) $R$ принадлежит $L_\Delta$.

Это есть в точности утверждение о простоте Δ. Таким образом, мы видим:

(51:15) Если игра Н (Δ) несущественна, то простота Г эквивалентна простоте Δ (Н).

(51:13) и (51:15) завершают доказательство.

## 51.6. Несущественность, простота и композиция. Рассмотрение эксцесса

**51.6.** Полезно сравнить (51:J) с (46:А:с) из п. 46.1.1. Мы обнаружили там, что разложимая игра несущественна тогда и только тогда, когда две ее компоненты несущественны. Это значит, что свойство несущественности наследуется при композиции. Это неверно для простоты, которая, как мы знаем, есть простейшая форма существенности. В силу (51:J) разложимая игра не проста, если две ее компоненты просты. (51:J) показывает, что простая игра Δ остается простой при композиции тогда и только тогда, когда она объединяется с несущественной игрой Н, т. е. с множеством «болванов» (см. замечание на стр. 353).

В связи с этим уместны следующие четыре качественных замечания.

Первое. Если простая игра Г получается, как описано выше, добавлением к простой игре Δ «болванов» (т. е. несущественной игры Н), то решения Г могут быть непосредственно получены из решений Δ. Действительно, это описано детально в п. 46.9 [1]).

Второе. Мы указали в начале п. 49.7, что для простых игр мы используем старую форму теории. Поэтому стоит заметить, что тип композиции, к которому мы пришли (см. предыдущее замечание), есть в точности тот тип, при котором наследуется старая форма теории. (См. конец п. 46.9 или (46:М) в первом замечании из п. 46.10.4.)

Третье. В связи с этим становится также яснее, почему мы должны воздерживаться от рассмотрения эксцессов, отличных от нуля, т. е. новой формы теории в смысле п. 44.7, для теории простых игр.

Действительно, если бы мы смогли выполнить это успешно, то результаты пп. 46.6 и 46.8 дали бы нам возможность иметь дело со всеми композициями простых игр. Теперь мы увидели, что композиция простых игр не является простой игрой. Другими словами, теория простых игр с произвольным эксцессом захватывала бы косвенно также и непростые игры.

---

[1]) Конечно, это как раз то, чего во всяком случае заставляет нас ожидать здравый смысл. Однако неожиданные повороты теории разложения (см., в частности, выводы в п. 46.11) показывают, что небезопасно терять из поля зрения точный результат. В нашем случае п. 46.9 дает строгое обоснование.

Неудивительно поэтому, что мы не можем перейти к этому обобщению [1]).

Четвертое. В свете анализа п. 46.10 сделанные выше замечания относительно эксцесса приобретают следующее значение. Они показывают, что понятие простоты не выдерживает общей операции погружения [2]). Отсюда следует, что методические принципы, рассмотренные в п. 46.10.5, не могут применяться при всех условиях.

## 51.7. Критерий разложимости в терминах $W^m$

**51.7.1.** В п. 51.5 мы обсудили, когда разложимая игра Г проста. Теперь мы возьмемся за обратную проблему, т. е. решим, когда простая игра разложима.

Пусть дана простая игра Г. В дальнейшем окажется важным следующее понятие. Элемент $i \in I$ называется *значимым* тогда и только тогда, когда он принадлежит некоторому $S$ из $W^m$ [3]). Обозначим множество всех значимых элементов, т. е. объединение всех $S$ из $W^m$, через $I_0$.

Расчленим наши дальнейшие рассуждения на несколько последовательных этапов.

(51:K) Если игра Г проста и разложима и если ее простой компонентой является $\Delta$ (см. (51:J) и обозначения из п. 51.5), то Г и $\Delta$ имеют одно и то же $W^m$.

Доказательство. Согласно (51:I), $S = R \cup T$ (где $R \subseteq J$ и $T \subseteq K$), принадлежащее $W_\Gamma$, получается выбором произвольного $R \in W_\Delta$ и произвольного $T \in W_H$. Игра Н несущественна (по (51:J)), поэтому $T \in W_H$ есть просто любое $T \subseteq K$ (см. доказательство (51:J)). Поэтому $S = R \cup T$ минимально (т. е. принадлежит $W^m$), если минимальны $R$ и $T$. Это значит, что $R$ принадлежит $W^m_\Delta$ и $T = \varnothing$, т. е. $S = R$.

Таким образом, $W^m_\Gamma$ и $W^m_\Delta$ совпадают, т. е. Г и $\Delta$ имеют одно и то же $W^m$.

(51:L) При тех же предположениях, что и в (51:K), $J \supseteq I_0$.

Доказательство. Г и $\Delta$ имеют одно и то же $W^m$ (по (51:K)), а поэтому одни и те же значимые элементы. Следовательно, те элементы из Г, которые образуют $I_0$ являются участниками в игре $\Delta$, которая образована множеством $J$.

(51:M) Предположим только, что игра Г проста. Тогда $I_0$ есть разлагающее множество [4]). $I_0$ -компонента $\Delta$ проста, а $(I - I_0)$-компонента Н несущественна (см. (51:J)).

Доказательство. Рассмотрим $S = R \cup T$, $R \subseteq I_0$, $T \subseteq I - I_0$. Тогда

(51:16) $S$ принадлежит $W$ тогда и только тогда, когда $R$ принадлежит $W$.

---

1) В определенном смысле это можно рассматривать как применение методических принципов, упомянутых в сноске 3 на стр. 289.

2) Кроме простого добавления «болванов», как указывалось выше.

3) Таким образом, игрок $i$ является значимым, если существует минимальная выигрывающая коалиция, к которой он принадлежит, т. е. существует возможная существенная услуга, которую он может оказать.

Будет показано, что противоположное этому состоит в том, что игрок является «болваном» (см. конец п. 51.7.3).

Все сказанное относится, конечно, к простым играм.

4) В смысле п. 43.1.

Действительно, если $R$ принадлежит $W$, то $S \supseteq R$ тоже принадлежит $W$. Обратно, пусть $S$ принадлежит $W$. Тогда в $W$ существует минимальное $T' \subseteq S$. Так как $T'$ принадлежит $W^m$, каждое $i \in T'$ принадлежит $I_0$. Следовательно, $T' \subseteq I_0$. Таким образом, $T' \subseteq S \cap I_0 = R$ и, следовательно, $R$ принадлежит $W$ вместе с $T'$.

(51:17) $T$ принадлежит $L$.

Действительно, заменим $S$ на $T$ ($\subseteq I - I_0$). Это заменит наши $R$ и $T$ на $\varnothing$ и $T$. Так как $\varnothing$ принадлежит $L$, (51.16) позволяет заключить то же самое и о $T$.

Докажем теперь, что

(51:18) $$\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}(R) + \mathrm{v}(T).$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $S \in L$ и когда $S \in W$.

Пусть $S \in L$. Тогда $R$, $T \subseteq S$ также принадлежат $L$. Следовательно,

$$\mathrm{v}(S) = \sum_{i \in R} \mathrm{v}((i)) + \sum_{i \in T} \mathrm{v}((i)) = \mathrm{v}(R) + \mathrm{v}(T),$$

т. е. мы получаем (51:18).

Пусть $S \in W$. По (51:16) и (51:17) должно быть $R \in W$, а $T \in L$. Поэтому

$$\mathrm{v}(S) = -\sum_{i \notin S} \mathrm{v}((i)),$$

$$\mathrm{v}(R) = -\sum_{i \notin R} \mathrm{v}((i)) = -\sum_{i \notin S} \mathrm{v}((i)) - \sum_{i \in T} \mathrm{v}((i)),$$

$$\mathrm{v}(T) = \sum_{i \in T} \mathrm{v}((i)),$$

откуда

$$\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}(R) + \mathrm{v}(T),$$

т. е. (51:18).

(51:18) есть просто утверждение о том, что $I_0$ есть разлагающее множество. Для всех $T \subseteq I - I_0$ (51:17) дает

$$\mathrm{v}(T) = \sum_{i \in T} \mathrm{v}((i)).$$

Поэтому ($I - I_0$)-компонента Н несущественна. Следовательно, по (51:J) $I_0$-компонента $\Delta$ должна быть простой.

Таким образом, доказательство завершено.

**51.7.2.** Теперь мы в состоянии полностью описать разложимость простой игры Г, т. е. можем указать разлагающее разбиение $\Pi_\Gamma$ в смысле п. 43.3.

(51:N) При тех же предположениях, что и в (51:M), элементами разлагающего разбиения $\Pi_\Gamma$ являются $I_0$ и одноэлементные множества $(i)$ для всех $i \in I - I_0$.

Доказательство. Все $(i)$, где $i \in I - I_0$, принадлежат $\Pi_\Gamma$. По (51:M) $I - I_0$ есть разлагающее множество, образующее несущественную компоненту Н. Поэтому каждое $(i)$ ($i \in I - I_0$) есть разлагающее множество для Н (на основании, например, (43:J) из п. 43.4.1), а поэтому и для Г (на основании (43:D) из п. 43.3.1). Будучи одноэлементным множеством, $(i)$ неизбежно минимально. Поэтому оно принадлежит $\Pi_\Gamma$,

$I_0$ принадлежит $\Pi_\Gamma$: $I_0$ есть разлагающее множество по (51:M). Если $J$ есть разлагающее множество $\neq \varnothing$, то (51:L) применимо к $J$ или к $I - J$. Поэтому либо $J \supseteq I_0$, либо $I - J \supseteq I_0$, $I_0 \cap J = \varnothing$. Оба случая исключают $J \subset I_0$. Таким образом, $I_0$ минимально. Поэтому оно принадлежит $\Pi_\Gamma$.

Никакие другие $J$ не принадлежат $\Pi_\Gamma$. Любое другое $J$ из $\Pi_\Gamma$ должно не пересекаться с $I_0$ и со всеми $(i)$ $(i \in I - I_0)$ (на основании (43:F) из 43.3.2). Так как объединение этих множеств есть $I$, должно быть $J = \varnothing$; но $\varnothing$ не может быть элементом $\Pi_\Gamma$ (см. начало п. 43.3.2).

Таким образом, доказательство завершено.

**51.7.3.** Комбинация (43:K) из п. 43.4.1 и (51:N) [1]) дает следующее.

(51:O) Простая игра Γ неразложима тогда и только тогда, когда $I_0 = I$, т. е. когда все ее участники значимы.

В заключение докажем следующее утверждение:

(51:P) Простая игра обладает ровно одной $J$-компонентой, которая проста и неразложима. При этом $J = I_0$.

Доказательство. $I_0$-компонента может быть образована, и она проста по (51:M).

Рассмотрим теперь простую $J$-компоненту. Тогда она имеет, по (51:K), то же самое $W^m$ и те же самые значимые элементы, что и Γ. Таким образом, множество ее значимых элементов есть $I_0$, но, по (51:O), неразложимость $J$ компоненты эквивалентна $J = I_0$.

Назовем $I_0$-компоненту $\Delta_0$ игры Γ ее *ядром*. Все остальные участники игры, т. е. элементы множества $I - I_0$, суть «болваны». (См. (51:M) или (51:N) и последнюю часть п. 43.4.2). Поэтому все, что происходит в игре Γ, осуществляется в ее ядре $\Delta_0$. Чтобы увидеть это, достаточно применить первое замечание из п. 51.6.

## § 52. ПРОСТЫЕ ИГРЫ ДЛЯ НЕБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ $n$

### 52.1. Случаи $n = 1, 2$ интереса не представляют. Описание случая $n = 3$

**52.1.** Нашей дальнейшей целью является перечисление всех простых игр для небольших значений $n$. Мы предполагаем проводить этот казуистический анализ до тех пор, пока это необходимо для получения примеров, упомянутых в п. 51.2 (см. сноску 2 на стр. 444), в п. 50.7.2 (см. сноски 2, 3, 4 на стр. 452) и в п. 50.8.2 (см. сноски 1,2 на стр. 454).

Так как каждая простая игра существенна, мы должны рассматривать игры при $n \geqq 3$.

Для $n = 3$ ситуация следующая. Единственная существенная игра трех лиц проста и описывается символом $[1, 1, 1]_h$ [2]).

Таким образом, начиная отсюда, мы можем предполагать, что $n \geqq 4$.

### 52.2. Процедура для $n \geqq 4$. Двухэлементные множества и их роль в классификации $W^m$

**52.2.1.** Пусть дано $n \geqq 4$. Мы хотим перечислить все простые игры при данном $n$. Для того чтобы сделать это, удобно ввести принцип дальнейшей классификации этих игр, который весьма эффективен для небольших значений $n$.

---

[1]) Или более прямо (43:K) из п. 43.4.1 с (51:L), (51:M).

[2]) См. (50:A) в п. 50.1.1 и последнее замечание в п. 50.2.2.

Интересующее нас перечисление равнозначно перечислению множеств $W^m$, для которых мы располагаем различными характеризациями, например характеризацией (51:G) из п. 51.4.1.

Рассмотрим минимальные множества, которые могут принадлежать $W^m$. Так как (51:G:d) исключает из $W^m$ пустое множество и одноэлементные множества, это означает рассмотрение двухэлементных множеств в $W^m$. Эти множества обладают следующим свойством.

(52:A) Двухэлементное множество принадлежит $W^m$ тогда и только тогда, когда оно принадлежит $W$ [1]).

Доказательство. То, что из первого следует второе, очевидно. Для доказательства обратного предположим, что двухэлементное множество $S$ принадлежит $W$. Собственными подмножествами $S$ являются пустое, а также одноэлементные множества. Ни одно из них не принадлежит $W$. Поэтому $S$ принадлежит $W^m$.

Мы предполагаем производить классификацию по двухэлементным множествам, содержащимся в $W^m$.

52.2.2. Можно себе представить, что $W^m$ вовсе не содержит двухэлементных множеств. Обозначим эту возможность символом $C_0$.

Следующей альтернативой является то, что $W^m$ содержит ровно одно двухэлементное множество. Некоторой перестановкой игроков $1, 2, \ldots, n$ мы можем добиться того, чтобы это множество было множеством $(1, 2)$. Обозначим эту возможность символом $C_1$.

Далее, $W^m$ может содержать два или более двухэлементных множеств. Рассмотрим два из них. По (51:G:a) они должны иметь общий элемент. Некоторой перестановкой игроков $1, \ldots, n$ мы можем добиться того, чтобы общим элементом было 1, а оставшимися элементами этих множеств 2 и 3.

Итак, $W^m$ содержит $(1, 2)$ и $(1, 3)$.

Обозначим возможность, при которой $W^m$ не содержит иных двухэлементных множеств, символом $C_2$.

52.2.3. Предположим теперь, что $W^m$ содержит другие двухэлементные множества. Предположим, кроме того, что не все из них содержат 1.

Рассмотрим поэтому двухэлементное множество, не содержащее 1. По (51:G:a) оно должно содержать общие с $(1, 2)$ и с $(1, 3)$ элементы. Так как 1 исключается, это множество должно быть $(2,3)$.

Таким образом $(1, 2)$, $(1, 3)$ и $(2, 3)$ принадлежат $W^m$ (мы имеем здесь полную симметрию относительно 1, 2, 3).

Рассмотрим теперь какое-либо другое двухэлементное множество из $W^m$. Оно не может содержать все три элемента 1, 2, 3. Некоторой перестановкой этих игроков мы можем добиться того, чтобы это множество не содержало 1. Но оно должно иметь общие элементы с $(1, 2)$ и с $(1, 3)$, а так как 1 исключается, оно должно быть множеством $(2, 3)$. Но мы предполагали, что оно отлично от $(2, 3)$.

Таким образом, $W^m$ содержит двухэлементные множества $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$ и никаких иных. Обозначим эту возможность символом $C^*$.

52.2.4. Остается альтернатива, что $W^m$ содержит другие двухэлементные множества, кроме $(1, 2)$, $(1, 3)$, но что все они содержат 1.

Некоторой перестановкой игроков $4, \ldots, n$ мы можем дать соответствующим игрокам номера $4, \ldots, k+1$, где $k = 3, \ldots, n-1$.

[1]) То есть неминимальное множество в $W$ должно иметь хотя бы три элемента.

Таким образом, $W^m$ содержит двухэлементные множества $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, ..., $(1, k+1)$ и никаких других. Обозначим эту возможность символом $C_k$.

52.2.5. Удобно объединить для совместного рассмотрения случаи $C_0$, $C_1$, $C_2$, из п. 52.2.2 со случаями $C_k$, $k = 3, \ldots, n-1$, из п. 52.2.4. Тогда мы имеем случаи

$$C_k, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Теперь в случае $C_k$ $W^m$ содержит двухэлементные множества $(1, 2)$, ..., $(1, k+1)$ и никаких других. Дополнительной перестановкой игроков $1, \ldots, n$ [1]) мы можем заменить эти множества на $(1, n)$, ... ..., $(k, n)$.

Именно в этой форме мы собираемся использовать случаи $C_k$, $k = 0, \ldots, n-1$. Теперь $C_k$ содержит двухэлементные множества $(1, n)$, ..., $(k, n)$ и никаких других.

Кроме этих $C_k$, возможна только альтернатива $C^*$ из п. 52.2.3, которую мы оставим без изменения.

### 52.3. Разложение в случаях $C^*$, $C_{n-2}$, $C_{n-1}$

**52.3.1.** Из всех этих альтернатив три могут быть разобраны немедленно: $C^*$, $C_{n-2}$, $C_{n-1}$.

Пусть имеет место $C^*$. Рассмотрим $S \subseteq I$. Если $S$ содержит два или более из элементов 1, 2, 3; например 1, 2, то тогда $S \supseteq (1, 2)$. $(1, 2)$ принадлежит $W$ и, следовательно, $S$ тоже. Если $S$ содержит один или менее из элементов 1, 2, 3, например $S$ не содержит 2, 3, то $S \subseteq -(2, 3)$ $(2, 3)$ принадлежит $W$ и $-(2, 3)$ принадлежит $L$. Следовательно, $S$ также принадлежит $L$. Итак, мы видим, что $W$ состоит точно из тех $S$, которые содержат два или более из элементов 1, 2, 3. Поэтому $W^m$ состоит точно из множеств $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$ [2]). Итак, $(1, 2, 3)$ есть для этой игры множество $I_0$ из п. 51.7.

Другими словами, ядро рассматриваемой игры есть игра трех лиц с участниками 1, 2, 3. Ее $W^m$ состоит из тех же $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$. Как уже упоминалось (в последний раз в п. 52.1), эта игра описывается символом $[1, 1, 1]_h$. Оставшиеся $n-3$ игроков, $4, \ldots, n$ являются «болванами».

Итак, мы видим, что случай $C^*$ представлен ровно одной игрой, а именно игрой трех лиц $[1, 1, 1]_h$ с числом «болванов», равным $n-3$.

**52.3.2.** Пусть имеет место случай $C_{n-1}$. Рассмотрим $S \subseteq I$. Предположим сначала, что игрок $n$ принадлежит $S$. Если $S$ не имеет других элементов, то $S$ — одноэлементное множество и, следовательно, принадлежит $L$. Если $S$ имеет другие элементы, скажем $i = 1, \ldots, n-1$, то $S \supseteq (i, n)$. Так как $(i, n)$ принадлежит $W$, то $S$ тоже. Другими словами, если $S$ содержит $n$, то $S$ принадлежит $W$, за исключением случая, когда $S = (n)$. Применяя это к $-S$, мы получим, что если $n$ не принадлежит $S$, то $S$ принадлежит $W$, когда $-S$ не принадлежит $W$, т. е. тогда и только тогда, когда $-S = (n)$; иными словами $S = (1, \ldots, n-1)$.

---

1) А именно подстановкой $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n \\ n, & 1, & 2, & \ldots, & n-1 \end{pmatrix}$; см. п. 28.1.1.

2) Эти двухэлементные множества принадлежат $W^m$ по определению, но мы показали сейчас, что они исчерпывают $W^m$ полностью.

Следовательно, $W$ состоит точно из следующих $S$: все подмножества, содержащие $n$, за исключением $(n)$, а также множество $(1, \ldots, n-1)$. Легко проверить, что $W$ действительно удовлетворяет требованиям (49:W*), а также что эта игра может быть описана как взвешенная мажоритарная игра. Все игроки $1, \ldots, n-1$ имеют одинаковый вес, в то время как игрок $n$ имеет вес, в $n-2$ раза больший. Таким образом, эта игра описывается символом $[1, \ldots, 1, n-2]$.

$W^m$ немедленно получается из $W$. Оно состоит точно из следующих $S$: $(1, n), \ldots, (n-1, n), (1, \ldots, n-1)$ [1]). Легко проверить, что эта игра однородна и нормирована с $a = 1$. Это значит, что $a_S = 1$ (см. п. 50.2) для всех $S$ из этого $W^m$. Поэтому мы можем написать $[1, \ldots, 1, n-2]_h$.

Итак, мы видим, что случай $C_{n-1}$ представлен только одной игрой — игрой $n$ лиц $[1, \ldots, 1, n-2]_h$.

**52.3.3.** Пусть имеет место случай $C_{n-2}$. Рассмотрим некоторое $S \subseteq I$. Предположим сначала, что $n$ принадлежит $S$. Если $S$ не содержит других элементов, кроме, возможно, $n-1$, то $S \subseteq (n-1, n)$. Но $(n-1, n)$ не принадлежит $W^m$, а потому и $W$ (по (52:A) из п. 52.2.1). Поэтому $S$ принадлежит $L$ вместе с $(n-1, n)$. Если $S$ имеет элементы, отличные от $n-1$, скажем $i = 1, \ldots, n-2$, то $S \supseteq (i, n)$. Множество $(i, n)$ принадлежит $W$, а поэтому и $S$ принадлежит $W$. Итак, мы видим, что если $n$ принадлежит $S$, то $S$ принадлежит $W$, за исключением случаев $S = (n)$ или $S = (n-1, n)$. Применяя это к дополнению $-S$, мы получим, что если $n$ не содержится в $S$, то $S$ принадлежит $W$, когда $-S = (n)$ или $-S = (n-1, n)$, т. е. $S = (1, \ldots, n-1)$ или $(1, \ldots, n-2)$.

Следовательно, $W$ состоит из следующих множеств $S$: все подмножества, содержащие $n$, за исключением $(n)$ и $(n-1, n)$; множества $(1, \ldots, n-2)$ и $(1, \ldots, n-1)$. Легко проверить, что это $W$ действительно удовлетворяет условиям (49:W*).

$W^m$ немедленно получается из $W$. Оно состоит из следующих $S$: $(1, n), \ldots, (n-2, n)$ и $(1, \ldots, n-2)$ [2]). Итак, $(1, \ldots, n-2, n)$ есть $I_0$ из п. 51.7 для этой игры.

Другими словами, ядро рассматриваемой игры есть игра $n-1$-го лица с участниками $1, \ldots, n-2, n$. Ее $W^m$ состоит из $(1, n), \ldots$ $\ldots, (n-2, n), (1, \ldots, n-2)$. Таким образом, случай $C_{n-2}$ для $n-1$ игроков есть аналог случая $C_{n-1}$ для описанного выше случая $n$ игроков. Поэтому эта игра описывается символом $[1, \ldots, 1, n-3]_h$. Оставшийся $n-1$-й игрок является «болваном».

Итак, мы видим следующее.

Случай $C_{n-2}$ представлен ровно одной игрой [3]) — игрой $n-1$ игроков $[1, \ldots, 1, n-3]_h$ с одним «болваном».

---

[1]) Таким образом, двухэлементными множествами $W^m$ являются $(1, n), \ldots$ $\ldots, (n-1, n)$, как и должно быть по определению. Новым фактом является здесь то, что единственный элемент $W^m$, кроме перечисленных, есть $(1, \ldots, n-1)$.

Заметим, что последнее множество не есть двухэлементное только потому, что $n \geqq 4$.

[2]) Таким образом, двухэлементными множествами $W^m$ являются $(1, n), \ldots$ $\ldots, (n-2, n)$, как и должно быть по определению. Новым фактом является то, что единственный элемент $W^m$, отличный от перечисленных, есть $(1, \ldots, n-2)$.

Для $n = 4$ последнее множество также двухэлементное, в результате чего изменяется класс игры (он становится $C^*$ вместо $C_{n-2}$, т. е. $C_2$).

Следовательно, класс $C_{n-2}$ непуст только при $n \geqq 5$.

[3]) Для $n \geqq 5$. Случай $C_{n-2}$ пуст для $n = 4$. См. предыдущую сноску.

## 52.4. Простые игры, отличные от $[1, \ldots, 1, l-2]_h$ (с «болванами»). Случаи $C_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-3$

**52.4.** Результаты п. 52.3 заслуживают дальнейшего рассмотрения и переформулировки. Мы видели, что для каждого $l \geqq 4$ можно составить однородную взвешенную мажоритарную игру $l$ игроков $[1, \ldots, 1, l-2]_h$ [1]). Мы можем составить ее даже при $l = 3$. В этом случае игра оказывается чисто мажоритарной игрой трех участников $[1, 1, 1]_h$. Итак, мы можем пользоваться этим фактом для всех $l \geqq 3$.

Если $n \geqq 4$, то мы можем получить простую игру $n$ лиц, образуя $[1, \ldots, 1, l-2]_h$ для любого $l = 3, \ldots, n$ и добавляя необходимое число «болванов».

Результатом п. 52.3 было то, что такая игра при $l = 3$, $n$ и $n-1$ (для $n \geqq 5$) исчерпывает случаи $C^*$, $C_{n-1}$, $C_{n-2}$.

Особенностью этого результата является то, что эти значения $l$ не исчерпывают всех своих возможностей $l = 3, \ldots, n$ (см. выше). Точнее говоря, это исчерпание имеет место для $n = 4$, 5, но не для $n \geqq 6$. Остаются $l = 4, \ldots, n-2$ для $n \geqq 6$. В чем их смысл?

Ответ состоит в следующем. Рассмотрим игру $[1, \ldots, 1, l-2]_h$ ($l$ участников) с $n-l$ «болванами». Предположим только, что $l = 3, \ldots$ $\ldots, n$ и $n \geqq 4$. $W^m$ состоит из $(1, l), \ldots, (l-1, l)$ и $(1, \ldots, l-1)$ [2]). Поэтому мы имеем случай $C^*$ при $l = 3$ и случай $C_{l-1}$ при $l = 4, \ldots, n$ [3]).

Таким образом, мы имеем в этих играх образцы случаев $C^*$, $C_3, \ldots$ $\ldots, C_{n-1}$. Результат п. 52.3 можно теперь сформулировать так: случаи $C^*$, $C_{n-2}$, $C_{n-1}$ исчерпываются явными указаниями на соответствующие игры [4]).

Переформулируем это утверждение.

(52:B) Мы хотим перечислить все простые игры $n$ лиц для $n \geqq 4$. Игра $[1, \ldots, 1, l-2]_h$ с числом $n-l$ «болванов» есть простая игра для всех $l = 3, \ldots, n$. Эта игра подпадает соответственно под случай $C^*$, $C_3, \ldots, C_{n-1}$. Все остальные простые игры $n$ лиц (если такие есть) описываются случаями $C_0$, $C_1, \ldots, C_{n-3}$ [5]).

## 52.5. Описание случаев $n = 4$, 5

**52.5.1.** Мы рассмотрим полностью случаи значений $n = 4$, 5 и приведем несколько характерных примеров для $n = 6$, 7.

Случай $n = 4$ разбирается легко. В силу (52:B), при этом $n$ нам нужно проводить исследование только для $C_0$ и $C_1$. В этих случаях $W^m$ содержит не более одного двухэлементного множества. Однако это невозможно, так как дополнение двухэлементного множества есть двухэлементное

---

[1]) См. случай $C_{n-1}$ с $l$ вместо $n$.

[2]) Мы выбрали игроков $1, \ldots, l$ участниками ядра $[1, \ldots, 1, l-2]_h$, а игроков $l+1, \ldots, n$ — в качестве «болванов». Это отличается от соглашения в п. 52.3 для случая $C_{n-1}$,— где $l = n-1$, а «болваном» был игрок $n-1$,— перестановкой игроков $n-1$ и $n$.

[3]) Для $l = 3$ $C^*$ можно заменить на $C_2$, так как $(1, \ldots, l-1)$ в этом случае есть двухэлементное множество.

[4]) Таким образом, $C_2$ пусто при $n \leqq 4$, ибо $C_2$ входит во второй список случаев, но не входит в первый. См. п. 52.3.

[5]) Все те случаи, которые нам удалось исчерпать до сих пор, были либо пусты, либо содержали ровно одну игру. Это, однако, в общем случае неверно. См. первое замечание в п. 53.2.1.

множество. Следовательно, в $W$ и в $L$ должно быть одинаковое число двухэлементных множеств, а именно по 3. Итак, $W$ содержит 3 двухэлементных множества, и то же самое верно для $W^m$ [1]).

Таким образом, единственными простыми играми для $n = 4$ являются игры из (52:B). Сформулируем это следующим образом.

(52:C) Если пренебречь играми, которые получаются добавлением «болванов» к простым играм с числом игроков меньше четырех [2]), то существует только одна простая игра четырех лиц: $[1, 1, 1, 2]_h$.

52.5.2. Рассмотрим теперь случай $n = 5$. В силу (52:B), нам нужно исследовать $C_0$, $C_1$, $C_2$. В отличие от $n = 4$, все они предоставляют конкретные возможности.

$C_0$. Никакое двухэлементное множество не содержится в $W^m$, а потому и в $W$. Следовательно, все они содержатся в $L$, а их дополнения, т. е. трехэлементные множества, в $W$. Таким образом, $W$ состоит из всех множеств с числом элементов $\geqq 3$, а $W^m$ — из всех трехэлементных множеств. Следовательно, мы имеем дело с чисто мажоритарной игрой $[1, 1, 1, 1, 1]_h$.

$C_1$. $(1, 2)$ есть единственное двухэлементное множество в $W^m$ и тем самым в $W$. Переходя к дополнениям, мы получим, что $(3, 4, 5)$ — единственное трехэлементное множество в $L$, т. е. остальные трехэлементные множества содержатся в $W$. Таким образом, $W$ состоит из следующих множеств: $(1, 2)$, все трехэлементные множества, кроме $(3, 4, 5)$, все четырех- и пятиэлементные множества. Легко проверить, что это $W$ удовлетворяет условиям (49:W*), а также что $W^m$ состоит из следующих множеств: $(1, 2)$, $(a, b, c)$, где $a = 1, 2$, а $b$, $c$ равны любым двум из 3, 4, 5. Теперь легко увидеть, что эта игра описывается символом $[2, 2, 1, 1, 1]_h$.

$C_2$. $(1, 2)$ и $(1, 3)$ суть единственные двухэлементные множества в $W^m$ и, следовательно, в $W$. Переходя к дополнениям, мы получим, что $(3, 4, 5)$ и $(2, 4, 5)$ — единственные трехэлементные множества в $L$, т. е. остальные трехэлементные множества содержатся в $W$. Таким образом, $W$ состоит из следующих множеств: $(1, 2)$, $(1, 3)$, все трехэлементные множества, кроме $(2, 4, 5)$, $(3, 4, 5)$, все четырех- и пятиэлементные множества. Легко проверить, что это $W$ удовлетворяет (49:W*), а также что $W^m$ состоит из следующих множеств:

$$(1, 2), (1, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (1, 4, 5).$$

Теперь легко видеть, что эта игра описывается символом $[3, 2, 2, 1, 1]_h$.

Таким образом, простыми играми для $n = 5$ являются эти три игры и игры из (52:B).

Сформулируем сказанное следующим образом:

(52:D) Если пренебречь играми, которые получаются добавлением «болванов» к простым играм для $n < 5$ [3]), то существуют ровно четыре простые игры пяти лиц: $[1, 1, 1, 1, 1]_h$, $[1, 1, 1, 2, 2]_h$ [4]), $[1, 1, 2, 2, 3]_h$ [4]), $[1, 1, 1, 1, 3]_h$.

---

[1]) Используется (52:A) из п. 52.2.1. Далее мы будем пользоваться этим фактом без ссылок.

[2]) То есть к единственной простой игре трех лиц $[1, 1, 1]_h$.

[3]) То есть к $[1, 1, 1]_h$ и $[1, 1, 1, 2]_h$.

[4]) Мы переставили игроков в этих играх (принадлежащих $C_1$ и $C_2$) для того, чтобы иметь возрастающее расположение весов.

## § 53. НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДЛЯ ПРОСТЫХ ИГР ПРИ $n \geqq 6$

### 53.1. Закономерности, обнаруженные для $n < 6$

**53.1.** Прежде чем идти дальше, выведем некоторые заключения из предыдущего.

Первое. Все простые игры, которые были получены до сих пор, описывались символом $[w_1, \ldots, w_n]_h$, т. е. были однородными взвешенными мажоритарными играми. Возникает вопрос, не будет ли это верным всегда. Как указывалось в сноске 3 на стр. 452, это не так. Первый контрпример получается при $n = 6$.

Второе. До сих пор каждый класс $C_k$, содержащий какую-либо игру, содержал только одну игру. Это также нарушается при $n = 6$. (См. первое замечание в п. 53.2.1.)

Третье. Априори можно было бы думать, что имеет место большая свобода в выборе весов для однородной взвешенной мажоритарной игры. Наш перечень игр (для $n < 6$) показывает, однако, что эти варианты очень ограничены. Их оказывается по одному для $n = 3$, 4 и четыре для $n = 5$ [1]). Мы подчеркиваем, что, так как наши перечни игр являются исчерпывающими, это есть строго установленный, объективный факт, а не более или менее произвольная особенность нашей процедуры.

Четвертое. Мы можем проверить утверждение сноски 1 на стр. 455 о том, что, в то время как число элементов $W$ определяется числом $n$ (оно равно $2^{n-1}$), число элементов $W^m$ для простых игр с одним и тем же $n$ может быть различным. Это явление начинает иметь место с $n = 5$.

Для $n = 3$ множество $W$ имеет 4 элемента; $W^m$ в единственном примере имеет 3 элемента. Для $n = 4$ множество $W$ имеет 8 элементов; $W^m$ в единственном примере имеет 4 элемента. Для $n = 5$ множество $W$ имеет 16 элементов, а $W^m$ в четырех примерах имеет соответственно 10, 7, 5 и 5 элементов.

Пятое. Мы можем проверить утверждение сноски 2 на стр. 452 о том, что число уравнений (50:8) из пп. 50.4.3, 50.6.2 (с $U = W^m$) может быть больше числа переменных, и тем не менее решение существует, т. е. существует система дележей в обычном смысле. Первое означает, что $W^m$ имеет больше чем $n$ элементов, а второе, несомненно, есть случай однородной взвешенной мажоритарной игры ((50:K) из п. 50.8.1).

Мы видели выше, что для $n = 3$, 4 множество $W^m$ имеет $n$ элементов, но для $n = 5$ $W^m$ может иметь 10 или 7 элементов, и все эти игры суть однородные взвешенные мажоритарные игры [2]).

По поводу простых игр, где таких решений нет, см. пятое замечание в п. 53.2.5.

### 53.2. Шесть основных контрпримеров (для $n = 6$, 7)

**53.2.1.** Мы переходим теперь к $n = 6$, 7. Полный обзор этих случаев, даже для $n = 6$, был бы довольно громоздким. По этой причине мы от него отказываемся. Мы приведем только несколько характерных примеров простых игр для $n = 6$, 7, на которых иллюстрируются определенные явления, начинающиеся, как упоминалось выше, с этих $n$.

---

[1]) С точностью до перестановки игроков!

[2]) Таким образом, мы имеем первые контрпримеры уже при $n = 5$: $[1, 1, 1, 1, 1]_h$ чисто мажоритарная игра) и $[1, 1, 1, 2, 2]_h$.

Первое. Мы упоминали во втором замечании п. 53.1, что для $n = 6$ случай $C_k$ может охватывать несколько игр. Действительно, нетрудно проверить, что две однородные взвешенные мажоритарные игры

$$[1, 1, 1, 2, 2, 4]_h, \quad [1, 1, 1, 3, 3, 4]_h$$

(см. сноску 4 на стр. 471) отличны друг от друга и принадлежат обе к $C_2$.

**53.2.2.** Второе. Мы упоминали в первом замечании п. 53.1, что для $n = 6$ существует простая игра, которая не является однородной взвешенной мажоритарной игрой, т. е. игра, не описываемая каким-либо символом $[w_1, \ldots, w_n]_h$. По (50:K) из п. 50.8.1 это неизбежно будет в том случае, когда не существует главного простого решения, т. е. никакой системы дележей в обычном смысле. (См. пятое замечание в п. 53.1.)

Такие игры фактически существуют и даже поддаются дальнейшей дифференциации. Среди них можно найти игру, которая тем не менее является взвешенной мажоритарной игрой (но не однородной!), т. е. описывается символом $[w_1, \ldots, w_n]$, и можно также найти игру, которая не имеет даже этого свойства.

Начнем с первой упомянутой альтернативы.

Положим $n = 6$. Определим $W$ как систему всех тех множеств $S \subseteq I = (1, \ldots, 6)$, которые либо содержат большинство всех игроков (т. е. имеют $\geqq 4$ элементов), либо содержат ровно половину игроков (т. е. имеют 3 элемента), но большинство из игроков 1, 2, 3 (т. е. $\geqq 2$ из них). Другими словами, игроки 1, 2, 3 образуют привилегированную группу по отношению к игрокам 4, 5, 6, но их привилегии довольно ограничены. Обычное большинство выигрывает; только в случае равенства решает большинство из привилегированной группы.

Легко проверить, что это $W$ удовлетворяет условиям (49:W*). Игра, очевидно, является взвешенной мажоритарной. Достаточно дать членам привилегированной группы (1, 2, 3) некоторый излишек веса над членами из группы (4, 5, 6), который должен быть недостаточным для преобладания над обычным большинством. Любой символ

$$[w, w, w, 1, 1, 1]$$

с $1 < w < 3$ удовлетворяет этому условию[1]).

$W^m$ определяется легко; оно состоит из следующих множеств:

$$(S_1)\begin{cases} (S_1'):\ (1, 2, 3); \\ (S_1''):\ (a, b, h), \quad \text{где } a,\ b \text{ — любые два элемента из } 1,\ 2,\ 3; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad h = 4, \text{ или } 5, \text{ или } 6; \\ (S_1'''):\ (a, 4, 5, 6), \text{ где } \quad a = 1, \text{ или } 2, \text{ или } 3\ ^{2)}. \end{cases}$$

Уравнения (50:8) из пп. 50.4.3 и 50.6.2 (с $U = W^m$), которые определяют главное простое решение в смысле п. 50.8.1, суть

$$(E_1)\begin{cases} (E_1'):\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ (E_1''):\ x_a + x_b + x_h = 6, \text{ где } a,\ b \text{ — любые два из } 1,\ 2,\ 3; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad h = 4, \text{ или } 5, \text{ или } 6; \\ (E_1'''):\ x_a + x_4 + x_5 + x_6 = 6, \text{ где } a = 1, \text{ или } 2, \text{ или } 3. \end{cases}$$

---

[1]) $w > 1$ необходимо, так как коалиция $S = (1, 2, 4)$ выигрывает у $-S = (3, 5, 6)$ (т. е. $2w + 1 > w + 2$); $w < 3$ необходимо, так как коалиция $S = (3, 4, 5, 6)$ побеждает $-S = (1, 2)$ (т. е. $w + 3 > 2w$).

[2]) Таким образом, $W^m$ насчитывает $1 + 9 + 3 = 13$ элементов.

Эти уравнения ($E_1$) решить нельзя [1]). Действительно, ($E_1''$) с $a=1$, $b=2$ и $h=4, 5, 6$ показывает, что $x_4=x_5=x_6$; ($E_1'''$) с $a=1, 2, 3$ показывает, что $x_1=x_2=x_3$; далее ($E_1'$) дает $3x_1=6$, т. е. $x_1=2$; следовательно, ($E_1''$) дает $4+x_4=6$, $x_4=2$, и тогда ($E_1'''$) дает $2+6=6$ — противоречие.

Стоит заметить, что обычный экономический аспект этого явления мог бы быть следующим: ($S_1''$) (т. е. ($E_1''$)) показывает, что услуги игроков 4, 5, 6 взаимозаменяемы и поэтому имеют равное значение. ($S_1'''$) (т. е. ($E_1'''$)) показывает то же самое для 1, 2, 3. Далее, сравнение ($S_1'$) и ($S_1''$) показывает, что один игрок из группы 1, 2, 3 может быть заменен одним игроком из группы 4, 5, 6, а сравнение ($S_1''$) и ($S_1'''$) показывает, что один игрок из первой группы может быть заменен двумя игроками из второй. Поэтому никакой показатель заменяемости между этими двумя группами вообще не может быть определен. Естественно было бы объявить, что некоторые множества из $W^m$, перечисленные в ($S_1$), используют услуги игроков неприбыльно. В смысле п. 50.4.3 это означает выбор $U \subset W^m$ (см. также п. 50.7.1 и сноску 4 на стр. 452). Существует ли в этой игре $U \subset W^m$, обладающее требуемыми свойствами (см. п. 50.7.1), может быть решено простым, но довольно длительным комбинаторным исследованием, которое еще не выполнено. Существование такого $U$ маловероятно, так как можно показать, что если бы оно существовало, то обладало бы математически неправдоподобными характеристиками.

Эта игра является особенной также и в другом отношении. Можно доказать, что не существует решения **V**, которое содержало бы только конечное число дележей и которое обладало бы полной симметрией самой игры, т. е. инвариантностью относительно всех перестановок игроков 1, 2, 3 и относительно всех перестановок игроков 4, 5, 6. Мы не рассматриваем здесь [2]) этого довольно длинного доказательства. Таким образом, типа решения, которое можно было бы назвать естественным, не существует.

Это указывает, до какой степени аккуратным следует быть, называя необычные решения «неестественными» или пытаясь их исключить.

**53.2.3.** Третье. Рассмотрим второй случай, упомянутый выше во втором замечании простая игра для $n=6$, которая, вообще говоря, не является мажоритарной, т. е. которая не описывается символом $[w_1, \ldots, w_n]$. Этот случай сам поддается дальнейшему подразделению. Можно найти такую игру, которая обладает главным простым решением (см. выше), а также можно найти игру, которая не имеет главного простого решения.

Рассмотрим первый случай.

Возьмем $n=6$. Определим $W$ как систему всех таких множеств $S$ ($\subseteq I=(1, \ldots, 6)$), которые либо содержат большинство игроков, либо содержат ровно половину их (т. е. имеют 3 элемента), но при этом содержат четное число из игроков 1, 2, 3 (т. е. 0 или 2 из них). Сравнивая это определение с примером из второго замечания, следует заметить, что игроки 1, 2, 3 все еще образуют группу особой значимости, но было бы заблуждением называть их значимость привилегией, так как их отсутствие в трехэлементном множестве $S$ в такой же мере выгодно, как и сильное представительство (т. е. присутствие ровно двух из них), а присутствие всех их точно так же гибельно, как и их слабое представительство (т. е. при-

[1]) Здесь имеется 13 уравнений относительно шести неизвестных, но само по себе это еще не является препятствием, как показывает пятое замечание в п. 53.1.

[2]) Неизвестно, существует ли вообще какое-либо конечное решение **V**. Мы подозреваем, что даже на этот вопрос ответ может быть отрицательный.

сутствие ровно одного из них). Они осуществляют решение не своим присутствием в $S$, а посредством некоторого арифметического отношения [1]).

Легко проверить, что это $W$ удовлетворяет условиям (49:W*) из п. 49.6.2 [2]).

Определим теперь $W^m$. Так как $W$ содержит все множества с числом элементов не менее четырех, то никакие множества с числом элементов более пяти не могут принадлежать $W^m$. Рассмотрим теперь четырехэлементное множество в $W$.

Если число игроков 1, 2, 3 в нем четно, то исключим из него игрока 4, или 5, или 6. Если число игроков 1, 2, 3 в нем нечетно, то исключим из него игрока 1, или 2, или 3. В любом случае получится трехэлементное множество с четным числом игроков 1, 2, 3, т. е. множество из $W$. Итак, никакое четырехэлементное множество не может принадлежать $W^m$. Следовательно, $W^m$ состоит из трехэлементных множеств

$$(S_2)\begin{cases}(S_2')\colon\ (4,\ 5,\ 6);\\(S_2'')\colon\ (a,\ b,\ h),\ \text{где}\ a,\ b=\text{любым двум из}\ 1,\ 2,\ 3;\\ \qquad\qquad h=4,\ \text{или}\ 5,\ \text{или}\ 6\,^{3)}.\end{cases}$$

Если бы эта игра описывалась символом $[w_1, \ldots, w_n]$, то было бы

$$\sum_{i\in S} w_i > \sum_{i\notin S} w_i \quad \text{для всех}\ S\in W.$$

Применим это к множествам из $W^m$, перечисленным в $(S_2)$. Это даст, в частности,

$$w_4+w_5+w_6>w_1+w_2+w_3,$$
$$w_1+w_2+w_6>w_3+w_4+w_5,$$
$$w_1+w_3+w_5>w_2+w_4+w_6,$$
$$w_2+w_3+w_4>w_1+w_5+w_6.$$

Складывая эти неравенства, мы получим

$$2(w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6)>2(w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6),$$

т. е. противоречие.

С другой стороны, равенствами (50:8) из пп. 50.4.3, 50.6.2 (с $U=W^m$), которые определяют главное простое решение, будут

$$(E_2)\begin{cases}(E_2')\colon\ x_4+x_5+x_6=6;\\(E_2'')\colon\ x_a+x_b+x_h=6,\ \text{где}\ a,\ b-\text{любые два из}\ 1,\ 2,\ 3;\\ \qquad\qquad h=4,\ \text{или}\ 5,\ \text{или}\ 6.\end{cases}$$

---

[1]) Заметим также, что группа 4, 5, 6 имеет аналогичную значимость. Так как $S$ должно иметь три элемента (для того чтобы эти критерии стали действовать), утверждение, что в $S$ четное число игроков из 1, 2, 3, эквивалентно утверждению, что в $S$ нечетное число игроков из 4, 5, 6.

Это дает дальнейшие подтверждения (если они кому-либо необходимы) нашему часто делаемому замечанию относительно большой сложности возможных форм социальной организации и чрезвычайного богатства сопутствующих явлений.

[2]) Заметим, в частности, что всегда одно из $S$ и $-S$ принадлежит $W$. Это очевидно, если одно из них имеет $\geqq 4$ элементов (и поэтому другое имеет $\leqq 2$). В противном случае $S$ и $-S$ имеют по три элемента. Поэтому одно из них содержит четное число игроков 1, 2, 3, а другое — нечетное.

[3]) Таким образом, $W^m$ насчитывает $1+9=10$ элементов.

Эти равенства имеют, очевидно, решение $x_1 = \ldots = x_6 = 2$ [1]).

В обычной экономической терминологии следовало бы сказать, что структурное различие между группами игроков 1, 2, 3 и 4, 5, 6 не может быть выражено с помощью весов и мажоритарности, и поскольку рассматриваются числа, они неразличимы.

**53.2.4.** Четвертое. Заметим, что приведенный выше пример позволяет также установить различие между принципом однородного взвешенного большинства и существованием главного простого решения, как обсуждалось в п. 50.8.2. Действительно, это — пример случая равенства в (50:21). Так как $x_1 = \ldots = x_6 = 2$ (см. выше), должно быть $\sum_{i=1}^{n} x_i = 12 = 2n$.

**53.2.5.** Пятое. Рассмотрим теперь второй случай, описанный в третьем замечании: простая игра для $n = 6$, которая не описывается символом

$$[w_1, \ldots, w_n],$$

и не имеет главного простого решения.

По сравнению с двумя предшествующими примерами, приведенными во втором и третьем замечаниях, этот пример основан на менее прозрачных принципах. Это неудивительно, так как теперь все наши упрощающие критерии оказываются невыполненными.

Положим $n = 6$. Определим $W$ как систему всех тех множеств $S$ ($\subseteq I = (1, \ldots, 6)$), которые содержат либо большинство всех игроков (т. е. имеют $\geqq 4$ элементов), либо ровно половину (т. е. 3) элементов и удовлетворяют следующим условиям: или $S$ содержит игрока 1, но отлично от (1, 3, 4) и от (1, 5, 6) [2]), или $S$ есть (2, 3, 4) или (2, 5, 6) [3,4]).

Легко проверить, что $W$ удовлетворяет условиям (49:W*) из п. 49.6.2. $W^m$ может быть определено без серьезных трудностей. Оно состоит из следующих множеств:

$$(S_3)\begin{cases} (S_3'): (1, 2, b), \text{ где } b = 3, 4, 5, 6; \\ (S_3''): (1, a, b), \text{ где } a = 3, 4;\ b = 5, 6\,^{5)}; \\ (S_3'''): (2, p, q), \text{ где } p = 3,\ q = 4 \text{ или } p = 5,\ q = 6\,^{5)}; \\ (S_4^{IV}): (3, 4, 5, 6)\,^{6)}. \end{cases}$$

Если бы эта игра описывалась символом $[w_1, \ldots, w_n]$, то было бы

$$\sum_{i \in S} w_i > \sum_{i \notin S} w_i \text{ для всех } S \in W.$$

---

[1]) Легко видеть, что это — единственное решение.

[2]) То есть это есть $(1, a, b)$ с $a = 2$, $b = 3$, или 4, или 5, или 6; или с $a = 3$, или 4, и $b = 5$, или 6.

[3]) Дополнения предварительно исключенных множеств (1, 5, 6), (1, 3, 4).

[4]) Если убрать исключение относительно (1, 3, 4), (1, 5, 6) и (2, 3, 4), (2, 5, 6), то $W$ определялось бы по следующему принципу. Игрок 1 привилегированный: нормально большинство побеждает, а в случаях равенства решает игрок 1.

Легко проверить, что это просто игра $[2, 1, 1, 1, 1, 1]_h$, т. е. этот случай даже более прост, чем наш — в некотором смысле аналогичный — пример из второго замечания выше, так как существующая здесь привилегия имеет числовое значение в соответствующем смысле.

Таким образом, сложное исключение, касающееся (1, 3, 4), (1, 5, 6) и (2, 3, 4), (2, 5, 6), является решающим для выявления действительного характера нашего примера.

[5]) Заметим, что $a$ и $b$ изменяются независимо друг от друга, а $p$ и $q$ — нет.

[6]) Таким образом, $W^m$ насчитывает $4 + 4 + 2 + 1 = 11$ элементов.

Применим это к множествам из $W^m$, перечисленным в $(S_3)$. В частности, мы получим

$$w_1+w_3+w_5>w_2+w_4+w_6, \qquad w_2+w_3+w_4>w_1+w_5+w_6,$$
$$w_1+w_4+w_6>w_2+w_3+w_5, \qquad w_2+w_5+w_6>w_1+w_3+w_4.$$

Сложив эти четыре неравенства, мы получим

$$2(w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6)>2(w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6),$$

т. е. противоречие.

Уравнениями (50:8) из пп. 50.4.3, 50.6.2, которые определяют главное простое решение, будут уравнения

$$(E_3)\begin{cases} (E_3'): & x_1+x_2+x_b=6, \text{ где } b=3,\ 4,\ 5,\ 6; \\ (E_3''): & x_1+x_a+x_b=6, \text{ где } a=3,\ 4;\ b=5,\ 6. \\ (E_3'''): & x_2+x_p+x_q=6, \text{ где } p=3,\ q=4 \text{ или } p=5,\ q=6; \\ (E_3^{\text{IV}}): & x_3+x_4+x_5+x_6=6. \end{cases}$$

Эти уравнения $(E_3)$ неразрешимы [1]. Действительно, $(E_3'')$ показывает, что $x_3 = x_4$ и $x_5 = x_6$. Следовательно, $(E_3''')$ дает $x_2 + 2x_3 = 6$, $x_2 + 2x_5 = 6$; следовательно, $x_3 = x_5$ и поэтому $x_3 = x_4 = x_5 = x_6$. Далее, $(E_3^{\text{IV}})$ дает $4x_3 = 6$ и $x_3 = 3/2$, в то время как $(E_3'')$ и $(E_3''')$ дают $x_1 + 3 = 6$ и $x_2 + 3 = 6$, т. е. $x_1 = x_2 = 3$. Наконец, из $(E_3')$ мы получаем $3 + 3 + \frac{3}{2} = 6$ — противоречие.

Что касается интерпретации этой неразрешимости, то здесь по существу уместны те же комментарии, что и приведенные к соответствующему месту во втором замечании.

**53.2.6.** Шестое. Мы уже упоминали различие между принципом однородного взвешенного большинства и существованием главного простого решения, как обсуждалось в п. 50.8.2. Это было сделано в четвертом замечании, где был приведен пример для случая = в (50:21). Мы дадим теперь пример для случая > в (50:21).

Так как мы нашли, что для $n \leqq 5$ все простые игры являются однородными взвешенными мажоритарными играми, мы должны предполагать, что $n \geqq 6$. Мы не знаем, существует ли искомый пример для $n = 6$; в том примере, который мы приведем, $n = 7$.

Положим $n = 7$. Определим $W$ как систему всех тех множеств $S$ $(\subseteq I = (1, \ldots, 7))$, которые содержат какое-нибудь из следующих семи трехэлементных множеств [2]

$$(S_4): (1, 2, 4),\ (2, 3, 5),\ (3, 4, 6),\ (4, 5, 7),\ (5, 6, 1),\ (6, 7, 2),\ (7, 1, 3).$$

Принцип, на котором основано это определение, может быть проиллюстрирован различными способами.

Вот один из них. Семь множеств $(S_4)$ получаются из первого (1, 2, 4) циклической перестановкой, т. е. увеличением номера каждого из своих элементов на любое из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, считая при этом, что числа 8, 9, 10, 11, 12, 13 тождественны соответственно числам 1, 2, 3, 4, 5, 6 [3].

---

[1] Имеется 10 уравнений относительно шести неизвестных; см. сноску 1 на стр. 474.

[2] Таким образом, $W^m$ имеет 7 элементов.

[3] По терминологии теории чисел, отождествляются числа, сравнимые по модулю 7.

Другими словами, они получены из множества точек, помеченных крестиками на рис. 68, любым из семи поворотов, которые переводят эту фигуру в себя.

Другая иллюстрация. На рис. 69 изображена конфигурация игроков 1, ..., 7, на которой можно непосредственно указать семь множеств из $(S_4)$. Они указываются шестью прямыми линиями и окружностью [1]).

Проверка того, что $W$ удовлетворяет условиям (49:W*), нетрудна, но мы предпочитаем предоставить ее читателю, если он интересуется этим видом комбинаторики. $W^m$ состоит, очевидно, из семи множеств $(S_4)$.

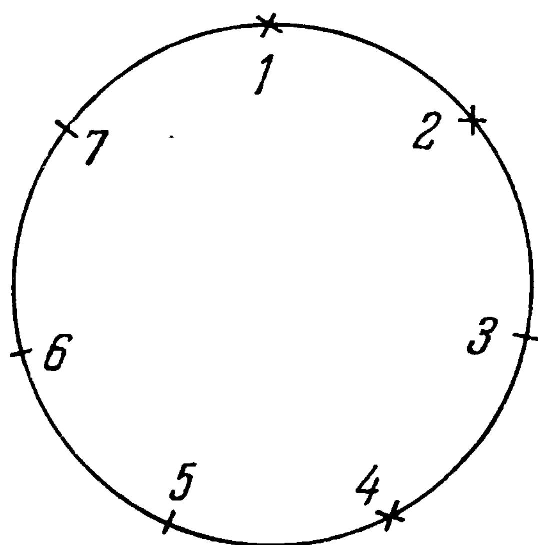


Рис. 68.

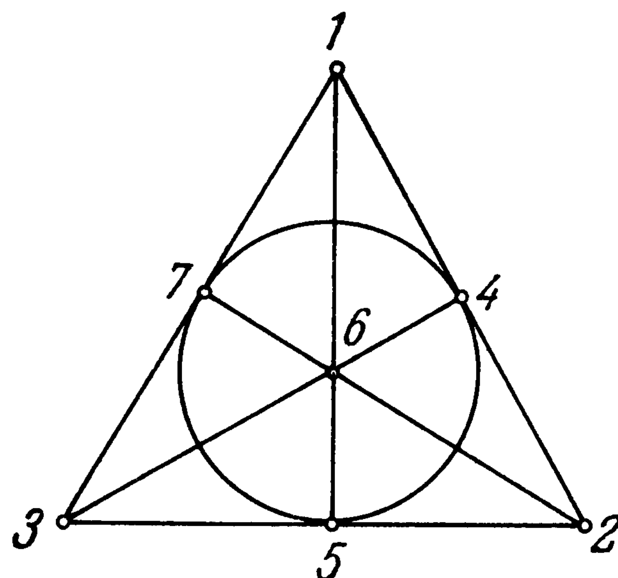


Рис. 69.

Легко показать, что это не есть взвешенная мажоритарная игра. Мы опустим соответствующее рассуждение.

С другой стороны, уравнения (50:8) из пп. 50.4.3, 50.6.2 (с $U = W^m$), которые определяют главное простое решение, таковы:

$(E_4)$: $x_a + x_b + x_c = 7$, где $(a, b, c)$ пробегают 7 множеств $(S_4)$.

Эти уравнения, очевидно, имеют решение $x_1 = \ldots = x_7 = 7/3$ [2]).

Мы можем теперь установить, что в (50:21) из п. 50.8.2 имеет место знак $>$. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{49}{3} > 14 = 2n.$$

Так же как и игры, которые обсуждались во втором, третьем и пятом замечаниях, эта игра соответствует организационному принципу, который заслуживает более пристального изучения. В этой игре каждое множество из $W^m$, т. е. решающая выигрывающая коалиция, всегда составляет меньшинство (все они — трехэлементные множества). Тем не менее никакой игрок не имеет никаких преимуществ перед остальными. Рис. 68 и его рассмотрение показывают, что любая циклическая перестановка игроков 1, ..., 7, т. е. любой поворот круга на рис. 68, оставляет структуру игры неизменной. Любой игрок может быть переведен этим способом на место любого другого игрока [3]). Таким образом, структура этой игры

[1]) Читатель, который знаком с проективной геометрией заметит, что рис. 69 есть изображение так называемой 7-точечной плоской геометрии. Семь искомых множеств суть ее прямые линии, каждая из которых содержит по три точки, и окружность, обладающая тем же свойством.

[2]) Легко видеть, что это решение единственное.

[3]) Тем не менее эта игра не является безобидной в смысле п. 28.2.1, так как, например, два трехэлементных множества (1, 2, 4) и (1, 3, 4) действуют различно. Первое из этих множеств принадлежит $W$, а второе принадлежит $L$. (Так, в редуцированной форме игры, с $\gamma = 1$, значение $v(S)$ для первого множества равно 4, а для второго равно — 3.)

определяется не индивидуальными свойствами игроков [1]) (как мы видим, все они в равном положении), а отношениями между игроками. Именно, взаимопонимание, достигаемое между тремя игроками, которые связаны в $(S_4)$ [2]), решает вопрос о победе или поражении.

## § 54. НАХОЖДЕНИЕ ВСЕХ РЕШЕНИЙ В СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИГРАХ

### 54.1. Основания для рассмотрения в простых играх решений, отличных от главного решения

**54.1.1.** До сих пор при исследовании простых игр наше внимание было сосредоточено в основном на решениях специального типа, рассматривавшихся в пп. 50.5.1—50.7.2, и особенно на главном простом решении из п. 50.8.1. На основании изученного в предыдущих параграфах, особенно на основании примеров из п. 53.2, такой подход не представляется оправданным в равной мере для всех аспектов нашей задачи.

Прежде всего, мы видели, что нельзя ожидать, чтобы все простые игры имели решения указанного типа. Уже при $n = 6$ появляется обилие новых возможностей. Это знаменательно, так как 6 есть крупное число с комбинаторной точки зрения, но малое с точки зрения социальной организации.

Далее, даже когда эти решения существуют, фактически даже для случая однородных взвешенных мажоритарных игр, они не описывают полностью всего положения вещей. Для наиболее примитивного представителя такого класса, для существенной игры трех лиц, обозначаемой, как мы знаем, через $[1, 1, 1]_h$, существует много решений. А рассмотрения в § 33 показывают, что все они важны для понимания характерных особенностей и выводов нашей теории — фактически некоторые основные интерпретации были получены впервые именно на этом пути.

**54.1.2.** Следовательно, важно уметь находить все решения простой игры и, пока мы не можем этого осуществить для всех простых игр, сделать это для возможно большего их числа. В частности, это должно быть сделано хотя бы для одной простой игры при каждом значении $n$. Эти результаты дали бы некоторые сведения о структурных возможностях и принципах классификации решений для случая $n$ участников.

Конечно, было бы в равной степени желательно получить такие сведения не только для простых игр. Однако простые игры обладают явным преимуществом перед всеми другими, когда решения нужно находить систематически. Именно, для простых игр так называемые предварительные условия из п. 30.1.1 не вызывают трудностей (см. п. 31.1.2), так как в этом случае каждое множество $S$ или заведомо необходимо, или заведомо не необходимо (см. п. 49.7).

Ясно также, что подобные результаты дали бы сведения только относительно нескольких изолированных случаев. Тем не менее они охватили бы все $n$, т. е. позволили бы изменять $n$ произвольно. Это может привести к важным интуитивным представлениям.

---

[1]) Которые могут быть заданы правилами игры.

[2]) В этой игре нет никаких существенных связей между какими-либо игроками. Любых двух игроков можно перевести в любых двух других игроков соответствующей перестановкой (всех игроков 1, . . ., 7), относительно которой игра инвариантна.

## 54.2. Перечисление тех игр, для которых все решения известны

54.2.1. Перечислим те случаи, для которых мы уже знаем все решения игры. Их три:

(a) Все несущественные игры (см. (31:P) в п. 31.2.3, дополненное (31:I) из п. 31.2.1).

(b) Существенная игра трех лиц как в старой теории (эксцесс равен нулю), так и в новой (эксцесс произволен). (См. п. 32.2.3 для первого случая и анализ в пп. 47.2.1—47.7 для второго.)

(c) Все разложимые игры — в случае, если все решения компонент известны. (См. (46:I) в п. 46.6.)

Очевидно, можно использовать (c) и комбинировать игры из (a) и (b), получая, таким образом, игры, для которых все решения известны.

Замечание. Это можно выразить также следующим образом. Данная игра Г строится из своих неразложимых компонент, в соответствии с определением разлагающего разбиения в конце п. 43.3 и с (43:E). Мы знаем на основании (43:L) из п. 43.4.2, что множества, на которые это разбиение разделяет участников, являются множествами, состоящими из 1 или $\geqq 3$ элементов.

Простейшей возможностью поэтому будет такая, когда все эти множества одноэлементны. Согласно (43:J) в п. 43.4.1 это означает, что игра несущественна, т. е. мы снова приходим к случаю (a).

Следующая по простоте возможность — та, когда они все являются одно- или трехэлементными множествами. Это будут как раз те игры, которые можно образовать согласно (c) из (a) и (b). Значит, именно для таких игр мы знаем все решения.

Это удовлетворительно, так как оказывается, что классификация, основанная на размерах неразложимых компонент (т. е. элементов разлагающего разбиения, см. (43:L) в п. 43.4.2), является естественной: наше продвижение в получении всех решений следует точно по указываемым ею путям.

Это также подчеркивает, насколько ограниченны наши результаты: в действительности случай, когда игра вообще разложима, является очень частным. (Вспомним определяющие уравнения (41:6) или (41:7) из п. 41.3.2, соответствующие критерию в конце п. 42.5.2!) Как правило, игра $n$ лиц неразложима и не может быть получена при помощи (c).

В этом процессе построения случай (a) дает только «болванов» (см. конец п. 43.4.2); следовательно, можно обходиться без него, так как нам нужна структурная информация. Итак, остаются игры, которые получаются повторным применением (c) к (b). Таким способом можно получать игры, которые являются композициями существенных игр трех лиц [1]).

54.2.2 Это дает игры $n = 3k$ лиц, для которых мы знаем все решения. Так как число $k$ произвольно, число $n$ можно сделать произвольно большим. С этой точки зрения все обстоит удовлетворительно. Однако остается фактом, что такая игра $n$ лиц является всего лишь полимером существенной игры трех лиц — в действительности игроки образуют множества по 3, и при этом правила игры не связывают их друг с другом. На самом деле наши результаты о решениях разложимых игр показывают, что некоторая связь между этими множествами игроков тем не менее обеспечивается в типичном решении, т. е. посредством типичной нормы поведения. Однако мы, естественно, хотим узнать, каким образом обычный вид связи, явно установленной правилами игры, воздействует на организа-

---

[1]) Применяя стратегическую эквивалентность, можно предположить, что все они заданы в редуцированной форме. Однако, обозначая их соответствующие $\gamma$ через $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, нельзя рассчитывать сделать их все равными 1 при помощи изменения единицы измерения (если $k \neq 1$). Действительно, их отношения $\gamma_1 : \ldots : \gamma_k$ при изменениях единицы измерения не изменяются.

цию игроков, т. е. на решения или нормы поведения. И это желательно знать для большого числа игроков.

Следовательно, мы должны искать и другие игры $n$ лиц, для которых можно найти все решения.

### 54.3. Основания для рассмотрения простой игры $[1, \ldots, 1, n-2]_h$

**54.3.1.** Как отмечено выше, мы собираемся искать указанных представителей среди простых игр [1]). Тогда оказывается, что при каждом $n \geqq 3$ имеется некоторая простая игра, для которой это нахождение всех решений может быть осуществлено. Она является единственной игрой $n$ лиц, при произвольном $n$, для которой мы до сих пор преуспели в таком общем нахождении решений. Это, очевидно, придает ей особый интерес. Мы увидим также, что она допускает интересные во многих отношениях интерпретации.

Эта игра уже встречалась нам в п. 52.3 и в (52:B) из п. 52.4. Это — однородная взвешенная мажоритарная игра $[1, \ldots, 1, n-2]_h$ ($n$ игроков).

**54.3.2.** Как говорилось в п. 52.3, в этой игре минимальными выигрывающими коалициями $S$ являются следующие: $(1, n), \ldots, (n-1, n)$ и $(1, \ldots, n-1)$. Это значит, что игрок $n$ выигрывает, как только он находит какого-нибудь союзника, но если он остается полностью изолированным, то он проигрывает [2]): Здесь следует сделать некоторые замечания.

Первое. Это правило явно указывает, что игрок $n$ находится в привилегированном положении. Для того чтобы выиграть, ему нужно только одного союзника, в то время как остальные игроки нуждаются друг в друге без исключения. Фактически положение таково: игроку $n$ нужна коалиция из двух, а остальным нужна коалиция из $n-1$; следовательно, привилегия существует только при

$$n-1>2,$$

т. е. при

$$n \geqq 4.$$

Для $n=3$ в действительности нет никакой разницы между тремя игроками. Мы имеем тогда игру $[1, 1, 1]_h$, единственную существенную игру трех лиц, которая, очевидно, симметрична.

Второе. Привилегии игрока $n$ широки настолько, насколько это вообще возможно. Требуется, что игрок $n$ для своего выигрыша должен найти хотя бы одного союзника, и нельзя потребовать меньшего [3]). Невозможно полагать, что игрок $n$ может выиграть совсем без союзников, т. е. провозгласить одноэлементное множество $(n)$ выигрывающим,— это несовместимо с существенностью игры. (Это подробно обсуждалось в п. 49.2.)

---

[1]) Поэтому мы используем старую теорию, т. е. случай, когда эксцесс равен нулю. См. третье и четвертое замечания в п. 51.6.

[2]) Как это и должно быть для каждого одноэлементного множества.

[3]) Ранее мы говорили, что игрок $n$ вообще не имеет привилегии в этой игре при $n=3$, а теперь утверждаем, что он привилегирован так, как только возможно! Тем не менее случай $n=3$ не является исключением в указанном утверждении. Поскольку имеется вообще только одна существенная игра трех лиц, положение, в котором находится игрок, может также быть названо наилучшим возможным положением, так как такое положение только одно.

# § 55. ПРОСТАЯ ИГРА $[1, \ldots, 1, n-2]_h$

## 55.1. Предварительные замечания

**55.1.1.** Нахождение всех решений рассмотренной выше игры покажет, что они распадаются в сложную систему классов, обнаруживающих чрезвычайно разнообразные характерные особенности. Это создает возможность для интерпретаций, о которых мы ранее упоминали. Мы рассмотрим некоторые из них, тогда как дальнейшие обсуждения в этом направлении, по-видимому, появятся в более поздних исследованиях.

Строгий вывод этого полного списка решений будет дан в следующих пунктах (55.2—55.11). Этот вывод является довольно громоздким. Мы приводим его полностью по тем же причинам, что и аналогичный вывод для решений разложимых игр в главе IX: само доказательство является удобным и естественным средством для получения некоторых интерпретаций. Оно дает возможность на различных этапах словесно описывать возникающие структурные свойства рассматриваемых построений. Это обстоятельство фактически будет выражено в доказательствах этой главы еще более отчетливо, чем в главе IX.

## 55.2. Доминирование. Главный игрок. Случаи (I) и (II)

**55.2.1.** После этих предварительных рассуждений приступим к систематическому исследованию игры $[1, \ldots, 1, n-2]_h$ ($n$ игроков). Предположим, что игра представлена в редуцированной форме, нормированной с помощью $\gamma = 1$.

Начнем с непосредственного замечания о доминировании.

(55:A) Для $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и $\vec{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ доминирование $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ имеет место тогда и только тогда, когда либо

(55:1) $\alpha_n > \beta_n$ и $\alpha_i > \beta_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, n-1$,

либо

(55:2) $\alpha_i > \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Это совпадает с (49:J) из п. 49.7.2, так как $W^m$ состоит из множеств $(1, n), \ldots, (n-1, n)$ и $(1, \ldots, n-1)$.

Заметим, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$ позволяет вывести из (55:2) неравенство

(55:3) $$\alpha_n < \beta_n.$$

Следовательно:

(55:B) Из $\vec{\alpha} \succ\!\!\prec \vec{\beta}$ следует $\alpha_n \neq \beta_n$.

Доказательство. По симметрии достаточно рассмотреть только $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. Тогда отсюда следует (55:1) или (55:3); значит, во всяком случае $\alpha_n \neq \beta_n$.

Эти два результата, хотя они и простые, заслуживают некоторых интерпретационных комментариев.

В п. 54.3 мы говорили, что игрок $n$ находится в привилегированном положении в этой игре [1]). Он находится в ситуации, сравнимой с положе-

[1]) Кроме случая $n = 3$, о котором еще будет сказано позже.

нием *монополиста*, при том неизбежном ограничении (см. второе замечание выше), что он должен найти себе хотя бы одного союзника. Это значит, что общая коалиция всех остальных игроков против него—но не что-либо меньшее — может нанести ему поражение. Будем называть его *главным игроком* в этой игре [1]).

**55.2.2.** Эти обстоятельства выражены явно в неравенствах (55:1) и (55:2). Можно сказать, что (55:1) есть прямая форма доминирования главным игроком и произвольным его союзником (каким-нибудь игроком $i = 1, \ldots, n-1$), в то время как (55:2) можно назвать состоянием общей кооперации против него. Неравенства (55:1) и (55:3) или утверждение (55:B) показывают, что при доминировании главный игрок непременно оказывается под воздействием: благоприятным в случае (55:1) (прямая форма доминирования с главным игроком) и неблагоприятным в случае (55:2) (общая кооперация против главного игрока). На любого другого игрока при доминировании может не оказываться воздействия; он может оставаться в стороне [2]).

**55.2.3.** Теперь рассмотрим решение $\mathbf{V}$ этой игры [3]). Образуем

$$\max_{\vec{\alpha}\in\mathbf{V}} \alpha_n = \overline{\omega}, \qquad \min_{\vec{\alpha}\in\mathbf{V}} \alpha_n = \underline{\omega}\ ^{4)}.$$

Очевидно,

$$-1 \leqq \underline{\omega} \leqq \overline{\omega}.$$

Смысл чисел $\underline{\omega}$ и $\overline{\omega}$ ясен: они представляют наихудший и наилучший возможный исход для главного игрока в пределах решения $\mathbf{V}$.

Будем различать две возможности:

(I) $$\underline{\omega} = \overline{\omega},$$

(II) $$\underline{\omega} < \overline{\omega}.$$

### 55.3. Описание случая (I)

**55.3.1.** Рассмотрим случай (I). Это означает, что для всех $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$

(55:4) $$\alpha_n = \overline{\omega},$$

т. е. что главный игрок получает одинаковый выигрыш при всех условиях в пределах решения. Другими словами, (I) означает, что главный игрок в игре сегрегируется в смысле п. 33.1. Учитывая центральную роль главного игрока, представляется естественным, что первое альтернативное различение должно пойти в этом направлении.

З а м е ч а н и е. Ссылка на п. 33.1 снова подчеркивает, что такой образ действий аналогичен действиям для существенной игры трех лиц.

Это окажется даже еще более естественным, если вспомнить, что существенная игра трех лиц является частным случаем рассматриваемой сейчас игры, именно, при $n = 3$. (См., например, конец первого замечания в п. 54.3.)

---

1) Для случая $n = 3$ следует иметь в виду конец первого замечания в п. 54.3.

2) Таким образом, для некоторого $i = 1, \ldots, n-1$ может случиться, что $\vec{\alpha} \vDash \vec{\beta}$ и $\alpha_i = \beta_i$. Это в действительности возможно только тогда, когда $n \geqq 4$, см. снова указания для $n = 3$.

3) В смысле старой теории (см. сноску 1 на стр. 481).

4) То, что эти величины можно образовать, т. е. что максимум и минимум существуют и достигаются, может быть установлено тем же способом, что и в замечании на стр. 397—398. См., в частности, (*) там же.

Однако более внимательное рассмотрение случая $n = 3$ показывает, что в такой аналогии имеется довольно неудовлетворительная ограниченность: в этом случае игра фактически симметрична, и поэтому любой из трех игроков мог бы быть назван главным игроком. (См. также сноску 1 на стр. 483.) В п. 33.1 указанная сегрегация была действительно применима к любому из трех игроков, а теперь мы произвольно ограничили ее игроком $n$!

Тем не менее до сих пор нет способа применять ее также к другим игрокам, если мы желаем, чтобы наше рассуждение годилось для всех $n \geqq 3$ (а не только для $n = 3$): для $n \geqq 4$ главный игрок и его роль оказываются однозначно выделенными.

Такая ситуация может быть принята временно только в следующем смысле: нужно иметь в виду, что случай (II) в конце концов будет расчленен.

Таким образом, для $n = 3$ сравнение с классификацией из п. 32.2.3, которая анализируется в п. 33.1, показывает следующее. Наш случай (I) является одной из возможностей в (32:A): дискриминацией по отношению к игроку 3. Наш случай (II), с другой стороны, охватывает две остальные возможности в (32:A): дискриминацию игроков 1, 2 вместе с недискриминирующим решением (32:B). Таким образом, (II) в действительности объединяет три возможности при $n = 3$. Эта схема будет действительно распространена на все $n$. См. (*e*) в четвертом замечании из п. 55.12.5.

**55.3.2.** Рассмотрим теперь **V** в случае (I).

(55:C) **V** представляет собой множество всех $\vec{\alpha}$, удовлетворяющих (55:4).

Доказательство. Мы уже знаем, что все $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$ удовлетворяют (55:4). Если, наоборот, некоторое $\vec{\beta}$ удовлетворяет (55:4), то для каждого $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$ мы имеем $\alpha_n = \beta_n$; следовательно, (55:B) не допускает $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. Значит, $\vec{\beta}$ принадлежит **V**.

Таким образом, **V** определяется достаточно легко, но теперь нужно ответить на обратный вопрос. Если задано некоторое $\bar{\omega} \geqq -1$, то является ли решением множество **V**, определяемое из (55:4) (т. е. из (55:C))? Иными словами, удовлетворяет ли это **V** условиям (30:5:a) и (30:5:b) из п. 30.1.1?

Итак, (55:B) и (55:4) не допускают $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ для $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbf{V}$; следовательно, (30:5:a) удовлетворяется автоматически. Поэтому нам остается только исследовать (30:5:b) из п. 30.1.1. Это значит, что мы должны обеспечить следующее свойство:

(55:5) Если $\beta_n \neq \bar{\omega}$, то $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ для некоторого $\vec{\alpha}$, для которого $\alpha_n = \bar{\omega}$.

Говоря более ясно, нужно определить, какие ограничения свойство (55:5) накладывает на $\bar{\omega}$.

Условие $\beta_n \neq \bar{\omega}$ из (55:5) можно расчленить:

(55:6) $$\beta_n > \bar{\omega},$$

(55:7) $$\beta_n < \bar{\omega}.$$

Прежде всего покажем, что

(55:D) В случае (55:6) условие (55:5) выполняется автоматически.

Доказательство. Пусть $\beta_n > \bar{\omega}$, т. е. $\beta_n = \bar{\omega} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Положим

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\},$$

где $\alpha_i = \beta_i + \frac{\varepsilon}{n-1}$ для $i = 1, \ldots, n-1$ и $\alpha_n = \beta_n - \varepsilon = \bar{\omega}$. $\vec{\alpha}$ есть дележ нужного вида, причем $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ ввиду (55:2).

Таким образом, остается только случай (55:7). Здесь мы имеем:

(55:E) Для $\overline{\omega} = -1$ условие (55:7) невозможно.

Доказательство. Из $\beta_n \geqq -1$ вытекает, что не может быть $\beta_n < \overline{\omega} = -1$.

Возможность $\overline{\omega} > -1$ несколько глубже [1]).

(55:F) Пусть $\overline{\omega} > -1$, и выполняется (55:7). Тогда условие (55:5) равносильно условию $\overline{\omega} < n - 2 - \frac{1}{n-1}$.

Доказательство. Пусть $\beta_n < \overline{\omega}$. Для любого $\vec{\alpha}$ с $\alpha_n = \overline{\omega}$ условие (55:3) из п. 55.2.1 не допускается, т. е. доминирование $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ должно осуществляться при помощи (55:1) (но не (55:2) !) в (55:A). Так как $\alpha_n > \beta_n$, это условие просто равнозначно условию

(55:8) $\alpha_i > \beta_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, n-1$.

Значит, (55:5) требует существования дележа $\vec{\alpha}$ с $\alpha_n = \overline{\omega}$ и (55:8).

Рассмотрим сначала (55:8) для фиксированного $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда это условие и $\alpha_n = \overline{\omega}$ могут удовлетворяться при дележе $\vec{\alpha}$ тогда и только тогда, когда числа $\beta_i$ и $\overline{\omega}$, сложенные с $n-2$ слагаемыми, равными $-1$, дадут число $< 0$. Иными словами, должно быть $\beta_i + \overline{\omega} - (n-2) < 0$, $\beta_i < n - 2 - \overline{\omega}$. Следовательно, (55:8) невыполнимо для всех $i = 1, \ldots, n-1$ тогда и только тогда, когда

(55:9) $\beta_i \geqq n - 2 - \overline{\omega}$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$.

(55:5) означает, что этого не может быть ни для какого $\vec{\beta}$ с $\beta_n < \overline{\omega}$. Тем самым ни для какого дележа $\vec{\beta}$ не может выполняться одновременно (55:9) и $-1 \leqq \beta_n < \overline{\omega}$ [2]). Значит, $n-1$ слагаемых $n - 2 - \overline{\omega}$ и одно слагаемое $-1$ должны дать в сумме $> 0$. Таким образом, $(n-1) \times (n - 2 - \overline{\omega}) - 1 > 0$, $n - 2 - \overline{\omega} > \frac{1}{n-1}$, откуда следует $\overline{\omega} < n - 2 - \frac{1}{n-1}$, а это и требовалось.

Объединяя (55:E) и (55:F) и вспоминая (55:D), а также утверждения, касающиеся (55:5), (55:6) и (55:7), можно утверждать следующее:

(55:G) Пусть $\overline{\omega}$ — любое число, для которого

$$-1 \leqq \overline{\omega} < n - 2 - \frac{1}{n-1}.$$

---

[1]) $\overline{\omega} = -1$ означает, что главный игрок не только сегрегирован, но также дискриминирован (решением V) наихудшим возможным образом. (См. п. 33.1.)

Таким образом, $\overline{\omega} = -1$ дает решение сразу, в то время как $\overline{\omega} > -1$ требует более детального анализа (55:F). Это и не удивительно: крайняя форма дискриминации является более элементарным предположением и требует менее тонких рассуждений, чем промежуточная форма.

[2]) Мы предполагаем, что из (55:9) следует $\beta_i \geqq -1$ для $i = 1, \ldots, n-1$. Это значит, что $n - 2 - \overline{\omega} \geqq -1$ и $\overline{\omega} \leqq n-1$. В самом деле, $\overline{\omega} > n-1$ невозможно, так как иначе (55:4) было бы невыполнимо для дележей: $\overline{\omega}$ и $n-1$ слагаемых, равных $-1$, дали бы в сумме положительное число.

Поэтому из посылки в (55:F) следует $\overline{\omega} \leqq n-1$.

Образуем множество $\mathbf{V}$ всех $\vec{\alpha}$, для которых

$$\alpha_n = \overline{\omega}\,^{1)}.$$

Они дают в точности все решения $\mathbf{V}$ в случае (I).

Первые из значений числа $n-2-\frac{1}{n-1}$ даны в табл. 28.

Таблица 28

| $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $n-2-\frac{1}{n-1}$ | $\frac{1}{2}=0,5$ | $\frac{5}{3}=1,67$ | $\frac{11}{4}=2,75$ | $\frac{19}{5}=3,8$ |

**55.3.3.** Интерпретация этого результата не вызывает затруднений. Такая норма поведения (решение) основывается на исключении главного игрока из игры. Это делает распределение между остальными игроками совершенно неопределенным, т. е. любой дележ, который дает главному игроку «назначенный» выигрыш $\overline{\omega}$, принадлежит решению. Верхнюю границу «назначенного» выигрыша $\overline{\omega}$, именно $n-2-\frac{1}{n-1}$, также можно было бы обосновать в соответствии с п. 33.1.2, но мы этот вопрос рассматривать не будем.

## 55.4. Случай (II). Нахождение $\underline{\mathbf{V}}$

**55.4.1.** Переходим теперь к значительно более трудному случаю (II). (См. последнюю часть замечания на стр. 483 — 484.) Мы имеем

$$-1 \leqq \underline{\omega} < \overline{\omega}.$$

Это дает следующее разложение $\mathbf{V}$ на три попарно не пересекающихся множества:

$\underline{\mathbf{V}}$, множество всех $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$ с $\alpha_n = \underline{\omega}$,

$\overline{\mathbf{V}}$, множество всех $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$ с $\alpha_n = \overline{\omega}$,

$\mathbf{V}^*$, множество всех $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$ с $\underline{\omega} < \alpha_n < \overline{\omega}$.

По самой природе чисел $\underline{\omega}$ и $\overline{\omega}$ (см. начало п. 55.2.3) множества $\underline{\mathbf{V}}$ и $\overline{\mathbf{V}}$ не могут быть пустыми; однако по поводу $\mathbf{V}^*$ такого утверждения сделать уже нельзя [2]).

**55.4.2.** Начнем с исследования $\underline{\mathbf{V}}$.

(55:H) Если $\vec{\alpha}$ принадлежит $\underline{\mathbf{V}}$, а $\vec{\beta}$ принадлежит $\overline{\mathbf{V}} \cup \mathbf{V}^*$, то $\alpha_i \geqq \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. В противном случае $\beta_i > \alpha_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда будет $\alpha_n = \underline{\omega}$, $\beta_n > \underline{\omega}$, так что $\beta_n > \alpha_n$;

---

[1]) Продолжая параллель с особым случаем $n = 3$ из п. 33.1, указанную в замечании на стр. 483—484, заметим, что это соответствует имеющемуся там $c$. Для $n = 3$ величина $n-2-\frac{1}{n-1}$ превращается как раз в 1/2.

[2]) $\mathbf{V}^*$ действительно пусто в случае, который рассматривается перед (55:V).

следовательно, $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$ по (55:1), что невозможно, так как $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ принадлежат $\mathbf{V}$.

Положим

$$\underline{\alpha}_i = \min_{\vec{\alpha} \in \underline{\mathbf{V}}} \alpha_i \text{ для } i = 1, \ldots, n-1\,[1].$$

Тогда (55:H) сразу дает:

(55:I) Если $\vec{\beta}$ принадлежит $\overline{\mathbf{V}} \cup \mathbf{V}^*$, то $\underline{\alpha}_i \geqq \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$ [2].

Докажем далее, что

(55:J) $$\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i + \underline{\omega} \geqq 0\,[3].$$

Доказательство. Допустим, что $\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i + \underline{\omega} < 0$. Тогда можно выбрать $\gamma_i > \underline{\alpha}_i$ для $i = 1, \ldots, n-1$, $\gamma_n = \underline{\omega}$ с $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 0$, образующие дележ $\vec{\gamma} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ [4].

$\overline{\mathbf{V}}$ непусто, выберем $\vec{\beta} \in \overline{\mathbf{V}}$. Тогда по (55:I) $\beta_i \leqq \underline{\alpha}_i < \gamma_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$; следовательно, по (55:2) $\vec{\gamma} \succ \vec{\beta}$. Так как $\vec{\beta}$ принадлежит $\mathbf{V}$, $\vec{\gamma}$ не принадлежит $\mathbf{V}$.

Следовательно, существует такое $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$, для которого $\vec{\alpha} \succ \vec{\gamma}$. Если $\vec{\alpha}$ принадлежит $\underline{\mathbf{V}}$, то $\alpha_n = \underline{\omega} = \gamma_n$; следовательно, $\vec{\alpha} \succ \vec{\gamma}$ противоречит (55:B). Поэтому дележ $\vec{\alpha}$ должен принадлежать $\overline{\mathbf{V}} \cup \mathbf{V}^*$. Тогда по (55:I) $\alpha_i \leqq \underline{\alpha}_i < \gamma_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$. Но как (55:1), так и (55:2) из (55:A) — ввиду $\vec{\alpha} \succ \vec{\gamma}$ — дают, что $\alpha_i > \gamma_i$ хотя бы для одного $i = 1, \ldots, n-1$. Итак, мы имеем противоречие.

Теперь характеризация $\underline{\mathbf{V}}$ может быть завершена:

(55:K) $\underline{\mathbf{V}}$ имеет ровно один элемент:

$$\vec{\alpha}^0 = \{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_{n-1}, \underline{\omega}\}.$$

Доказательство. Пусть $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ — некоторый элемент из $\underline{\mathbf{V}}$. Тогда мы имеем

(55:10) $$\begin{cases} \alpha_i \geqq \underline{\alpha}_i \text{ для } i = 1, \ldots, n-1, \\ \alpha_n = \underline{\omega}, \end{cases}$$

[1] То, что эти величины могут быть получены, т. е. что эти минимумы существуют и достигаются, может быть установлено так же, как в замечании на стр. 397—398. См., в частности, там же (*). То, что устанавливается там для $\mathbf{V}$, справедливо также для $\underline{\mathbf{V}}$, равного пересечению $\mathbf{V}$ с замкнутым множеством тех $\vec{\alpha}$, у которых $\alpha_n = \underline{\omega}$.

[2] Заметим, что этого нельзя утверждать по поводу $\vec{\beta} \in \underline{\mathbf{V}}$, так как $\beta_i$ может превысить минимальную величину $\underline{\alpha}_i$. См., однако, (55:L).

[3] См. при этом (55:12) далее.

[4] Заметим, что по своему определению все $\underline{\alpha}_i \geqq -1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и $\underline{\omega} \geqq -1$; следовательно, все наши $\gamma_i \geqq -1$ $(i = 1, \ldots, n-1, n)$.

по самому определению этих чисел. Далее, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, а по (55:J) должно быть $\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i + \underline{\omega} \geqq 0$. Следовательно, из всех неравенств в (55:10) знак $>$ исключается. Таким образом,

(55:11) $$\begin{cases} \alpha_i = \underline{\alpha}_i \text{ для } i = 1, \ldots, n-1, \\ \alpha_n = \underline{\omega}, \end{cases}$$

т. е.

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\} = \{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_{n-1}, \underline{\omega}\}.$$

Значит, $\underline{\mathbf{V}}$ не может иметь элементов, отличных от $\{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_{n-1}, \underline{\omega}\}$. Так как $\underline{\mathbf{V}}$ непусто, это — его единственный элемент.

**55.4.3.** Заметим, что, так как вектор $\vec{\alpha}^0 = \{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_{n-1}, \underline{\omega}\}$ принадлежит $\underline{\mathbf{V}}$, он с необходимостью оказывается дележом. Следовательно, мы можем усилить (55:J) до утверждения

(55:12) $$\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i + \underline{\omega} = 0.$$

Можно также усилить и (55:I):

(55:L) Если $\vec{\beta}$ принадлежит $\mathbf{V}$, то $\underline{\alpha}_i \geqq \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Для $\vec{\beta} \in \overline{\mathbf{V}} \cup \mathbf{V}^*$ это было установлено в (55:I), для $\vec{\beta} \in \underline{\mathbf{V}}$ (55:K) дает даже $\beta_i = \underline{\alpha}_i$.

Завершим эту часть анализа доказательством следующего факта:

(55:M) $$\underline{\omega} = -1.$$

Доказательство. Допустим, что $\underline{\omega} > -1$, т. е. что $\underline{\omega} = -1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Положим

$$\vec{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n\},$$

где $\beta_i = \underline{\alpha}_i + \frac{\varepsilon}{n-1}$ для $i = 1, \ldots, n-1$ и $\beta_n = \underline{\omega} - \varepsilon = -1$. Вектор $\vec{\beta}$ является дележом (см. (55:12) выше). Из $\beta_n < \underline{\omega}$, или также из (55:L), следует, что $\vec{\beta}$ не принадлежит $\mathbf{V}$.

Следовательно, в $\mathbf{V}$ существует дележ $\vec{\alpha}$, для которого $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. По (55:L) $\alpha_i \leqq \alpha'_i < \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$. Но и из (55:1), и из (55:2) в (55:A) следует, так как $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$, что $\alpha_i > \beta_i$ хотя бы для одного $i = 1, \ldots, n-1$. Таким образом, мы получаем противоречие.

Заметим, что теперь (55:12) превращается в

(55:N) $$\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i = 1.$$

Основными результатами этого анализа являются (55:K), (55:L) и (55:M). Их можно резюмировать следующим образом [1].

[1]) Все это, конечно, применимо только к случаю (II).

Наихудший возможный исход для главного игрока — это полное поражение (значение —1). Существует одно и только одно распределение — т. е. дележ — (в V), которое это осуществляет, а для всех остальных игроков это оказывается наилучшим возможным исходом (в V).

Это распределение (в V) является состоянием полной кооперации против главного игрока [1]).

Читатель может заметить, что, хотя эта словесная формулировка вовсе не является сложной, ее можно было получить только математическим, а не словесным путем.

## 55.5. Случай (II). Нахождение $\overline{V}$

**55.5.1.** Теперь можно исследовать $\overline{V}$.

(55:O) Рассмотрим дележ $\vec{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ с $\beta_i \geqq \underline{\alpha}_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, n-1$, и $\beta_n \geqq \overline{\omega}$. Тогда $\vec{\beta}$ принадлежит V.

Доказательство. Допустим, что $\vec{\beta}$ не принадлежит V. Тогда в V существует дележ $\vec{\alpha}$, для которого $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. Следовательно, должно выполняться (55:1) или (55:2) из (55:A). Так как дележ $\vec{\alpha}$ принадлежит V, должно быть $\alpha_n \leqq \overline{\omega} \leqq \beta_n$, и это исключает возможность (55:1). По (55:L) $\alpha_i \leqq \underline{\alpha}_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$; поэтому $\alpha_i \leqq \underline{\alpha}_i \leqq \beta_i$ хотя бы для одного $i = 1, \ldots, n-1$, и это исключает (55:2). В обоих случаях получается противоречие.

(55:P) $\underline{\alpha}_i \geqq n-2-\overline{\omega}$ для $i=1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Допустим, что $\underline{\alpha}_i < n-2-\overline{\omega}$ для какого-либо $i=1, \ldots, n-1$, т. е. что $-(n-2)+\underline{\alpha}_i+\overline{\omega}<0$. Тогда можно выбрать $\beta_j \geqq -1$ $(j=1, \ldots, n-1,\ j \neq i$, т. е. для $n-2$ значений $j)$, $\beta_i \geqq \underline{\alpha}_i$, $\beta_n > \overline{\omega}$ с $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0$, образующие дележ $\vec{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Этот дележ $\vec{\beta}$ удовлетворяет требованиям (55:O), следовательно, он принадлежит V. Но тогда $\beta_n \leqq \overline{\omega}$ по определению этой величины — противоречие с $\beta_n > \overline{\omega}$.

Теперь положим

(55:13) $$\alpha_* = \min_{i=1, \ldots, n-1} \underline{\alpha}_i \text{ [2]}).$$

Тогда (55:P) дает нам

(55:14) $$\alpha_* \geqq n-2-\overline{\omega} \text{ [3]}).$$

Обозначим множество всех $i$ $(=1, \ldots, n-1)$, для которых

(55:15) $$\underline{\alpha}_i = \alpha_*,$$

через $S_*$. По своей природе это множество должно обладать следующими двумя свойствами:

(55:Q) $S_* \subseteq (1, \ldots, n-1)$, $S_*$ непусто.

---

[1]) Это выражение использовалось также — в связанном с этим, но несколько отличном смысле — в последней части п. 55.2.

[2]) На этот раз минимум берется по конечной области!

[3]) См. при этом (55:R) ниже.

**55.5.2.** Далее,

(55:R) $$\alpha_* = n - 2 - \overline{\omega}.$$

(55:S) $\overline{\mathbf{V}}$ состоит из элементов $\vec{\alpha}^i$, $\vec{\alpha}^i = \{\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{n-1}^i, \alpha_n^i\}$, где $i$ пробегает по всему $S_*$ и

$$\alpha_j^i = \begin{cases} \underline{\alpha}_i = \alpha_*, & \text{если } j = i, \\ \overline{\omega}, & \text{если } j = n, \\ -1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство утверждений (55:R) и (55:S). Начнем с рассмотрения элемента $\vec{\beta} \in \overline{\mathbf{V}}$.

Если $\beta_i < \underline{\alpha}_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$, то (55:2) дает $\vec{\alpha}^0 \succ \vec{\beta}$, так как $\vec{\alpha}^0 = \{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_{n-1}, \underline{\omega}\}$. Поскольку $\vec{\alpha}^0$ принадлежит $\mathbf{V}$ по (55:K), $\vec{\alpha}^0$ и $\vec{\beta}^0$ оба должны принадлежать $\mathbf{V}$, что невозможно. Итак,

(55:16) $$\beta_i \geqq \underline{\alpha}_i \geqq \alpha_* \text{ для некоторого } i = 1, \ldots, n-1.$$

Мы имеем

(55:17) $$\beta_j \geqq -1 \text{ для всех } j = 1, \ldots, n-1, \ j \neq i,$$

и так как $\vec{\beta}$ принадлежит $\overline{\mathbf{V}}$,

(55:18) $$\beta_n = \overline{\omega}.$$

Но $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0$, и по (55:14) должно быть $-(n-2) + \alpha_* + \overline{\omega} \geqq 0$; поэтому знак $>$ исключается из всех неравенств (55:16), (55:17). Следовательно, $\underline{\alpha}_i = \alpha_*$, т. е. $i$ принадлежит $S_*$. Таким образом,

$$\beta_i = \begin{cases} \underline{\alpha}_i = \alpha_*, & \text{если } j = i, \\ \overline{\omega}, & \text{если } j = n, \\ -1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т. е. дележ $\vec{\beta}$ равен определенному выше дележу $\vec{\alpha}^i$.

Итак, мы получаем

(55:19) Каждое $\vec{\beta} \in \overline{\mathbf{V}}$ обязательно совпадает с некоторым $\vec{\alpha}^i$, где $i$ принадлежит $S_*$.

Далее, $\overline{\mathbf{V}}$ непусто, поэтому в $\mathbf{V}$ найдется некоторое $\vec{\alpha}^i$ $(i \in S_*)$. Следовательно, это $\vec{\alpha}^i$ является дележом, и потому $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i = 0$, т. е. $-(n-2) + \alpha_* + \overline{\omega} = 0$. Это равносильно (55:R).

Рассмотрим, наконец, произвольное $i \in S_*$. Так как (55:R) справедливо, мы имеем

$$-(n-2) + \alpha_* + \overline{\omega} = 0.$$

Значит, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i = 0$, т. е. $\vec{\alpha}^i$ есть дележ. Но $\alpha_i^i = \underline{\alpha}_i = \alpha_*$ и $\alpha_n^i = \overline{\omega}$;

следовательно, (55:O) гарантирует, что $\vec{\alpha}^i$ принадлежит $\underline{\mathbf{V}}$. А так как $\alpha_n^i = \overline{\omega}$, $\vec{\alpha}^i$ принадлежит даже $\overline{\mathbf{V}}$. В результате мы получаем:

(55:20) Каждое $\vec{\alpha}^i$ при $i \in S_*$ является дележом и принадлежит $\overline{\mathbf{V}}$.

(55:19) и (55:20) вместе дают (55:S). Утверждение (55:R) было доказано выше. Это завершает доказательство.

**55.5.3.** Основными результатами проведенного анализа являются утверждения (55:R), (55:S) вместе с введением множества $S_*$. Здесь снова можно дать словесную формулировку [1]).

Наилучший возможный исход для главного игрока дает ему некоторую величину $\overline{\omega}$. Чтобы этого достигнуть, ему нужен ровно один союзник, которого можно выбирать произвольно из некоторого множества $S_*$ игроков. Это множество состоит из тех игроков среди $1, \ldots, n-1$, которым наименее везет в состоянии полной кооперации против главного игрока, о котором говорилось в конце п. 55.4.

Таким образом, распределения, которые образуют игроки $1, \ldots$ $\ldots, n-1$ между собой, объединяясь для полного поражения главного игрока, определяют его поведение и в тех случаях, когда он достигает полного успеха. Это «взаимодействие» между коренным образом различными ситуациями заслуживает внимания [2]). Интересно также, что естественными союзниками главного игрока, когда он стремится к полному успеху, являются наименее удачливые члены возможной полной оппозиции против него.

З а м е ч а н и е. Политические ситуации, иллюстрирующие этот принцип, хорошо известны, и в связи с ними часто утверждается его справедливость вообще. Однако трудно отрицать, что доводы, которые могут быть приведены чисто словесно в пользу этого принципа, не лучше тех, которые могли бы быть сделаны для ряда других конфликтных принципов.

Суть дела в том, что для той конкретной игры, т. е. структуры конфликта, которую мы сейчас рассматриваем, справедлив именно этот, а не какой-либо иной принцип. Для установления этого необходимо более или менее сложное математическое доказательство. Все чисто словесные правдоподобные доводы были бы неубедительны и сомнительны.

Заключительное замечание в п. 55.4 относительно расхождения между формулировкой и доказательством здесь снова приложимо.

## 55.6. Случай (II). $\mathscr{A}$ и $S_*$

**55.6.** Мы определили в пп. 55.4 и 55.5 два подмножества $\underline{\mathbf{V}}$, $\overline{\mathbf{V}}$ множества $\mathbf{V}$ [3]). Теперь пора обратиться к оставшемуся подмножеству $\mathbf{V}^*$.

---

1) Все это относится, конечно, только к случаю (II).

2) В п. 4.3.3 мы настойчиво говорили о влиянии, оказываемом «фактическим» существованием какого-либо дележа, т. е. его принадлежностью к некоторой норме поведения (решению), на все остальные дележи той же нормы. Почти все решения игр $n \geq 3$ лиц, которые мы нашли, могут быть использованы для иллюстрации этого принципа. Специальная ссылка на это была сделана на более раннем этапе рассуждений, в п. 25.2.2. Настоящий случай, однако, особенно бросается в глаза.

3) Множество $S_*$ все еще неизвестно, хотя и выделено условием (55:Q). Числа $\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_{n-1}$ также неизвестны, но выделены условием (55:N). Они определяют число $\underline{\alpha}_*$ (являющееся их минимумом). Числа $\underline{\omega}$ и $\overline{\omega}$ задаются условиями (55:M) и (55:R). Определением этих неизвестных величин мы займемся позже. См. (55:O′) (т. е. (55:L′), (55:N′) и (55:P′)).

Тем не менее вид $\underline{\mathbf{V}}$ и $\overline{\mathbf{V}}$ найден, и остающиеся неопределенности имеют менее фундаментальный характер.

Пусть $\mathscr{A}$ — множество всех $\vec{\alpha}$ с $\alpha_i = \underline{\alpha}_i = \alpha_*$ для всех $i \in S_*$. Тогда

(55:T) $$\underline{\mathbf{V}} \cup \mathbf{V}^* \subseteq \mathscr{A}.$$

Доказательство. Рассмотрим какое-нибудь $\vec{\alpha} \in \underline{\mathbf{V}} \cup \mathbf{V}^*$. Нужно показать, что $\alpha_i = \underline{\alpha}_i$ для всех $i \in S_*$.

Согласно (55:L), для всех $i = 1, \ldots, n-1$ мы имеем $\alpha_i \leqq \underline{\alpha}_i$. Следовательно, нужно только исключить $\alpha_i < \underline{\alpha}_i$ для $i \in S_*$.

Для $i \in S_*$ составим $\vec{\alpha}^i$ из (55:S). Этот дележ принадлежит $\overline{\mathbf{V}}$, так что $\alpha_n^i = \overline{\omega}$; $\vec{\alpha}$ принадлежит $\underline{\mathbf{V}} \cup \mathbf{V}^*$, так что $\alpha_n < \overline{\omega}$. Значит, $\alpha_n^i > \alpha_n$. Тогда $\alpha_i < \underline{\alpha}_i$ означает, что $\alpha_i^i = \underline{\alpha}_i > \alpha_i$; следовательно, $\vec{\alpha}^i \succ \vec{\alpha}$ по (55:1), а это невозможно, так как $\vec{\alpha}^i$ и $\vec{\alpha}$ оба принадлежат $\mathbf{V}$.

(55:U) $\overline{\mathbf{V}} \subseteq \mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда $S_*$ является одноэлементным множеством или $\alpha_* = -1$; в противном случае $\overline{\mathbf{V}}$ и $\mathscr{A}$ не пересекаются.

Доказательство. Рассмотрим какое-нибудь $\vec{\alpha} \in \overline{\mathbf{V}}$. Тогда $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^i$ (по (55:S)), $i \in S_*$. Сравнение определений $\vec{\alpha}^i$ и $\mathscr{A}$ показывает, что $\vec{\alpha}^i$ принадлежит $\mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда $S_*$ имеет единственный элемент $i$ или $\alpha_* = -1$.

Словесное выражение (55:T), (55:U) следующее. Каждый игрок наименее удачливой группы ($S_*$, см. конец п. 55.5) достигает своего оптимума [1]) в каждом распределении, в котором главный игрок не имеет полного успеха (т. е. в $\underline{\mathbf{V}} \cup \mathbf{V}^*$). Когда главный игрок терпит полное поражение (т. е. в $\underline{\mathbf{V}}$), это даже справедливо для всех игроков $1, \ldots, n-1$ (см. конец п. 55.4). Когда главный игрок имеет полный успех, то это справедливо для одного и только одного игрока, которым может быть любой член наименее удачливой группы ($S_*$, см. конец п. 55.5).

### 55.7. Случаи (II′) и (II″). Описание случая (II′)

**55.7.1.** Рассмотрим случай $S_* = (1, \ldots, n-1)$, обозначаемый как случай (II′). Тогда $\underline{\alpha}_i = \alpha_*$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$, так что (55:N) дает $(n-1)\,\alpha_* = 1$, т. е. $\alpha_* = \frac{1}{n-1}$, и (55:R) дает $\overline{\omega} = n - 2 - \frac{1}{n-1}$. Если $\vec{\alpha}$ принадлежит $\mathscr{A}$, то $\alpha_i = \underline{\alpha}_i = \alpha_* = \frac{1}{n-1}$ для $i = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, $\alpha_n = -1$, т. е. $\vec{\alpha} = \left\{\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}, -1\right\}$. По (55:T) это также справедливо для всех $\vec{\alpha} \in \underline{\mathbf{V}} \cup \mathbf{V}^*$.

Это $\vec{\alpha}$ является, очевидно, единственным элементом $\vec{\alpha}^0$ в $\underline{\mathbf{V}}$ по (55:K); следовательно, $\mathbf{V}^*$ пусто. Поэтому $\mathbf{V} = \underline{\mathbf{V}} \cup \overline{\mathbf{V}}$, и тогда (55:K) и (55:S) дают:

[1]) Своего индивидуального оптимума внутри данной нормы поведения (т. е. решения) $\mathbf{V}$. Для игрока $i$ $(= 1, \ldots, n-1)$ этот оптимум (максимум) есть $\underline{\alpha}_i$ согласно (55:L), хотя $\underline{\alpha}_i$ было первоначально определено как его пессимум (минимум) в подмножестве $\underline{\mathbf{V}}$ из $\mathbf{V}$.

(55:V) **V** состоит из следующих элементов:

(a) $\vec{\alpha}^0 = \left\{\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}, -1\right\}$,

(b) $\vec{\alpha}^i$,

где $i = 1, \ldots, n-1$ и $\vec{\alpha}^i = \{\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{n-1}^i, \alpha_n^i\}$ с

$$\alpha_j^i = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{если } j = i, \\ n-2-\frac{1}{n-1}, & \text{если } j = n, \\ -1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(55:V) определяет единственное возможное решение **V** в случае (II′). Однако отсюда не следует обязательно, что это **V** есть решение, или что имеет место случай (II′). Действительно, если бы не удалось удовлетворить какому-нибудь из этих двух требований, то мы бы только показали (хотя и довольно окольным путем), что не существует решения в случае (II′). Мы покажем поэтому, что оба эти требования удовлетворяются[1]).

**55.7.2.**

(55:W) **V** из (55:V) есть единственное решение в случае (II′).

Доказательство. Нужно только показать, что это **V** является решением в случае (II′); единственность будет следовать тогда из сказанного выше, т. е. из (55:V).

То, что это — случай (II′), устанавливается легко. Очевидно, для нашего **V**

$$\underline{\omega} = -1, \quad \bar{\omega} = n-2-\frac{1}{n-1},$$

$$\underline{\alpha}_1 = \ldots = \underline{\alpha}_{n-1} = \alpha_* = \frac{1}{n-1}, \quad S_* = (1, \ldots, n-1).$$

Остается доказать, что **V** есть решение, т. е. проверить (30:5:с) из п. 30.1.1. Для этой цели нужно определить дележи $\vec{\beta}$, которые не доминируются элементами из **V**.

Для $\vec{\alpha}^0 \in\!\!- \vec{\beta}$ (55:1) исключается, так как $\alpha_n^0 = -1$. Таким образом, это доминирование может осуществляться только при помощи (55:2); следовательно, оно равносильно $\alpha_i^0 > \beta_i$, т. е. $\beta_i < \frac{1}{n-1}$ для $i = 1, \ldots$ $\ldots, n-1$.

Для $\vec{\alpha}^k \in\!\!- \vec{\beta}$, $k = 1, \ldots, n-1$, (55:1) невозможно при $i \neq k$, а (55:2) исключается, так как $\alpha_i^k = -1$ для $i \neq k$. Следовательно, это доминирование может осуществляться только при помощи (55:1) с $i = k$; поэтому оно равносильно $\alpha_j^k > \beta_j$ для $j = k, n$, т. е. $\beta_k < \frac{1}{n-1}$ и $\beta_n < n-2-\frac{1}{n-1}$.

[1]) Ср. это положение с (55:G), где имелся случай (I). Никакие вторичные рассмотрения такого рода там не были нужны, так как (55:G) было с самого начала необходимо и достаточно.

Значит, $\vec{\beta}$ не доминируется элементами из $\mathbf{V}$ тогда и только тогда, когда справедливо следующее: $\beta_i \geqq \frac{1}{n-1}$ выполняется для некоторого $i=1, \ldots, n-1$, и это имеет место даже для всех этих $i$ в случае $\beta_n < n-2-\frac{1}{n-1}$.

Таким образом, из $\beta_n < n-2-\frac{1}{n-1}$ следует $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \geqq \frac{1}{n-1}$. Кроме того, $\beta_n \geqq -1$. Поэтому $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$ дает знак $=$ для всех этих отношений $\geqq$, т. е. $\vec{\beta} = \vec{\alpha}^0$. С другой стороны, из $\beta_n \geqq n-2-\frac{1}{n-1}$ следует $\beta_i \geqq \frac{1}{n-1}$ для какого-то значения $i\ (=1, \ldots, n-1)$ и $\beta_j \geqq -1$ для остальных $n-2$ значений $j$. Поэтому $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0$ снова дает знак $=$ для всех этих отношений $\geqq$, т. е. $\vec{\beta} = \vec{\alpha}^i$.

Мы видим, что дележи $\vec{\beta}$, не доминируемые элементами из $\mathbf{V}$, оказываются равными $\vec{\alpha}^0$ и $\vec{\alpha}^1, \ldots, \vec{\alpha}^{n-1}$, т. е. оказываются как раз элементами из $\mathbf{V}$, что и требовалось.

**55.7.3.** Это решение важно, так как оно является конечным множеством, — как мы увидим, это единственное решение с таким свойством. Если образуется общая коалиция против главного игрока, то $n-1$ членов участвуют в ней на равных условиях, как описывает $\vec{\alpha}^0$. Если главный игрок находит союзника, то он дает ему тот же выигрыш, что и $\vec{\alpha}^0$, и удерживает остаток, как указывают $\vec{\alpha}^1, \ldots, \vec{\alpha}^{n-1}$. Все это совершенно разумно и не содержит в себе дискриминации [1]). Тем не менее это решение не является единственно возможным: в п. 55.3 мы нашли и другое решение (см. (55:G)), еще больше появится их в последующих пунктах.

## 55.8. Случай (II″). $\mathscr{A}$ и $\mathbf{V}'$. Доминирование

**55.8.1.** Рассмотрим теперь случай $S_* \neq (1, \ldots, n-1)$, называемый случаем (II″).

Пользуясь (55:Q), можно описать его также следующим образом:

(55:X) $\qquad S_* \subset (1, \ldots, n-1), \qquad S_*$ непусто.

Можно также сказать: случаи (II′) и (II″) характеризуются соответственно отсутствием или наличием дискриминации внутри возможной общей коалиции против главного игрока.

Хотя мы приступаем к обсуждению случая (II″), сделаем следующее замечание.

Содержание пп. 55.4—55.7 было математическим, но получавшиеся промежуточные результаты допускали простую словесную формулировку. Другими словами, можно было сравнительно часто делать вставки в математические выводы, давая словесные иллюстрации достигаемым последовательно ступеням. Эта ситуация теперь изменилась, поскольку нужны долгие математические рассуждения, чтобы привести нас к следующему пункту (в п. 55.12), где снова уместна словесная интерпретация.

[1]) Частные случаи $n=3, 4$ этого решения известны: для $n=3$ это — недискриминирующее решение существенной игры трех лиц; для $n=4$ оно обсуждалось в п.35.1.

**55.8.2.** Перейдем теперь к этим рассуждениям.

Положим $\mathbf{V}' = \mathcal{A} \cap \mathbf{V}$ ($\mathbf{V}'$ есть часть $\mathbf{V}$, содержащаяся в $\mathcal{A}$). По (55:T) и (55:U) должно быть $\mathbf{V}' = \underline{\mathbf{V}} \cup \mathbf{V}^*$ или $\mathbf{V}' = \underline{\mathbf{V}} \cup \mathbf{V}^* \cup \overline{\mathbf{V}} = \mathbf{V}$, в соответствии с тем, не выполняется или выполняется условие в (55:U).

(55:Y) Условие (30:5:c) выполняется для $\mathbf{V}'$ в $\mathcal{A}$.

Доказательство. Заменим (30:5:c) на равносильные (30:5:a), (30:5:b) в п. 30.1.1.

Проверяем (30:5:a). Из $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}$ следует, что элементы из $\mathbf{V}'$ не могут доминировать друг друга, так как этого не может быть даже в $\mathbf{V}$.

Проверяем (30:5:b). Пусть $\vec{\beta} \in \mathcal{A}$ не принадлежит $\mathbf{V}'$. Тогда нужно найти такое $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}'$, что $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$.

Прежде всего, $\vec{\beta}$ не принадлежит даже $\mathbf{V}$. Следовательно, в $\mathbf{V}$ существует $\vec{\alpha}$, для которого $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. Это $\vec{\alpha}$ должно лежать в $\mathbf{V}'$, если только оно не в $\overline{\mathbf{V}}$ (см. замечания перед (55:Y)), и это доказало бы наше утверждение. Поэтому нам остается показать, что $\vec{\alpha}$ не принадлежит $\overline{\mathbf{V}}$.

Допустим, что $\vec{\alpha}$ принадлежит $\overline{\mathbf{V}}$, т. е. (по (55:S)) $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^k$ для $k \in S_*$. Тогда должно быть $\vec{\alpha}^k \succ \vec{\beta}$. (55:1) невозможно при $i \neq k$, а (55:2) невозможно, так как $\alpha_i^k = -1$ для $i \neq k$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Значит, это доминирование может осуществляться только при помощи (55:1) с $i = k$; следовательно, $\alpha_k^k > \beta_k$, т. е. $\beta_k < \underline{\alpha}_k = \alpha_*$. Однако это невозможно, так как $\vec{\beta}$ принадлежит $\mathcal{A}$.

**55.8.3.** Таким образом, наша задача теперь сводится к тому, чтобы найти все решения (т. е. все множества, удовлетворяющие (30:5:c) из п. 30.1.1) для $\mathcal{A}$. Это требует установления характера доминирования в $\mathcal{A}$.

(55:Z) Для $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \in \mathcal{A}$ доминирование $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ равносильно следующему: $\alpha_n > \beta_n$ и $\alpha_i > \beta_i$ для некоторого $i$ из $(1, \ldots, n-1) - S_*$.

Доказательство. Для $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ утверждение (55:1) невозможно для $i$ из $S_*$, а (55:2) невозможно ввиду $\alpha_k = \beta_k$ $(= \underline{\alpha}_k = \alpha_*)$ для всех $k$ из $S_*$.

Следовательно, это доминирование может осуществляться только при помощи (55:1) с $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$. Но это означает $\alpha_n > \beta_n$ и $\alpha_i > \beta_i$, что и требовалось.

Мы заменили множество всех дележей на $\mathcal{A}$, а описанное в (55:A) понятие доминирования — на аналогичное понятие, описанное в (55:Z). В остальном задача нахождения всех решений осталась той же самой. Прогресс состоит здесь в том, что с понятием доминирования из (55:Z), как мы увидим в дальнейшем, работать легче, чем с соответствующим понятием из (55:A).

## 55.9. Случай (II″). Нахождение V′

**55.9.1.** Пусть $p$ — число элементов в $S_*$.

Тогда

(55:A′) $$1 \leq p \leq n-2.$$

Доказательство вытекает непосредственно из (55:X).

(55:B′) $$-1 \leqq \alpha_* < \frac{1}{n-1}.$$

Доказательство. То, что $-1 \leqq \alpha_*$, очевидно. Далее, $\alpha_i = \alpha_*$ для $i \in S_*$, и $\alpha_i > \alpha_*$ для $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$; согласно (55:A′), ни одно из этих множеств не пусто. Значит, $\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha_i} > (n-1)\,\alpha_*$, и, следовательно, из (55:N) получаем $1 > (n-1)\,\alpha_*$, т. е. $\alpha_* < \frac{1}{n-1}$, что и требовалось.

Произвольное $\vec{\alpha}$ из $\mathcal{A}$ имеет $p$ фиксированных компонент $\alpha_i$ $(= \underline{\alpha_i} = \alpha_*)$, где $i \in S_*$, и $n-p$ переменных компонент $\alpha_i$, где $i \in (1, \ldots, \overline{n}) - S_*$. Последние подчинены условиям:

(55:21) $$\alpha_i \geqq -1 \text{ для } i \in (1, \ldots, n) - S_*,$$

и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, т. е.

(55:22) $$\sum_{i \in (1, \ldots, n) - S_*} \alpha_i = -p\alpha_*.$$

Складывая нижние границы в (55:21), мы получим меньше, чем сумма, записанная в (55:22), т. е. $-(n-p) < -p\alpha_*$. Действительно, это означает, что $\alpha_* < \frac{n-p}{p} = \frac{n}{p} - 1$. Но по (55:A′) $p < n-1$, так что $\frac{n}{p} - 1 > \frac{n}{n-1} - 1 = \frac{1}{n-1}$, а (55:B′) дает нам $\alpha_* < \frac{1}{n-1}$.

Итак, мы видим, что

(55:C′) Область $\mathcal{A}$ является $(n-p-1)$-мерной.

**55.9.2.** Приступим теперь к более подробному анализу $\mathbf{V}'$ и $\mathcal{A}$ [1]). Положим

(55:23) $$\omega^* = n - p - 1 - p\alpha_*.$$

По (55:R) можно написать

(55:24) $$\omega^* = \overline{\omega} - (p-1)(\alpha_* + 1).$$

(55:D′) $\omega^* = \overline{\omega}$ тогда и только тогда, когда $S_*$ является одноэлементным множеством (т. е. $p = 1$) или $\alpha_* = -1$, т. е. тогда и только тогда, когда выполняется условие из (55:U); в остальных случаях $\omega^* < \overline{\omega}$.

Доказательство. Так как $p \geqq 1$ и $\alpha_* \geqq -1$ по (55:A′) и (55:B′), это непосредственно следует из (55:24).

(55:E′) $$\max_{\vec{\alpha} \in \mathcal{A}} \alpha_n = \omega^*.$$

[1]) Последующие леммы (55:D′) — (55:P′) являются аналитическим эквивалентом графического вывода в пп. 47.5.2—47.5.4. Техническая основа здесь другая, однако аналогия между этими двумя доказательствами очень заметна; интересующийся читатель может проследить за этим шаг за шагом.

(55:C′) показывает, что графическое рассуждение должно было бы производиться в $(n-p-1)$-мерном пространстве (по (55:A′) это $\geqq 1$, $\leqq n-2$). В этом причина того, что мы пользуемся аналитическим рассуждением. (Упомянутое выше графическое доказательство имело место на плоскости, т. е. оно требовало размерности 2.)

(55:F′) Этот максимум достигается ровно для одного $\vec{\alpha} \in \mathcal{A}$:

$$\vec{\alpha}^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_{n-1}^*, \alpha_n^*\},$$

для которого

$$\alpha_i^* = \begin{cases} \underline{\alpha}_i = \alpha_*, & \text{если } i \in S_*, \\ \overline{\omega}^*, & \text{если } i = n, \\ -1 & \text{в остальных случаях}^{1)}. \end{cases}$$

Доказательство утверждений (55:E′) и (55:F′). Из определения $\mathcal{A}$ ясно, что для $\vec{\alpha} \in \mathcal{A}$ переменная компонента $\alpha_n$ принимает свое максимальное значение, когда остальные переменные компоненты, т. е. $\alpha_i$ при $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$, достигают своих минимумов. Эти минимумы равны $-1$. Поэтому для указанного максимума будет

$$\alpha_i = \begin{cases} \underline{\alpha}_i = \alpha_*, & \text{если } i \in S_*, \\ -1, & \text{если } i \in (1, \ldots, n-1) - S_*. \end{cases}$$

Тогда $\alpha_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = -p\alpha_* + (n-1-p) = n-p-1-p\alpha_*$. По (55:23) это означает $\alpha_n = \omega^*$.

Это доказывает все наши утверждения.

(55:G′) $\vec{\alpha}^*$ принадлежит $\mathbf{V}'$.

Доказательство. $\vec{\alpha}^*$ принадлежит $\mathcal{A}$, для любого $\vec{\alpha} \in \mathcal{A}$ (55:E′), (55:F′) дают

$$\alpha_n \leqq \alpha_n^* \ (= \omega^*).$$

Значит, (55:Z) исключает $\vec{\alpha} \succ \vec{\alpha}^*$; поэтому из (55:Y) следует, что $\vec{\alpha}^*$ принадлежит $\mathbf{V}'$.

**55.9.3.** После этих приготовлений переходим к решающей части рассуждений.

(55:H′) Если $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ принадлежат $\mathbf{V}'$, то из $\alpha_n = \beta_n$ следует $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Доказательство. Рассмотрим два дележа $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ из $\mathbf{V}'$, для которых $\alpha_n = \beta_n$.

Положим $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$ $(i = 1, \ldots, n-1, n)$, и допустим сначала, что $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i < 0$, т. е. что $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Положим, далее, $\vec{\delta} = \{\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, \delta_n\}$, где

$$\delta_i = \begin{cases} \gamma_i, & \text{если } i \in S_*, \\ \gamma_i + \dfrac{\varepsilon}{n-p}, & \text{если } i \in (1, \ldots, n-1, n) - S_*. \end{cases}$$

Это $\vec{\delta}$ является, очевидно, дележом, и так как для $i \in S_*$ должно быть $\delta_i = \gamma_i = \alpha_i = \beta_i = \underline{\alpha}_i = \alpha_*$, $\vec{\delta}$ принадлежит $\mathcal{A}$. Мы имеем $\delta_n > \gamma_n =$

---

1) Сравнение этого определения с (55:D′) показывает, что это $\vec{\alpha}^*$ является некоторым $\vec{\alpha}^i$ при $i \in S_*$, т. е. оно принадлежит $\overline{\mathbf{V}}$, тогда и только тогда, когда условие из (55:U) выполняется.

Так как $\vec{\alpha}^*$ принадлежит $\mathcal{A}$, это согласуется с заключением из (55:U).

$= \alpha_n = \beta_n$, и для $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$ будет $\delta_i > \gamma_i = \alpha_i$ или $\beta_i$, откуда $\vec{\delta} \succ \vec{\alpha}$ или $\vec{\delta} \succ \vec{\beta}$. Так как $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ принадлежат $\mathbf{V}'$, $\vec{\delta}$ не может принадлежать $\mathbf{V}'$. Значит, существует $\vec{\eta} \in \mathbf{V}'$, для которого $\vec{\eta} \succ \vec{\delta}$.

Тогда по (55:Z) для некоторого $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$ должно быть $\eta_n > \delta_n$ и $\eta_i > \delta_i$. Следовательно, $\eta_n > \delta_n > \gamma_n = \alpha_n = \beta_n$, а также $\eta_i > \delta_i > \gamma_i = \alpha_i$ или $\beta_i$. Таким образом, $\vec{\eta} \succ \vec{\alpha}$ или $\vec{\eta} \succ \vec{\beta}$. Так как все дележи $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ и $\vec{\eta}$ принадлежат $\mathbf{V}'$, мы получаем противоречие.

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i < 0$ невозможно, так что

(55:25) $$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \geqq 0.$$

Тогда $\gamma_i \leqq \alpha_i$, $\gamma_i \leqq \beta_i$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$. Поэтому (55:25) дает знак $=$ для всех этих отношений $\leqq$, т. е. $\gamma_i = \alpha_i = \beta_i$. Это доказывает, что $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, что и требовалось.

(55:I′) Значения величин $\alpha_n$ для всех $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}'$ заполняют в точности интервал $-1 \leqq \alpha_n \leqq \omega^*$.

Доказательство. Для $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}'$, очевидно, $\alpha_n \geqq -1$, а $\alpha_n \leqq \omega^*$ следует из (55:E′). Следовательно, остается только исключить возможность существования такого $y_1$ из

$$-1 \leqq y_1 \leqq \omega^*,$$

что $\alpha_n \neq y_1$ для всех $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}'$. Допустим, что такое $y_1$ найдется.

Конечно, существуют элементы $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}'$, для которых $\alpha_n \geqq y_1$; действительно, $\vec{\alpha}^*$ принадлежит $\mathbf{V}'$ по (55:G′), и $\alpha_n^* = \omega^* \geqq y_1$. Образуем

$$\min_{\vec{\alpha} \in \mathbf{V}',\ \alpha_n \geqq y_1} \alpha_n = y_2\text{ [1]},$$

и выберем $\vec{\alpha}^+$ из $\mathbf{V}'$ с $\alpha_n^+ \geqq y_1$, для которого этот минимум достигается: $\alpha_n^+ = y_2$. По (55:H′) это $\vec{\alpha}^+$ единственное.

Таким образом, $y_2 \geqq y_1$ и, так как $\alpha_n^+ \neq y_1$, мы имеем $y_2 \neq y_1$, т. е.

(55:26) $$y_1 < y_2.$$

Из определения $y_2$ следует, что

(55:27) $y_1 \leqq \alpha_n < y_2$ невозможно ни для какого $\vec{\alpha} \in \mathbf{V}'$.

---

[1]) В этом случае не обязательно образовывать точный минимум, но вывод тогда получается несколько длиннее, чем приведенный здесь. То, что этот минимум можно образовать, т. е. что он существует и достигается, можно проверить тем же способом, что и в замечании на стр. 397—398. См., в частности, приведенное там утверждение (*). То, что установлено там для $\mathbf{V}$, справедливо также и для аналогичного множества $\mathbf{V}'$ из $\mathcal{A}$ и для пересечения $\mathbf{V}'$ с замкнутым множеством, состоящим из $\vec{\alpha}$ с $\alpha_n \geqq y_1$.

Из-за этой потребности в замкнутости приходится использовать условие $\alpha_n \geqq y_1$, а не $\alpha_n > y_1$, хотя в действительности нам нужно последнее. Однако, как мы увидим, при рассматриваемых условиях оба они равносильны. (См. далее (55:26).)

Положим $y_1 = y_2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и составим дележ $\overrightarrow{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n\}$, где $\beta_n = \alpha_n^+ - \varepsilon = y_2 - \varepsilon = y_1$, $\beta_i = \alpha_i^+ = \underline{\alpha}_i = \alpha_*$ для $i \in S_*$ и $\beta_i = \alpha_i^+ + \frac{\varepsilon}{n-1-p}$ для $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$. Очевидно, $\overrightarrow{\beta}$ принадлежит $\mathcal{A}$, и из $\beta_n = y_1$ следует, что $\overrightarrow{\beta}$ не принадлежит $\mathbf{V}'$. Следовательно, существует такое $\overrightarrow{\gamma} \in \mathbf{V}'$, для которого $\overrightarrow{\gamma} \succ \overrightarrow{\beta}$.

По (55:Z) это означает, что $\gamma_n > \beta_n$ и $\gamma_i > \beta_i$ для некоторого $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$.

Тогда из $\gamma_n > \beta_n = y_1$ по (55:27) следует $\gamma_n \geqq y_2$. Если бы было $\gamma_n = y_2$, то было бы и $\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\alpha}^+$ (по (55:H′), см. выше). Тогда для упомянутого выше $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$ было бы $\gamma_i = \alpha_i^+ < \beta_i$, и мы не получили бы нужного неравенства $\gamma_i > \beta_i$. Следовательно, $\gamma_n > y_2$.

Таким образом, $\gamma_n > y_2 = \alpha_n^+$ и $\gamma_i > \beta_i > \alpha_i^+$ для приведенного выше $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$. Значит, $\overrightarrow{\gamma} \succ \overrightarrow{\alpha}^+$, и так как дележи $\overrightarrow{\gamma}$ и $\overrightarrow{\alpha}^+$ принадлежат $\mathbf{V}'$, мы получаем противоречие.

**55.9.4.** Из (55:I′) и (55:H′) получаем: для каждого $y$ из $-1 \leqq y \leqq \omega^*$ существует единственное $\overrightarrow{\alpha} \in \mathbf{V}'$, для которого $\alpha_n = y$. Обозначим это $\overrightarrow{\alpha}$ через

$$\overrightarrow{\alpha}(y) = \{\alpha_1(y), \ldots, \alpha_{n-1}(y), \alpha_n(y)\}.$$

Очевидно, $\alpha_n(y) = y$ и $\alpha_i(y) = \underline{\alpha}_i = \alpha_*$ для $i \in S_*$. Так мы приходим к функциям $\alpha_i(y)$ для $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$.

Объединение этого с (55:I′) дает нам следующее.

(55:J′) $\mathbf{V}'$ состоит из элементов $\overrightarrow{\alpha}(y)$, где $y$ пробегает интервал

$$-1 \leqq y \leqq \omega^*$$

и $\overrightarrow{\alpha}(y) = \{\alpha_1(y), \ldots, \alpha_{n-1}(y), \alpha_n(y)\}$ с

$$\alpha_i(y) = \begin{cases} \underline{\alpha}_i = \alpha_*, & \text{если } i \in S_*, \\ y, & \text{если } i = n, \\ \text{соответствующей функции от } y \text{ (и } i), & \\ \qquad \text{если } i \in (1, \ldots, n-1) - S_*. & \end{cases}$$

**55.9.5.** Докажем в заключение следующее.

(55:K′) Функции $\alpha_i(y)$ из (55:J′), где $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$, удовлетворяют следующим условиям:

(55:K′:a) Область определения $\alpha_i(y)$ есть интервал

$$-1 \leqq y \leqq \omega^*.$$

(55:K′:b) Из $y_1 \leqq y_2$ следует $\alpha_i(y_1) \geqq \alpha_i(y_2)$ [1]).

(55:K′:c) $\alpha_i(-1) = \underline{\alpha}_i.$

(55:K′:d) $\alpha_i(\omega^*) = -1.$

(55:K′:e) $\sum_{i \in (1, \ldots, n-1) - S_*} \alpha_i(y) = -p\alpha_* - y.$

1) То есть $\alpha_i(y)$ — монотонно убывающая функция от $y$.

Замечание 1. Из этих соотношений следует непрерывность всех функций $\alpha_i(y)$ для $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$. Фактически можно даже доказать несколько больше, а именно, так называемое *условие Липшица*:

(55:28) $$|\alpha_i(y_2) - \alpha_i(y_1)| \leqq |y_2 - y_1|.$$

Доказательство. Это условие симметрично относительно $y_1$, $y_2$; поэтому можно считать, что $y_1 \leqq y_2$. Тогда применение (55:K′:e) к $y = y_1$ и $y = y_2$ и последующее вычитание дают нам

$$\sum_{i \in (1, \ldots, n-1) - S_*} \{\alpha_i(y_1) - \alpha_i(y_2)\} = y_2 - y_1.$$

По (55:K′:b) все слагаемые $\alpha_i(y_1) - \alpha_i(y_2)$ оказываются $\geqq 0$; следовательно, они также $\leqq$ чем их сумма $y_2 - y_1$. Значит,

$$0 \leqq \alpha_i(y_1) - \alpha_i(y_2) \leqq y_2 - y_1.$$

Из этих неравенств также ясно, что средняя часть равна $|\alpha_i(y_2) - \alpha_i(y_1)|$, а правая часть равна $|y_2 - y_1|$. Следовательно,

$$|\alpha_i(y_2) - \alpha_i(y_1)| \leqq |y_2 - y_1|,$$

что и требовалось.

Читатель заметит, что мы не предполагали никакой непрерывности — мы ее доказали! Это очень интересно с чисто математической точки зрения.

Замечание 2. Отметим, что равенства (55:K′:c) и (55:K′:d) не противоречат (55:K′:e). Действительно, для $y = -1$ равенство (55:K′:e) дает нам

$$\sum_{i \in (1, \ldots, n-1) - S_*} \alpha_i(-1) = -p\alpha_* + 1,$$

следовательно, из (55:K′:c) мы получаем

$$\sum_{i \in (1, \ldots, n-1) - S_*} \underline{\alpha}_i = -p\alpha_* + 1, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i = 1,$$

в согласии с (55:N).

Для $y = \omega^*$ (55:K′:e) дает

$$\sum_{i \in (1, \ldots, n-1) - S_*} \alpha_i(\omega^*) = -p\alpha_* - \omega^*;$$

следовательно, из (55:K′:d) мы получаем $-(n-p-1) = -p\alpha_* - \omega^*$, $\omega^* = n - p - 1 - p\alpha_*$, в согласии с (55:23).

Доказательство. Утверждение (55:K′:a) содержится в (55:J′).

(55:K′:b). Предположим противное: пусть $y_1 \leqq y_2$ и $\alpha_i(y_1) < \alpha_i(y_2)$ (для некоторого $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$). Это исключает $y_1 = y_2$, так что $y_1 < y_2$. Тогда $\vec{\alpha}(y_2) \succ \vec{\alpha}(y_1)$, что невозможно, так как $\vec{\alpha}(y_1)$, $\vec{\alpha}(y_2)$ принадлежат $\mathbf{V}'$.

(55:K′:c). Это следует из того факта, что $\vec{\alpha}^0$ принадлежит $\mathbf{V}'$; в действительности оно принадлежит $\underline{\mathbf{V}}$. (См. (55:K) и (55:M).)

(55:K′:d). Это следует из того, что $\vec{\alpha}^*$ принадлежит $\mathbf{V}'$ (см. (55:G′)).

(55:K′:e). $\vec{\alpha}(y)$ есть дележ; следовательно, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y) = 0$.

По (55:J′) это означает, что

$$\sum_{i \in (1, \ldots, n-1) - S_*} \alpha_i(y) + p\alpha_* + y = 0,$$

т. е. $\sum_{i \in (1, \ldots, n-1) - S_*} \alpha_i(y) = -p\alpha_* - y$, а это и требовалось.

## 55.10. Описание случая (II″)

**55.10.1.** Результаты, полученные в пп. 55.8—55.9, содержат полное описание решения **V**. В самом деле, как мы видели в начале п. 55.8.2, $\mathbf{V}=\mathbf{V}' \cup \overline{\mathbf{V}}$, причем слагаемое $\overline{\mathbf{V}}$ может быть опущено (так как оно $\subseteq \mathbf{V}'$) тогда и только тогда, когда выполняется условие из (55:U). $\overline{\mathbf{V}}$ описано в (55:S); $\mathbf{V}'$ описано в (55:J′). Эти характеризации содержат параметры:

$$\underline{\alpha}_i\ (i=1, \ldots, n-1), \quad \alpha_*,\ S_*,\ \overline{\omega},\ \omega^*,$$

$$\alpha_i(y)\ \ (i \text{ из } (1, \ldots, n-1)-S_*,\ \ -1 \leqq y \leqq \omega^*),$$

подчиненные ограничениям, установленным в (55:N); (55:13), (55:15) из п. 55.5.1; (55:R); (55:23), (55:24) из п. 55.9.2; (55:K′).

Так как все это рассеяно по семи пунктам, удобно поместить все результаты в одном месте.

(55:L′)

(55:L′:a) $S_* \subset (1, \ldots, n-1)$ и непусто. Если $p$ — число элементов в $S_*$, то $1 \leqq p \leqq n-2$.

(55:L′:b) $\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_{n-1}$ являются числами $\geqq -1$ с $\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i = 1$.

(55:L′:c) Для всех $i \in S_*$ должно быть $\underline{\alpha}_i = \alpha_*$; для всех $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$ должно быть $\underline{\alpha}_i > \alpha_*$.

(55:L′:d) Положим $\overline{\omega} = n-2-\alpha_*$, $\omega^* = n-p-1-p\alpha_*$, так что $\overline{\omega} - \omega^* = (p-1)(\alpha_*+1)$.

(55:L′:e) $\alpha_i(y)$ определено для $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$,

$$-1 \leqq y \leqq \omega^*.$$

Эти функции удовлетворяют условиям (55:K′:a) — (55:K′:e). **V** состоит из следующих элементов:

(a) $\vec{\alpha}(y)$, где $y$ изменяется в интервале $-1 \leqq y \leqq \omega^*$ и

$$\vec{\alpha}(y) = \{\alpha_1(y), \ldots, \alpha_n(y)\},$$

причем

$$\alpha_i(y) = \begin{cases} \underline{\alpha}_i = \alpha_*, & \text{если } i \in S_*, \\ \overline{y}, & \text{если } i = n, \\ \alpha_i(y) \text{ определяется согласно (55:L′:e),} & \\ \qquad \text{если } i \in (1, \ldots, n-1) - S_*. \end{cases}$$

(b) $\vec{\alpha}^i$, где $i$ пробегает элементы из $S_*$ и $\vec{\alpha}^i = \{\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{n-1}^i, \alpha_n^i\}$, причем

$$\alpha_j^i = \begin{cases} \underline{\alpha}_i = \alpha_*, & \text{если } j = i, \\ \overline{\overline{\omega}}, & \text{если } j = n, \\ -1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что если $p=1$ ($S_*$ — одноэлементное множество) или $\alpha_* = -1$, то $\overline{\omega}=\omega^*$ и $\vec{\alpha}^i$ из (b) совпадают с $\vec{\alpha}(y)$ из (a) для $y=\omega^*$. Если это не так, т. е. если $p \geqq 2$ и $\alpha_* > -1$, то $\overline{\omega} > \omega^*$ и $\vec{\alpha}^i$ из (b) отличны от $\vec{\alpha}(y)$ из (a).

Читатель может проверить без большого труда, что все эти утверждения есть не что иное, как переформулированные результаты, упомянутые выше.

**55.10.2.** За (55:L′) должны следовать такие же рассмотрения, как и за (55:V). Мы должны исследовать, все ли **V**, полученные из (55:L′), являются решениями, и притом то, что мы имеем дело именно со случаем (II″). Те из них, которые удовлетворяют обоим этим требованиям, образуют полную систему всех решений в случае (II″). Мы докажем, что все **V** из (55:L′) этим требованиям удовлетворяют.

(55:M′) **V** из (55:L′) описывают в точности все решения в случае (II″).

Доказательство. Нужно только показать, что каждое **V** из (55:L′) является решением в случае (II″); то, что эти **V** суть в точности все такие решения, будет следовать тогда из (55:L′).

То, что мы имеем дело со случаем (II″), устанавливается легко. Для этого **V**, очевидно, $\omega=-1$, и $\overline{\omega}$, $\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_{n-1}$, $\underline{S}_*$ (в смысле их определений в пп. 55.2—55.5) являются как раз величинами, обозначенными этими же символами в (55:L′)[1]; следовательно,

$$S_* \subset (1, \ldots, n-1)$$

по (55:L′:a).

Остается доказать, что **V** является решением. В данном случае для этого нужно доказать, что **V** удовлетворяет условиям (30:5:a), (30:5:b) из п. 30.1.1.

Рассматриваем (30:5:a). Предположим, что для $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbf{V}$ имеет место $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$. Мы должны различать, к какому из случаев (a), (b) из (55:L′) относятся $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$. Всего имеется четыре возможных комбинации.

$\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ относятся оба к (a). Это значит, что $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(y_1)$ и $\vec{\beta}=\vec{\alpha}(y_2)$, так что $\vec{\alpha}(y_1) \succ \vec{\alpha}(y_2)$. Тогда (55:1) исключается для $i \in S_*$, а (55:2) исключается, так как $\alpha_i(y_1)=\alpha_i(y_2)=\underline{\alpha}_i=\alpha_*$ для $i \in S_*$. Итак, это доминирование может осуществляться только при помощи (55:1) с $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$. По (55:L′:e) это означает $\alpha_n(y_1) > \alpha_n(y_2)$, $y_1 > y_2$, и $\alpha_i(y_1) > \alpha_i(y_2)$ для некоторого $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$, что противоречит (55:K′:b).

$\vec{\alpha}$ относится к (a), а $\vec{\beta}$ — к (b). В этом случае $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(y)$ и $\vec{\beta}=\vec{\alpha}^i$ (где $i \in S_*$), так что $\vec{\alpha}(y) \succ \vec{\alpha}^i$. Тогда (55:1) исключается, так как $\alpha_n(y) = y \leqq \omega^* \leqq \overline{\omega} = \alpha^i_n$, а (55:2) исключается, так как $\alpha_i(y) = \alpha^i_i = \underline{\alpha}_i = \alpha_*$. В итоге мы получаем противоречие.

$\vec{\alpha}$ относится к (b), а $\vec{\beta}$ — к (a). Это значит, что $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^i$ (где $i \in S_*$), $\vec{\beta}=\vec{\alpha}(y)$, так что $\vec{\alpha}^i \succ \vec{\alpha}(y)$. Тогда $\alpha^i_i = \alpha_i(y) = \underline{\alpha}_i = \alpha_*$, и для $j \neq i$, $j \neq n$ должно быть $\alpha^i_j = -1 \leqq \alpha_i(y)$, т. е. должно быть $\alpha^i_j \leqq \alpha_j(y)$ для

[1]) $\overline{\omega}$ получается из (b), $\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_{n-1}$ — из (a) с $y=-1$, а затем $\alpha_*$, $S_*$ из (55:L′:c).

всех $j = 1, \ldots, n-1$. Это исключает как (55:1), так и (55:2), и получается противоречие.

$\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ относятся к (b). Здесь $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^i$ и $\vec{\beta} = \vec{\alpha}^k$ (причем $i, k \in S_*$), так что $\vec{\alpha}^i \succ \vec{\alpha}^k$. Тогда $\alpha_n^i = \alpha_n^k = \bar{\omega}$, что противоречит (55:B).

Рассматриваем (30:5:b). Предположим, что $\vec{\beta}$ не доминируется элементами из **V**. Мы хотим показать, что тогда $\vec{\beta}$ принадлежит **V**, что и докажет (30:5:b).

Предположим сначала, что $\beta_n \geqq \bar{\omega}$. Если $\beta_i < \underline{\alpha}_i = \alpha_*$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$, то $\vec{\alpha}(-1) \succ \vec{\beta}$, а это противоречит нашему предположению. Следовательно, для некоторого $i = 1, \ldots, n-1$ должно быть $\beta_i \geqq \alpha_i$. Тогда, так же как и при доказательстве (55:R), обязательно $i \in S_*$ и имеет место равенство $\vec{\beta} = \vec{\alpha}^i$. Поэтому $\vec{\beta}$ принадлежит **V** в этом случае.

Предположим теперь, что $\beta_n < \bar{\omega}$. Если $\beta_i < \underline{\alpha}_i = \alpha_*$ для некоторого $i \in S_*$, то, очевидно, $\vec{\alpha}^i \succ \vec{\beta}$, что противоречит нашему предположению. Поэтому для всех $i \in S_*$ имеет место $\beta_i \geqq \underline{\alpha}_i = \alpha_*$.

Тогда $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$ дает нам $\beta_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \leqq n - p - 1 - p\alpha_* = \omega^*$, т. е. $-1 \leqq \beta_n \leqq \omega^*$. Положим $y = \beta_n$.

Допустим, что $\beta_i \geqq \alpha_i(y)$ для всех $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$. Тогда, очевидно, $\beta_i \geqq \alpha_i(y)$ и для всех $i = 1, \ldots, n$. (Для $i \in S_*$ и $i = n$ мы имеем даже знак $=$, о чем говорилось выше.) Следовательно, из $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y) = 0$ мы получаем, что во всех этих отношениях $\geqq$ будет иметь место знак $=$. Таким образом, $\vec{\beta} = \vec{\alpha}(y)$. Значит, $\vec{\beta}$ принадлежит **V** также и в этом подслучае.

Остается возможность $\beta_i < \alpha_i(y)$ для соответствующего $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$. Достаточно малое увеличение $y$ (от $y = \beta_n$ до некоторого $y > \beta_n$) не нарушит этого отношения $\beta_i < \alpha_i(y)$ [1]. Для этого нового $y$ мы имеем $y > \beta_n$, $\alpha_i(y) > \beta_i$, и поэтому $\vec{\alpha}(y) \succ \vec{\beta}$, что противоречит нашему предположению.

Итак, все возможности рассмотрены.

### 55.11. Другая формулировка полного результата

**55.11.1.** Те три случая (I), (II′), (II″), на которые мы подразделили нашу задачу, были полностью описаны соответственно в утверждениях (55:G), (55:W), (55:M′). Посмотрим теперь, в какой степени эти три класса решений связаны между собой.

Среди неопределенных параметров, содержащихся в утверждении (55:L′), т. е. в (55:M′), описывающем случай (II″), имеется множество $S_*$. Согласно (55:L′:a), оно может быть произвольным множеством $\subseteq (1, \ldots, n-1)$, за исключением $(1, \ldots, n-1)$ и $\varnothing$. Встает вопрос, нельзя ли найти какую-то интерпретацию также для этих исключенных случаев $S_* = (1, \ldots, n-1)$ и $S_* = \varnothing$.

[1] Функция $\alpha_i(y)$ непрерывна! См. замечание 1 на стр. 500.

Для $S_* = (1, \ldots, n-1)$ ответ прост. Если использовать это $S_*$ (не обращая здесь внимания на (55:L′:a)), то мы получаем (используя все остальные пункты из (55:L′)): $p = n - 1$ по (55:L′:a), $\underline{\alpha}_1 = \ldots = \underline{\alpha}_{n-1} = \overline{=} \alpha_* = \frac{1}{n-1}$ по (55:L′:b) и (55:L′:c), а $\overline{\omega} = n - 2 - \frac{1}{n-1}$, $\omega^* = -1$ по (55:L′:d). Нет надобности вводить функции $\alpha_i(y)$ из (55:L′:e), так как множество $(1, \ldots, n-1) - S_*$ пусто. Относительно интервала $-1 \leqq y \leqq \omega^*$ (в (a) из (55:L′:e)) следует заметить, что он стягивается в точку $y = -1$ (так как $\omega^* = -1$). Тогда сравнение с (55:V) показывает, что при этих условиях (55:L′) совпадает с (55:V).

Таким образом, мы имеем:

(55:N′) Если допустить в (55:L′:a) также $S_* = (1, \ldots, n-1)$ (следовательно, $p = n - 1$), то (55:L′) будет перечислять все решения в случаях (II′) и (II″); случай (II′) будет соответствовать $S_* = (1, \ldots, n-1)$, а случай (II″) будет соответствовать $S_* \neq (1, \ldots, n-1)$.

**55.11.2.** После получения этого результата может появиться желание сопоставить оставшееся исключение $S_* = \varnothing$ с оставшимся случаем (I). Однако рассмотрение (55:L′) с $S_* = \varnothing$ и сравнение с (55:G) показывают, что это невозможно, по крайней мере столь непосредственным образом.

Действительно, используя (55:L′) с $S_* = \varnothing$ (следовательно, с $p = 0$), мы получаем пустое (b), так что **V** совпадает с (a), и **V** оказывается множеством всех

$$\vec{\alpha}(y) = \{\alpha_1(y), \ldots, \alpha_{n-1}(y), y\},$$

$-1 \leqq y \leqq \omega^*$, с соответствующими функциями $\alpha_1(y), \ldots, \alpha_{n-1}(y)$.

Игнорируя остальные возможные несоответствия [1]), мы замечаем, что в этом распределении компонента $\alpha_n$ вектора $\vec{\alpha}$ из **V** определяет его компоненты $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$; в то же время в (55:G) компонента $\alpha_n$ постоянна, а

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$$

произвольны [2])!

Подведем итоги.

(55:O′) Все решения **V** перечисляются в (55:G) — случай (I) — и в (55:N′) — случаи (II′) и (II″). (55:N′) совпадает с (55:L′) при расширении (55:L′:a) с включением всех $S_* \subseteq (1, \ldots, n-1)$ и $S_* \neq \varnothing$. Исключение случая $S_* = \varnothing$ необходимо; эта возможность привела бы к **V**, не являющемуся решением из (55:G), а на самом деле не являющемуся решением вообще.

---

[1]) Вследствие того, что $p = 0$, (55:23) дает теперь $\overline{\omega} - \omega^* = -(\alpha_* + 1)$; следовательно, должно быть $\omega^* > \overline{\omega}$, так что $\max_{\vec{\alpha} \in \mathbf{V}} \alpha_n = \max_{-1 \leqq y \leqq \omega^*} y = \omega^*$, хотя он должен быть равен $\overline{\omega}$!

Для $S_* \neq \varnothing$ (55:L′:b), (55:L′:c) давали $\min_{i=1, \ldots, n-1} \underline{\alpha_i} = \alpha_*$; для $S_* = \varnothing$ они дают $\min_{i=1, \ldots, n-1} \underline{\alpha_i} > \alpha_*$, хотя это выражение было определением $\alpha_*$!

[2]) **V** из (55:L′) при $S_* = \varnothing$ не является, таким образом, множеством из нашего списка решений; следовательно, оно вообще не является решением. Это было бы легко проверить и непосредственно.

**55.11.3.** Закончим следующими замечаниями.

(55:P′)

(55:P′:a) В случае (II′), т. е. при $S_* = (1, \ldots, n-1)$, $p = n-1$, мы имеем $\omega^* = -1$, т. е. интервал $-1 \leqq y \leqq \omega^*$ из (55:L′:e) стягивается в точку. Кроме того, $\alpha_* = \frac{1}{n-1}$.

(55:P′:b) В случае (II″), т. е. при $S_* \subset (1, \ldots, n-1)$, $p < n-1$, мы имеем $\omega^* > -1$, т. е. интервал $-1 \leqq y \leqq \omega^*$ из (55:L′:e) не стягивается в точку. Кроме того, $\alpha_* < \frac{1}{n-1}$.

Доказательство. (55:P′:a). Мы уже доказали эти утверждения непосредственно перед (55:N′).

(55:P′:b). Мы видели при доказательстве (55:B′), что $\alpha_* < \frac{n-p}{p}$; следовательно, $\omega^* + 1 = n - p - p\alpha_* > 0$, $\omega^* > -1$. Наконец, $\alpha_* < \frac{1}{n-1}$ было установлено в (55:B′).

## 55.12. Интерпретация полученного результата

**55.12.1.** Теперь мы можем приступить к интерпретации этого результата. По двум причинам едва ли возможно сделать это исчерпывающим образом. Во-первых, окончательный результат, содержащийся в (55:O′), т. е. в (55:G), (55:K′), (55:L′), довольно сложен; поэтому точное утверждение должно обязательно быть математическим, а не словесным. В любой словесной формулировке пропала бы адекватность некоторых из многочисленных оттенков, выраженных в математическом результате. Во-вторых, нам еще не хватает опыта и перспективы, необходимых для действительно исчерпывающей интерпретации ситуаций, подобных той, которая сложилась. Рассматриваемая здесь игра является характерной игрой $n$ лиц во многих важных отношениях, как устанавливается в пп. 54.1.2 и 54.3. Однако наш успех в нахождении всех ее решений оказывается все же изолированным явлением (несмотря на п. 54.2.1). Потребуется гораздо больше рассуждений, подобных приведенным здесь, прежде чем браться за действительно исчерпывающую интерпретацию типичных игр $n$ лиц.

Тем не менее полезно предпринять некоторую попытку интерпретации, без какой-либо претензии на полноту. На нескольких приведенных выше примерах мы видели, что такая интерпретация оказывается ценным руководством для дальнейшего прогресса в нашей теории. Кроме того, она проливает определенный свет на важность нашего довольно сложного математического результата.

Так как мы не стремимся к полноте, эту интерпретацию удобно провести в форме нескольких замечаний.

**55.12.2.** Первое. Решение в случае (I), описанное в (55:G), является бесконечным множеством дележей. То же справедливо и для решений в случае (II″), описанных в (55:L′) (см. (55:N′)), так как упомянутая там переменная $y$ изменяется во всем интервале, не стягивающемся в точку. (См. (55:P′:b).) С другой стороны, как уже отмечалось в конце п. 55.7 [1]), решение в случае (II′) является конечным множеством дележей. Это реше-

[1]) Читатель может применить для той же цели (55:P′:a), (55:P′:b).

ние имеет также привлекательное свойство полной симметрии игры, т. е. инвариантности при всех перестановках игроков $1, \ldots, n-1$.

Таким образом, в некоторых отношениях это решение нашей игры является наиболее простым. Эвристические рассмотрения ее для частных случаев $n = 3, 4$ (соответственно в § 22 и п. 35.1) приводят к этому решению, и их легко распространить на произвольное $n$.

Замечание. Рассуждение (эвристическое) проходило бы следующим образом. Главный игрок, чтобы выиграть, нуждается в союзнике, и вместе с любым таким союзником он получает $n-2$. Поэтому, если он желает получить выигрыш $\omega$ (это соответствует $\overline{\omega}$ в нашем точном выводе), он может уступить каждому союзнику $n-2-\omega$. Если его $n-1$ потенциальных союзников могут получить вместе больше этого, т. е. если

$$(n-1)(n-2-\omega) < 1,$$

то он не имеет шансов найти союзника, — и это единственный предел для его требований.

Итак, для $\omega$ имеется только ограничение $(n-1)(n-2-\omega) \geqq 1$, т. е. $\omega \leqq n-2-\frac{1}{n-1}$. Значит, $\omega = n-2-\frac{1}{n-1}$.

Таким образом, главный игрок получает $n-2-\frac{1}{n-1}$, если ему удается образовать коалицию, и, конечно, $-1$, если не удается. Для остальных игроков соответствующие выигрыши равны $\frac{1}{n-1}$ и $-1$.

Читатель может теперь проверить, что это как раз будет решение, получающееся в (55:V), т. е. случай (II').

Однако требуется весь аппарат нашей формальной теории, чтобы найти другие решения.

Читателю теперь достаточно ясно, что эти остальные решения никоим образом нельзя игнорировать. Кроме того, существование и единственность конечного решения является счастливым обстоятельством в данной игре, но ни в какой мере не общим [1]).

**55.12.3.** Второе. Указанное выше решение соответствует наибольшему возможному $S_*$: $(1, \ldots, n-1)$. Другая крайняя возможность — это решение, которое мы ассоциируем с $S_* = \varnothing$ (см. предшествующее (55:O')). Оно является решением в случае (I), описанным в (55:G). Подобно тому решению, о котором говорилось в предыдущем замечании, оно сохраняет свойство полной симметрии игры. В действительности только эти два случая, именно случаи (I) и (II'), имеют такую симметрию [2]).

С другой стороны, это решение бесконечно. Как мы видели в п. 55.3, оно выражает тот организационный принцип, что главный игрок сегрегируется в игре в смысле п. 33.1. Рассмотрение (55:G) обнаруживает, что эта норма поведения, т. е. решение, не выдвигает абсолютно никакого правила разделения между остальными игроками. Это значит, что все дележи, где главный игрок получает предписанный выигрыш, принадлежат этому решению. С точки зрения здравого смысла это вполне разумно. Так как главный игрок исключается, остальные игроки могут только единодушно объединяться между собой. Какие-либо количественные рас-

[1]) Что касается неопределенности относительно существования, см. конец второго замечания в п. 53.2.2. Случай, где нет единственности, анализируется в п. 38.3.1.

[2]) Любое другое решение относится к случаю (II''), так что для него $S_* \neq \varnothing$, $(1, \ldots, n-1)$. Следовательно, надлежащая перестановка игроков $1, \ldots, n-1$ переведет элемент из $S_*$ в элемент вне $S_*$, изменив тем самым множество $S_*$, а вместе с ним и рассматриваемое решение.

четы в их отношениях (т. е. в смысле возможности примкнуть к главному игроку) запрещены. Поэтому нет никакой речи о том, каков будет исход их переговоров между собой.

**55.12.4.** Третье. Остающиеся решения — это решения в случае (II″), описанные в (55:L′) (см. (55:N′)), т. е. решения с $S_* \neq \varnothing$, $(1, \ldots, n-1)$. Они образуют более сложную совокупность, чем два предшествующих решения. Фактически на них пошла значительная, и наиболее сложная, часть наших математических выводов. Их интерпретация также более трудна и сложна. Отметим только основные моменты.

Мы подробно описывали в (55:L′), по каким мотивам игроки из $(1, \ldots, n-1) - S_*$ связаны с главным игроком во всех дележах какой-либо нормы поведения (т. е. решения) из этой категории; т. е. мы указывали, как соответствующие выигрыши, которые они получают, однозначно определяются выигрышем, предназначенным главному игроку. Данная связь выражалась определенными функциями [1]). Эти функции могли быть выбраны различными способами, описывая, таким образом, различные нормы поведения (т. е. решения), но определенная норма означала определенный выбор этих функций. В результате некоррелированность игроков $1, \ldots, n-1$, имевшая столь важное значение во втором замечании, теперь исчезает. Имеются, очевидно, некоторого рода неопределенные торги, происходящие между главным игроком и игроками из $(1, \ldots, n-1) - S_*$ [2]), но отношение последних между собой полностью определяется нормой.

Стоит подчеркнуть еще раз эту разницу между ситуацией, описанной во втором замечании, и ситуацией, имеющейся здесь, т. е. между случаями (I) и (II″). В первом случае имелись переговоры между всеми игроками, кроме главного, абсолютно без каких-либо правил или корреляций, наложенных на эти переговоры [3]), так что такая норма поведения не должна была ничего предусматривать в этом отношении. Теперь имеются переговоры между главным игроком и какими-то из остальных, но на этот раз такая норма должна обеспечивать определенные корреляции и правила для противников главного игрока. Соответственно имеется множество возможных норм.

Рассмотренные выше качественные типы неопределенностей, возникающие в случаях (I) и (II″), являются более общей формой той неопределенности, которую мы исследовали в пп. 47.8 и 47.9. Замечания, сделанные там о двумерной (область) и одномерной (кривая) частях тех решений, в действительности применимы соответственно и к настоящим случаям (I) и (II″).

Хотя и можно с некоторым правдоподобием мотивировать это различие словесной аргументацией, вся она далека от убедительности. Только проведенный математический вывод дает реальное обоснование, и его сравнительная сложность показывает, как трудно перевести его на обычный язык. Здесь мы имеем другой пример результата, который может быть выражен словесно, но едва ли может быть таким способом доказан.

**55.12.5.** Четвертое. Положение остальных игроков, т. е. игроков из $S_*$, также имеет интересные аспекты.

Рассмотрение (55:L′) показывает, что в каждом дележе нашего решения либо все эти игроки получают выигрыш $\alpha_*$, либо один из них

---

[1]) $\alpha_i(y)$, где $i \in (1, \ldots, n-1) - S_*$.

[2]) Это соответствует переменному $y$ в (55:L′:e). См. также (55:P′:b).

[3]) Кроме суммы, предназначенной главному игроку, который сегрегируется.

получает $\alpha_*$, а остальные получают выигрыши $-1$. Отсюда непосредственно выводится следующее:

(a) Если $S_*$ есть одноэлементное множество, то игрок из $S_*$ получает всегда один и тот же выигрыш $\alpha_*$.

(b) Если $\alpha_* = -1$, то каждый игрок из $S_*$ всегда получает один и тот же выигрыш $-1$.

(c) Если не имеют места ни (a), ни (b), т. е. если условие из (55:U) (упоминаемое также в (55:D′)) выполняется, то каждый игрок из $S_*$ всегда получает один из двух различных выигрышей $\alpha_*$ и $-1$, и ни один из них не может быть опущен [1]).

Отсюда можно вывести следующие интерпретирующие заключения:

(d) В двух случаях, (a) и (b), но не в случае (c), игроки из $S_*$ сегрегируются в смысле п. 33.1.

(e) Случай (a), где $S_*$ является одноэлементным множеством, именно $S_* = (i)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, выражает сегрегацию одного игрока $i$. Значение $\alpha_*$, которое тогда назначается ему, ограничено на основании (55:B′):

(55:29) $$-1 \leqq \alpha_* < \frac{1}{n-1}.$$

Это является удовлетворительным дополнением к сегрегации главного игрока (случай (I)), описанной во втором замечании [2]). Величина $\overline{\omega}$, которая тогда назначалась главному игроку, была ограничена на основании (55:G):

(55:30) $$-1 \leqq \overline{\omega} < n-2-\frac{1}{n-1}.$$

(f) Если множество $S_*$ не является одноэлементным, то из случаев (a) и (b) остается только (b): $\alpha_* = -1$.

Скажем то же другими словами:

Если должно быть сегрегировано более одного игрока, то их совокупность не должна содержать главного игрока, а также всех остальных игроков; и сегрегированным игрокам всем должна назначаться величина

(55:31) $$\alpha_* = -1.$$

(g) Из (e) и (f) мы заключаем, что множества игроков, которые могут быть сегрегированы, являются как раз множествами из $L$ [3]), т. е. проигрывающими множествами.

(h) Если сегрегируется только один игрок, то (e) показывает, что он не обязательно будет дискриминироваться абсолютно невыгодным образом. Это значит, что ему может назначаться большая, чем $-1$, сумма. Неравенства (55:29) и (55:30) также указывают верхнюю границу для этой назначенной величины. Очевидно, именно такой выигрыш этот сегрегированный игрок получил бы в конечном решении в случае (I), рассматривавшемся в первом

[1]) То есть оба встречаются в соответствующих дележах решения.

[2]) Это разрешает трудность, указанную в замечании на стр. 483—484.

[3]) Это лучше всего проверить, вспомнив перечисление элементов из $W$ и также из $L$, в случае $C_{n-1}$ из п. 52.3.

замечании [1]). Весьма отрадно, что это является распространением результата из п. 33.1.2 с $n = 3$ на произвольное $n$.

(i) Если, наоборот, сегрегируется более одного игрока [2]), то (55:31) показывает, что не может быть никаких уступок. Им всем должен быть выдан абсолютный минимум —1.

(j) Это утверждение нужно видоизменить следующим образом. Если $S_*$ содержит более одного элемента, то все $\alpha_*$ из (55:29) все еще возможны; действительно, (55:L′) вместе с (55:B′) их допускает явно. Но тогда положение игроков из $S_*$ описывается в (c) и более не может называться сегрегацией. Эти игроки могут создавать коалиции и при этом улучшать свое положение.

Ясно, что эти замечания, и в частности (g), (h) и (i), требуют дальнейших комментариев. Однако мы ограничимся здесь приведенными указаниями и вернемся к этому в другом месте.

**55.12.6.** Пятое. Мы нашли большое число решений, характеризуемых множеством параметров, причем некоторые из них были даже функциями, которые могли выбираться со значительной свободой. Основная классификация, однако, была довольно простой: она определялась множеством $S_* \subseteq (1, \ldots, n-1)$ [3]). Пары $S_*$, $-S_*$ исчерпывают, очевидно, все разбиения множества $I = (1, \ldots, n)$ на два подмножества. Возможно, это является первым указанием на общий принцип. В простой игре разбиение на два дополнительных множества, по-видимому, решает все, так как одно из них обязательно выигрывающее, а другое обязательно проигрывающее. В общих играх соответственно могут иметь значение разбиения на большее число множеств. Как бы то ни было, роль $S_*$ в настоящем особом случае дает первое представление о том, каким может быть общий принцип классификации во всех играх.

Мы пока еще не можем придать этому предположению более точную форму.

---

[1]) Именно, $n-2-\frac{1}{n-1}$ для главного игрока и $\frac{1}{n-1}$ для других. Назначенная игроку величина должна быть меньше, чем соответствующий из этих выигрышей.

[2]) То есть число $p$ элементов в $S_*$ будет $\geqq 2$. Так как $p \leqq n-2$ (см. (55:L′:a)), это может быть только при $n-2 \geqq 2$, т. е. при $n \geqq 4$. В этом причина того, что свойства (i) и (j) при $n = 3$ не наблюдались.

[3]) Как и во втором замечании, мы используем $S_* = \varnothing$ для обозначения случая (I), несмотря на рассуждения, предшествующие (55:O′).

*Глава XI*

# ОБЩИЕ ИГРЫ С НЕНУЛЕВОЙ СУММОЙ

## § 56. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРИИ

### 56.1. Постановка задачи

**56.1.1.** Наше исследование достигло той стадии, на которой можно отказаться от наложенного на игры ограничения «нулевой суммы». Мы уже однажды ослабили эти условия, рассматривая игры с отличной от нуля постоянной суммой. Но в действительности это не было существенным расширением игр с нулевой суммой, так как эти два класса игр связаны изоморфизмом стратегической эквивалентности (см. пп. 42.1 и 42.2). Теперь мы предполагаем пойти до конца и отказаться от каких бы то ни было ограничений, наложенных на сумму.

Отметим сначала, что рассмотрение игр только с нулевой суммой значительно ослабляет связь между играми и экономическими проблемами.

З а м е ч а н и е. Следовало бы отметить, что игры с нулевой суммой охватывают не только тип игр, разыгрываемых для развлечения (см. п. 5.2.1), но и многие из игр, имеющих определенную социальную природу. Читатель, который поднялся до понимания этого вопроса и помнит наши многочисленные интерпретации, полностью отдает себе отчет в справедливости этого утверждения.

Таким образом, различие между играми с нулевой суммой и с ненулевой суммой отражает, в некотором смысле, различие между чисто социальными и социально-экономическими вопросами. (Следующее предложение в тексте выражает эту же мысль.)

В частности, это ограничение придает особое значение задаче справедливого распределения в ущерб задаче о «производительности» (см. п. 4.2.1, особенно сноску 5 на стр. 59, а также п. 5.2.1). Это становится совсем очевидным в случае игры одного лица: поведение в этой ситуации — это только способ производства без каких-либо дележей (или распределений) между игроками. И действительно, игра одного лица не содержит никаких проблем в варианте с нулевой суммой, а в варианте с ненулевой суммой она является обыкновенной задачей максимизации.

Таким образом, следует ожидать, что осуществляемая нами программа распространения теории на случай всех игр с ненулевой суммой приведет нас в более тесный контакт со сходными вопросами экономического характера. В последующем обсуждении читатель скоро заметит изменение в общем направлении иллюстративных примеров и интерпретаций: мы будем иметь дело с вопросами двусторонней монополии, олигополии, рынков и т. д.

**56.1.2.** То, что мы будем рассматривать не только игры с нулевой суммой, означает, как это было указано в п. 42.1, что на функции $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, которые характеризуют игры в смысле п. 11.2.3, теперь не наложено никаких ограничений. Это значит, что требование

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv 0 \qquad (56:1)$$

из пп. 11.4 и 25.1.3 опускается и ничем не заменяется. Мы будем предполагать это и далее.

Это изменение требует полного пересмотра нашей теории со всеми соответствующими понятиями, на которые она опиралась. Характеристические функции, доминирование, решение — все эти понятия уже перестали быть определенными, поскольку (56:1) отменено. Подчеркиваем тот факт, что возникающая здесь проблема является концептуальной, а не просто технической, какими были все проблемы, с которыми мы имели дело в главах VI—X и которые лежали в основе теории игр с нулевой суммой [1]).

**56.1.3.** Перспектива начать все сначала была бы слишком обескураживающей: мы уже затратили значительные усилия на эти понятия и на теорию, основанную на них. Кроме того, мы встречаемся с некоторой концептуальной проблемой, и нам кажется, что качественные принципы, на которые опиралась наша теория, годны лишь для случая игр с нулевой суммой. Поэтому окончательное обобщение — переход от случая нулевой суммы к случаю ненулевой суммы, — казалось бы, должно свести на нет все наши прежние усилия. Поэтому мы должны найти способ обойти эти затруднения.

Здесь можно вспомнить подобную ситуацию, возникшую в п. 42.2. Там наш переход от случая нулевой суммы к случаю постоянной суммы, хотя и в несколько более узком смысле, имел подобные же последствия. Они были устранены использованием изоморфизма стратегической эквивалентности, как это было сделано в пп. 42.3 и 42.4.

Однако плодотворность этого приема исчерпывалась лишь упомянутым случаем: стратегическая эквивалентность расширяет семейство всех игр с нулевой суммой в точности до семейства всех игр с постоянной суммой, но не более. (Это становится ясным из рассмотрения пп. 42.2.2, 42.2.3 или 42.3.1.)

Таким образом, мы должны найти другой способ связать теорию игр с ненулевой суммой с уже созданной теорией игр с нулевой суммой.

## 56.2. Фиктивный игрок. Расширение до игры с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$

**56.2.1.** Прежде чем идти дальше, мы уточним терминологию. Будем рассматривать игры, для которых, как это установлено в п. 56.1.2, условие (56:1) опущено и ничем не заменено. Мы говорим о них, как об играх с ненулевой суммой, но важно ясно представлять, что это выражение понимается в нейтральном смысле, т. е. что мы не хотим исключить те игры, для которых окажется, что (56:1) выполнено. Следовательно, предпочтительнее использовать менее негативное название для таких игр. Итак, мы будем называть игры без ограничений на $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *общими играми* [2]).

Мы только что высказали пожелание как-то связать теорию общих игр с теорией игр с нулевой суммой. В действительности можно будет добиться и большего: любую данную общую игру можно будет интерпретировать как некоторую игру с нулевой суммой.

Это может показаться парадоксальным, так как общие игры образуют более широкое семейство, чем игры с нулевой суммой. Однако мы будем интерпретировать общую игру $n$ лиц как некоторую игру $n+1$ лиц с нулевой суммой. Таким образом, ограничение, возникшее при переходе

[1]) Среди этих технических проблем была одна, которую мы предпочли исследовать с помощью метода, содержащего некоторое концептуальное обобщение. Это — случай игр с постоянной суммой, на который мы будем ссылаться далее в тексте.

[2]) Это согласуется с п. 12.1.2.

от общих игр к играм с нулевой суммой, будет компенсироваться, — и это действительно возможно за счет увеличения числа участников [1]).

56.2.2. Прием, с помощью которого данная общая игра $n$ лиц превращается в игру с нулевой суммой $n+1$ лиц, является простым и естественным.

Он состоит из введения фиктивного $(n+1)$-го игрока, относительно которого предполагается, что он теряет ту сумму, которую выигрывают остальные $n$ реальных игроков, и наоборот. Этот игрок не должен, конечно, иметь никакого прямого влияния на ход игры.

Выразим это математически: рассмотрим общую игру $n$ лиц $\Gamma$ с игроками $1, \ldots, n$ и функциями $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ $(k = 1, \ldots, n)$ в смысле п. 11.2.3. Мы введем $(n+1)$-го *фиктивного игрока*, полагая

$$\mathcal{K}_{k+1}(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv -\sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n). \tag{56:2}$$

Переменные $\tau_1, \ldots, \tau_n$ контролируются реальными игроками $1, \ldots, n$. В этом выражается их влияние на ход игры. Так как имеется в виду, что фиктивный игрок не влияет на ход игры, переменная $\tau_{n+1}$, которую он контролирует, не введена.

Замечание. Формализм п. 11.2.3 предполагает существование $\tau_k$ для любого $k$ (для того чтобы применить это к данному случаю, мы должны заменить $n$ на $(n+1)$). Следовательно, можно было бы настаивать на введении переменной $\tau_{n+1}$ и для фиктивного $(n+1)$-го игрока.

Это требование легко удовлетворить. Достаточно ввести переменную $\tau_{n+1}$ с единственным возможным значением (т. е. положить $\beta_{n+1} = 1$, как уже отмечалось). Фактически можно даже использовать любую область для $\tau_{n+1}$ (т. е. любые $\beta_{n+1}$), так как $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_{n+1})$ не зависят от $\tau_{n+1}$, т. е. на самом деле они являются функциями $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, как это и отмечено в тексте.

Таким образом, мы получаем игру $n+1$ лиц с нулевой суммой, *расширение* $\Gamma$ *до игры с нулевой суммой*, которое будет обозначаться через $\overline{\Gamma}$.

## 56.3. Вопросы, касающиеся свойств $\overline{\Gamma}$

56.3.1. В утверждении, что мы интерпретировали любую общую игру $n$ лиц в виде игры $n+1$ лица с нулевой суммой, с самого начала содержится предположение, что вся теория $\overline{\Gamma}$ остается справедливой и для $\Gamma$. Это утверждение, конечно, требует внимательного рассмотрения.

Сейчас мы проделаем это исследование. Надо иметь в виду, что оно не может быть чисто математическим анализом, подобным проведенному в предшествующих главах, которые опирались на определенную теорию. Нам следует еще раз проанализировать самые основы рассматриваемой теории. Следовательно, сам анализ должен в основном иметь вид правдоподобных рассуждений, даже если они будут появляться в сочетании с дополнительными математическими соображениями. Эта ситуация в точности та же самая, что и в тех прежних примерах, где мы принимали решения относительно теорий игр с нулевой суммой двух, трех и $n$ лиц (см. пп. 14.1—14.5, 17.1—17.9 для игр двух лиц с нулевой суммой; глава V — игры трех лиц с нулевой суммой; § 29, пп. 30.1, 30.2 — игры

[1]) Этот факт может служить дальнейшей иллюстрацией вновь установленного положения, что любое увеличение числа участников необходимо вызывает обобщение и усложнение структурных возможностей игры.

$n$ лиц с нулевой суммой. Для общих игр $n$ лиц, т. е. для связи между теориями $\overline{\Gamma}$ и $\Gamma$, эквивалентными им пунктами будут 56.2—56.12).

Результат нашего анализа будет состоять в том, что не вся теория игры $\overline{\Gamma}$, как игры с нулевой суммой $n+1$ лица, в смысле п. 30.1.1, может быть применена к $\Gamma$. Это верно только для ее части, которую мы выделим. Другими словами, мы покажем, что не вся система решений $\overline{\Gamma}$, а лишь некоторая ее подсистема даст то, что мы будем интерпретировать как решение $\Gamma$.

**56.3.2.** Фиктивный игрок вводится как математический прием для того, чтобы получаемую игроками сумму сделать равной нулю. Поэтому существенно, что он не может иметь никакого влияния на ход игры. Этот принцип должным образом соблюден в определении $\overline{\Gamma}$, данном в п. 56.2.2. Мы должны, однако, задать себе вопрос, полностью ли исключен фиктивный игрок из всех действий, связанных с игрой.

Этот вопрос вовсе не излишен. Коль скоро в игре $\overline{\Gamma}$ участвует не менее трех игроков [1]), игра управляется коалициями, как мы это видели на ранней стадии нашего анализа. Участие фиктивного игрока в какой-либо коалиции, которое, возможно, приведет к выплате компенсаций игроками друг другу, полностью противоречило бы тому духу, в котором он был введен. А именно: фиктивный игрок вовсе не игрок, а лишь формальный прием для формальной цели. Пока он в прямой или косвенной форме не принимает никакого участия в игре, это допустимо. Но как только он начинает вмешиваться, его введение в игру, т. е. переход от $\Gamma$ к $\overline{\Gamma}$ перестает быть законным. Это значит, что игру $\overline{\Gamma}$ в этом случае нельзя рассматривать как игру, эквивалентную $\Gamma$, или как ее истолкование, так как реальные участники $\overline{\Gamma}$, т. е. $1, \ldots, n$, могут остерегаться опасностей или могут получить выгоду от возможностей, которых, очевидно, в $\Gamma$ не существует.

**56.3.3.** Можно подумать, что эти возражения опровергаются самим способом, каким мы вводим фиктивного игрока. В самом деле, величины

$$\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n,$$

которые реальные игроки получают в конце игры, не зависят ни от какой переменной, которую бы фиктивный игрок контролировал [2]), т. е. он не имеет ходов в игре. Как же он может оказаться желаемым партнером в коалиции?

Сначала может показаться, что это соображение имеет некоторую ценность. Описанные условия, казалось бы, делают любую коалицию одинаково обоснованной как без фиктивного игрока, так и с ним. Является ли он чем-нибудь иным, кроме «болвана»? Если бы это было так, то теория $\overline{\Gamma}$ могла бы быть без каких бы то ни было дальнейших оговорок применена к $\Gamma$. Однако это не так.

Верно, что фиктивный игрок, не имея ходов для того, чтобы влиять на течение игры, не является желаемым партнером ни для какой коалиции. Это значит, что никакой игрок и никакая группа игроков не станут

---

[1]) То есть когда $n+1 \geqq 3$, что означает $n \geqq 2$. Итак, только общая игра одного лица свободна от приведенных ниже возражений. Это находится в соответствии с фактом, который мы неоднократно подчеркивали, что общая игра $n$ лиц является чистой задачей максимизации, лишь когда $n = 1$.

[2]) А также величина $\mathcal{K}_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k$, которую он сам получает.

платить (положительную) компенсацию за его сотрудничество. Однако сам этот игрок может быть заинтересован во вступлении в коалицию. Сумма $\mathscr{K}_{n+1}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, которую он получает в конце игры, зависит от ходов других игроков — от $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — и ему может быть имеет смысл заплатить некоторым игрокам (положительную) компенсацию за то, чтобы они не вступали в коалицию с другими. Важно понять это правильно: пока играется игра $\Gamma$, т. е. пока фиктивный игрок является действительно фикцией, ничего подобного случиться не может; но если в действительности играется $\overline{\Gamma}$, т. е. если фиктивный игрок ведет себя так, как вел бы себя на его месте игрок реальный, то следует ожидать, что он предложит компенсации другим игрокам.

**56.3.4.** Как только фиктивный игрок начинает предлагать за сотрудничество с ним компенсации, которые, как мы видели выше, есть плата за отказ от вступления в кооперацию с другими игроками, он получает влияние, которое надо учитывать. Он предлагает объединиться в коалицию и заплатить некоторую цену за право вступить в нее, и его желание платить столь же существенно, как и прямое влияние на игру благодаря способности делать значимые ходы.

Итак, фиктивный игрок вступает в игру, несмотря на неспособность влиять на ее течение непосредственно с помощью своих ходов. Фактически это происходит именно благодаря его бессилию, которое определяет его политику предложения другим компенсаций и таким образом пускает в действие описанный выше механизм.

Для лучшего понимания ситуации, может быть, было бы полезно привести конкретный пример.

### 56.4. Ограничения в использовании $\overline{\Gamma}$

**56.4.1.** Рассмотрим общую игру двух лиц, в которой каждый игрок, оставшийся один, может обеспечить себе лишь сумму $-1$, в то время как оба вместе обеспечивают себе сумму 1. Легко ввести реализующие эту ситуацию правила игры [1]). В частности, этого можно добиться с помощью следующего простого комбинаторного устройства [2]).

Каждый игрок выбирает одно из чисел 1, 2. При этом, делая свой выбор, игрок не знает о выборе другого.

После этого расплата производится так: если оба игрока выбрали 1, то оба получают по 1/2, в остальных случаях каждый получает $-1$ [3]).

Легко проверить, что эта игра обладает нужными свойствами.

Рассмотрим теперь фиктивного игрока 3 и построим игру, с характеристической функцией $\mathrm{v}(S)$, $S \subseteq (1, 2, 3)$, как это описано в п. 56.2.2. В соответствии со сказанным выше,

$$\mathrm{v}((1)) = \mathrm{v}((2)) = -1,$$
$$\mathrm{v}((1, 2)) = 1.$$

---

[1]) Как будет видно из пп. 60.2, 61.2, 61.3, *двусторонняя монополия* соответствует именно этому случаю.

[2]) Эта конструкция напоминает конструкцию, использованную в определении простых мажоритарных игр трех лиц в п. 21.1.

[3]) В обозначениях п. 11.2.3: $\beta_1 = \beta_2 = 2$ и

$$\mathscr{K}_1(\tau_1, \tau_2) = \mathscr{K}_2(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } \tau_1 = \tau_2 = 1, \\ -1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, $v(\varnothing)=0$, и согласно общим свойствам характеристических функций (игры с нулевой суммой)

$$v((3)) = -v((1,2)) = -1, \qquad v((2,3)) = -v((1)) = 1,$$
$$v((1,3)) = -v((2)) = 1, \qquad v((1,2,3)) = -v(\varnothing) = 0.$$

Итак,

(56:3) $$v(S) = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{cases}, \text{ если } S \text{ имеет } \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \text{элементов.}$$

Формула (56:3) есть в точности формула (29:1) из п. 29.12, т. е. $\overline{\Gamma}$ является существенной игрой трех лиц с нулевой суммой в редуцированной форме с $\gamma = 1$. Таким образом, она совпадает с простой мажоритарной игрой трех лиц, которая рассматривалась в § 21 [1]).

Из эвристических рассуждений §§ 21—23 мы вывели, что эта игра есть не что иное, как соперничество игроков при объединении в коалиции. Действительно, это становится очевидным, если рассматривать природу простой мажоритарной игры трех лиц (см. п. 21.2.1). Следовательно, фиктивный игрок будет заведомо проявлять тенденцию к вступлению в коалиции. В действительности игра $\overline{\Gamma}$, если она задана характеристической функцией, вполне симметрична относительно ее трех игроков. Значит, два реальных игрока 1, 2 играют в точности ту же самую роль, что и фиктивный игрок 3, и поэтому не существует причин, по которым их возможности вступать в коалиции отличались бы от его возможностей [2]).

**56.4.2.** Мы можем также обратиться к доводам из последней части п. 56.3 и применить их к этой игре: если фиктивный игрок 3 в $\overline{\Gamma}$ ведет себя как реальный, то у него имеется достаточно причин, чтобы пытаться помешать образованию коалиции игроков 1, 2, так как в этом случае он теряет 1, если же эта коалиция не образуется [3]), он выигрывает 2. Следовательно, он будет предлагать игроку 1 или 2 компенсацию за разрушение их коалиции, т. е. за выбор значения $\tau_1$ или соответственно $\tau_2$, равного 2, а не 1. Эта компенсация может быть определена, как это делается в §§ 22, 23, и оказывается равной 3/2 [4]). Читатель может сам убедиться в этом, а также и в том факте, что эта процедура приводит к уже известным результатам, касающимся простых мажоритарных игр трех лиц.

---

[1]) Конечно, все эти игры совпадают, если рассматривать их характеристические функции, но ведь и вся теория из п. 30.1.1 основана только на характеристических функциях.

[2]) Во избежание недоразумений подчеркнем еще раз, что правила $\overline{\Gamma}$, полностью выраженные в $\mathscr{K}_k$, не симметричны относительно игроков 1, 2, 3. $\mathscr{K}_k$ зависят от $\tau_1$, $\tau_2$ и не зависят от $\tau_3$. Только характеристическая функция $v(S)$, $S \subseteq (1, 2, 3)$ симметрична относительно 1, 2, 3. Но мы знаем, что только $v(S)$ и имеет значение (см. сноску 1).

[3]) По сноске 3 на стр. 514 и по (56:2):

$$\mathscr{K}_3(\tau_1, \tau_2) = -\mathscr{K}_1(\tau_1, \tau_2) - \mathscr{K}_2(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} -1 \text{ для } \tau_1=\tau_2=1, \\ 2 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

[4]) Это — такая компенсация, которая увеличивает выигрыш игрока 1 или 2 (объединяющегося с фиктивным игроком 3) от проигрыша, равного —1, до выигрыша, равного $^1/_2$, который он получает в коалиции 1, 2. Это также снижает выигрыш фиктивного игрока с 2 до $^1/_2$. Это число $^1/_2$ он в действительности и должен получить.

**56.4.3.** Пример из п. 56.4.1 придает смысл возражениям, высказанным в пп. 56.3.3 и 56.3.4. Итак, фиктивный $(n+1)$-й игрок может влиять на игру $\overline{\Gamma}$ не прямо, через личные ходы, а косвенно, предлагая компенсации и тем самым изменяя условия и исходы конкуренции для коалиций. Как указано в конце п. 56.3.3, это не означает, что подобное может случится и в $\Gamma$, т. е. когда фиктивный игрок есть просто фикция. Это происходит в $\overline{\Gamma}$ в случае, если теория п. 30.1.1 применяется буквально, т. е. если фиктивному игроку позволено вести себя так (в предложении компенсаций), как если бы он был реальным игроком. Другими словами, рассуждения последних абзацев не означают, что мы хотим приписать фиктивному игроку возможности, противоречащие тому духу, в котором он был введен. Они служат только для того, чтобы показать, что безоговорочное применение нашей первоначальной теорий приводит нас к такому противоречию. Следовательно, мы должны заключить, что игру с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$ нельзя рассматривать как безоговорочный эквивалент общей игры $\Gamma$.

Что же мы теперь должны делать? Для того чтобы ответить на этот вопрос, лучше вернуться к анализу примера из п. 56.4.1, в котором эти трудности выражены полностью.

## 56.5. Две возможные процедуры

**56.5.1.** Можно пытаться выйти из этих затруднений, наблюдая, что произойдет в п. 56.4.1, если мы перестанем использовать лишь характеристические функции. Действительно, игра $\overline{\Gamma}$ совпадает там с простой мажоритарной игрой трех лиц, в которой механизм образования коалиций является очевидным. Это совпадение следует понимать только в том смысле, что эти игры имеют одни и те же характеристические функции, но не одни и те же $\mathcal{K}_k$ (см., в частности, сноски 1 и 2 на стр. 515). Итак, возможным выходом может быть следующий: отказаться от требования опираться лишь на характеристические функции, а строить теорию на самих $\mathcal{K}_k$.

Однако при ближайшем рассмотрении это предложение оказывается совершенно бесполезным, по крайней мере для рассматриваемой задачи.

Во-первых, отказ от $\mathrm{v}(S)$ в пользу $\mathcal{K}_k$ лишил бы нас всех способов исследования проблемы. Для игр с нулевой суммой мы не располагаем никакой общей теорией, кроме рассмотренной в п. 30.1.1, основанной исключительно на $\mathrm{v}(S)$. Поэтому принятие нашей программы сделало бы переход от общей игры $\Gamma$ к игре с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$ совершенно бесполезным, так как при этом становится невозможным рассматривать игры с нулевой суммой как общие игры. Следовательно, принесение в жертву целой существующей теории имело бы смысл только в том случае, если бы мы были вполне уверены в том, что, несмотря на ее пригодность во всех остальных отношениях, иного выхода нет. Однако ни то, ни другое не имеет места.

Во-вторых, это возвращение от характеристических функций к $\mathcal{K}_k$ не устраняет возражений, высказанных в предыдущих пунктах. В самом деле, в конце п. 56.3.2, так же как и в п. 56.4.2, мы действовали тем же способом, каким вводили в рассмотрение $\mathcal{K}_k$. Мы обосновали необходимость фиктивному игроку в $\overline{\Gamma}$ предлагать компенсации способом, который никак не зависел от замены $\overline{\Gamma}$ на другую игру с той же самой характеристической функцией [1]).

[1]) Мы снова используем замену в п. 56.4.1, но не в последующей аргументации п. 56.4.2!

В-третьих, из дальнейшего будет ясно, что нет необходимости отказываться от теории, основанной на характеристических функциях, а все недостатки можно устранить с помощью простого ограничения в ее применении.

**56.5.2.** Обращение к пп. 56.3.2 и 56.4.2 показывает, что мы не можем целиком отнести наши трудности, связанные с поведением фиктивного игрока, на счет теории из п. 30.1.1.

Рассуждения в пп. 56.3.2—56.3.4 и п. 56.2 полностью эвристичны. Это, в частности, важно отметить в случае п. 56.4.2, где нежелательные результаты были получены определенным способом на конкретном примере. В самом деле, исследования в п. 56.4.2 опираются на «предварительные» эвристические рассуждения о существенных играх трех лиц с нулевой суммой из §§ 21—23, а не на строгую теорию из § 32.

Все, что было сделано как в 56.4.2, так и в 56.4.1, в терминологии строгой теории можно описать так: общая игра двух лиц Г из п. 56.4.1 приводит к игре трех лиц с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$, которая совпадает с простой мажоритарной игрой. Теория из п. 30.1.1 дает различные решения для этой игры, которые изучены и классифицированы в п. 33.1. Далее в пп. 56.4.1 и 56.4.2 выбирается одно из этих решений, а именно недискриминирующее решение из п. 33.1.3.

Следовательно, мы должны спросить себя: почему разумно выбирать именно это недискриминирующее решение? Разве не может случиться, что другое решение, с дискриминацией в смысле п. 33.1.3, свободно от указанных недостатков?

## 56.6. Дискриминирующие решения

**56.6.1.** Если бы мы рассматривали существенную игру трех лиц с нулевой суммой, т. е. простую мажоритарную игру трех лиц, с любой иной точки зрения и если бы нам необходимо было выбрать некоторое, вполне определенное из ее решений, то нам следовало бы иметь строгие доводы в пользу недискриминирующего решения. Это решение, т. е. норма поведения, которую оно представляет, дает всем трем игрокам одинаковые возможности объединяться в коалиции, и, при отсутствии каких-либо определенных мотивов для дискриминации, его можно считать самым «естественным» решением этой игры [1]).

Однако в данной ситуации имеется много причин для дискриминации: в игре $\overline{\Gamma}$ игроки 1 и 2, участники Г, являются реальными игроками, в то время как игрок 3, — подчеркиваем это снова, — только формалистическая фикция. В ходе обсуждения в предыдущих пунктах мы подчеркивали, что этот игрок не должен бороться за вступление в коалицию и вести себя так, как остальные. Другими словами, если мы, в конце концов, считаем возможным применение к данной ситуации теории из п. 30.1.1, то дискриминация фиктивного игрока 3 является совершенно необходимой, т. е. необходимо выбрать одно из тех решений, которые названы в п. 33.1 дискриминирующими решениями, причем дискриминированным игроком будет фиктивный игрок 3.

Мы уже видели, что эти решения с дискриминацией характеризуются тем, что дискриминированный игрок, который данным решением (т. е. нормой поведения), лишен возможности вступать в коалиции, получает

[1]) Конечно, другие решения также хороши в строгом смысле п. 30.1.1, но тем не менее приведенное выше утверждение на первый взгляд также разумно.

фиксированную сумму $c$ во всех дележах решения. Из п. 33.1.2 следует, что эта сумма не обязательно равна тому минимуму, который игрок себе может обеспечить, играя один, т. е. не обязательно, чтобы было $c = -1$. В действительности $c$ может быть выбрано из промежутка $-1 \leqq c < 1/2$.

**56.6.2.** В этом месте стоит ненадолго прервать рассуждения для того, чтобы коротко остановиться на том дискриминирующем решении, которое создает фиктивному игроку наихудшую из возможных ситуацию, т. е. с $c = -1$. В соответствии с п. 33.1.1, это решение состоит из всех тех дележей, в которых фиктивный игрок 3 получает $-1$, а каждый из остальных (реальных) игроков получает $\geqq -1$.

Как уже отмечалось, это значит, что решение (т. е. норма поведения) никак не влияет на разделение выигрыша между двумя реальными игроками. Высказанные там соображения теперь можно углубить: переговоры между игроками 1 и 2 становятся полностью неограниченными не только потому, что принятая норма поведения исключает влияние игрока 3 (который имеет лишь нормативное влияние по отношению к игрокам 1, 2), но и по той еще более существенной причине, что игрок 3 не существует. Легко видеть, что таким образом, исключается угроза того, что один из игроков, 1 или 2, откажется вступать в кооперацию с другим, если его «справедливую долю» не признает его партнер, и что вместо этого он вступит в соглашение с игроком 3 и получит компенсацию из этого источника.

## 56.7. Альтернативные возможности

**56.7.1.** Продолжим теперь рассуждения, которые мы прервали в конце п. 56.6.1.

Может показаться непонятным, должны ли мы ограничиться $c = -1$, или можем допустить всю область изменения $-1 \leqq c < 1/2$. Первая возможность является на первый взгляд более подходящей. В самом деле, $c > -1$ означает, что реальные игроки не эксплуатируют фиктивного игрока в полную силу своих возможностей, т. е. они не пытаются выиграть максимальную возможную сумму. Можно рассматривать такое самопожертвование как компенсацию фиктивному игроку за принятую им устойчивую норму поведения. Но так как мы решили исключить любое участие фиктивного игрока в образовании коалиций и уплате компенсаций, то тем самым должно быть оправдано запрещение этой второй возможности.

Следует, однако, признать, что эти аргументы не являются вполне убедительными. Компенсация (положительная), которую платит фиктивный игрок, качественно отличается от той, которую платят ему. Первая есть очевидная бессмыслица, так как фиктивный игрок не существует и, следовательно, не может платить компенсаций. Вторая, с другой стороны, вовсе не является абсурдом. Она просто выражает некоторое самоограничение в использовании коллективных возможностей, и мы имеем несколько примеров, показывающих, что этого может требовать устойчивая норма поведения[1]). Априори не ясно, что о таком самоограничении

---

[1]) Это, конечно, только другой способ выражения возможности из п. 33.1.2. Другой пример в игре четырех лиц с нулевой суммой дан в (38:F) из п. 38.3.2. Еще один получен для всех неразложимых игр в п. 46.11. (В этом последнем примере самоограничение осуществляется игроками из $\Delta$, когда $\overline{\varphi} < 0$ и игроками из H, когда $\overline{\varphi} > 0$; см. там же).

Мы подчеркиваем, что такое самоограничение происходит под давлением принятой нормы поведения, хотя предполагается (как и всегда в нашей теории), что игрокам полностью известны возможности игры.

не может идти речь и в данной ситуации [1]). Исключение этой возможности означало бы, что устойчивая норма поведения (при наличии полной информации) с необходимостью приводила бы к получению максимальной коллективной выгоды. Читатель, знакомый с существующей социологической литературой, должен знать, что дискуссии по этому вопросу далеки от завершения.

Мы, однако, при решении этого вопроса в рамках нашей теории покажем, что $c$ должно принимать минимально возможное значение [2]).

**56.7.2.** Однако некоторое время мы можем рассматривать обе возможности параллельно.

С этой целью вернемся к общей игре $n$ лиц $\Gamma$ и соответствующей игре с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$. Теперь мы можем дать точные определения.

(56:A:a) Обозначим множество всех решений $\overline{\mathbf{V}}$ игры $\overline{\Gamma}$ через $\Omega$.

(56:A:b) Пусть дано число $c$. Обозначим через $\Omega_c$ систему тех решений $\overline{\mathbf{V}}$ игры $\overline{\Gamma}$, в которых для каждого дележа

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\} \in \overline{\mathbf{V}}$$

должно быть $\alpha_{n+1} = c$ [3]).

(56:A:c) Обозначим объединение всех $\Omega_c$ через $\Omega'$.

(56:A:d) Обозначим то $\Omega_c$, для которого $c = \mathrm{v}((n+1)) = -\mathrm{v}((1, \ldots, n))$, через $\Omega''$ [4]).

В связи с (56:A:c) заметим следующее.

Для некоторых $c$ множество $\Omega_c$ пусто. Эти $c$, очевидно, могут быть при построении $\Omega'$ опущены. Итак, из того, что $\alpha_{n+1} \geqq \mathrm{v}((n+1)) = -\mathrm{v}((1, \ldots, n))$, следует, что $c \geqq -\mathrm{v}((1, \ldots, n))$; в остальных случаях множество $\Omega_c$ пусто. Далее, из

$$\alpha_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqq -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k))$$

следует $c \leqq -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k))$; в остальных случаях $\Omega_c$ пусто. Следовательно, $c$ подчинено ограничению

(56:4) $$-\mathrm{v}((1, \ldots, n)) \leqq c \leqq -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k)).$$

На самом деле, оно, как правило, заключено в еще более узких границах [5]).

Множество $\Omega''$ из (56:A:d) соответствует минимальному $c$ из (56:4).

---

[1]) Однако, если это случится, то это можно рассматривать как неэффективную, хотя и устойчивую, форму социальной организации.

[2]) То есть упомянутого самоограничения не происходит и всегда получается максимальная социальная выгода. Этот результат не является таким общим, как это может показаться, так как мы предполагаем численную неограниченно трансферабельную полезность, равно как и полную информацию.

[3]) То есть фиктивный игрок получает одну и ту же сумму $c$ во всех дележах решения.

[4]) То есть фиктивный игрок получает во всех дележах решения ту сумму, которую он себе может обеспечить, даже в оппозиции ко всем остальным. Это означает, как мы уже знаем, что реальные игроки получают вместе максимальный общий выигрыш.

[5]) Так, для существенной игры трех лиц с нулевой суммой (56:4) дает $-1 \leqq c \leqq 2$, тогда как мы знаем из п. 32.2.2, что точная область изменения (с непустыми $\Omega_c$) есть $-1 \leqq c < 1/2$.

### 56.8. Новое построение

**56.8.1.** Наши рассуждения в пп. 56.3.2—56.4.3 показали, что не все решения из $\Omega$ одинаково важны для $\Gamma$. В п. 56.6.1 область этих решений была сужена, однако осталось невыясненным, будет системой всех имеющих значение решений $\Omega'$ или $\Omega''$.

Итак, системы $\Omega'$ и $\Omega''$ соответствуют двум возможностям, о которых уже говорилось. Займемся теперь выяснением различий между $\Omega'$ и $\Omega''$.

Рассмотрим дележи

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\} \tag{56:5}$$

игры $\overline{\Gamma}$. Среди компонент $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ первые $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — это реальные суммы, которые реальные игроки, $1, \ldots, n$ соответственно должны получить при дележе $\vec{\alpha}$. С другой стороны, последняя его компонента $\alpha_{n+1}$ выражает некоторую фиктивную величину — сумму, приписываемую фиктивному игроку $n+1$. Далее, компонента $\alpha_{n+1}$ не только фиктивна в интерпретации $\overline{\Gamma}$, но не является также математически необходимой; т. е. если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ известны, то она определяется. Действительно, так как сумма всех компонент дележа $\vec{\alpha}$ должна быть равна нулю, то

$$\alpha_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{56:6}$$

Следовательно, удобнее задавать $\vec{\alpha}$ только его компонентами $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$, помня при этом, что компонента $\alpha_{n+1}$ может быть получена (если это нужно) из равенства (56:6). Таким образом, мы будем писать

$$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\}. \tag{56:7}$$

Заметим, что этим обозначением мы не хотим заменить первоначальное, т. е. мы хотим быть свободными в выборе любого из (56:5) и (56:7). Для того чтобы предотвратить путаницу, которая может возникнуть из-за этого двойного определения, мы используем двойные скобки $\{\{\ \}\}$ в (56:7) вместо простых $\{\ \}$ в (56:5).

Замечание. Конечно, мы могли бы все это продолжить, т. е. сделать то же самое и для первоначальной игры $n$ лиц с нулевой суммой. Там дележ

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

также определен своими компонентами $\alpha_i$, $i \neq i_0$ (для любого фиксированного $i_0$), так как

$$\alpha_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0} \alpha_i.$$

В соответствии с этим мы уже заметили в (31.1) (из п. 31.2.1), что множество дележей существенной) игры $n$ лиц с нулевой суммой имеет размерность $(n-1)$, а не $n$.

Однако мы не приобрели никаких преимуществ, избавившись от $\alpha_{i_0}$, и у нас не было способа решить, которое $\alpha_{i_0}$ следует исключить, если вообще его исключать. В графическом представлении существенной игры трех лиц с нулевой суммой мы сделали попытку сохранить все $\alpha_i$ (см. п. 32.1.2).

Здесь ситуация совсем другая, если учитывать особую роль $\alpha_{n+1}$. Исключение $\alpha_{n+1}$ будет существенным для нашего дальнейшего исследования.

**56.8.2.** Дележ $\alpha$ в его форме (56:5) подчиняется ограничению обращения суммы в нуль, а также условиям

$$\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i)) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n, n+1. \tag{56:8}$$

Мы должны переписать (56:8) для (56:7), учитывая (56:6).

Для $i=1, \ldots, n$ (56:8) не изменяется при переходе от (56:5) к (56:7), но для $i=n+1$ мы должны использовать (56:6). Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq -\mathrm{v}((n+1)) = \mathrm{v}((1, \ldots, n)).$$

Таким образом, (56:8) превращается в

(56:9) $$\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i)) \quad \text{для} \quad i=1, \ldots, n,$$

(56:10) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq \mathrm{v}((1, \ldots, n)).$$

### 56.9. Возвращение к случаю, когда Г является игрой с нулевой суммой

**56.9.1.** Остановимся на истолковании этих ограничений.

Ограничения (56:9) не новы. Они снова выражают то, что мы уже имели для игр с нулевой суммой, а именно, что никто не должен получить меньше, чем он может себе обеспечить, выступая против всех остальных игроков. Однако ограничение (56:10) появилось впервые. Его смысл станет ясным, если мы рассмотрим $\mathrm{v}((1, \ldots, n))$ более внимательно.

$\mathrm{v}((1, \ldots, n))$ есть значение игры для составного игрока, образованного из всех реальных игроков $1, \ldots, n$, против фиктивного игрока $n+1$. Сумма, которую этот составной игрок получит в конце игры, есть, конечно,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

Он управляет переменными $\tau_1, \ldots, \tau_n$, т. е. всеми переменными, которые входят в это выражение. Так, в игре двух лиц с нулевой суммой реальные игроки управляют всеми ходами, в то время как фиктивный игрок не имеет никакого влияния на течение игры.

Сопоставляя это со схемой игры двух лиц с нулевой суммой, описанной в п. 14.1.1, мы получим, что наша $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k$ соответствует $\mathcal{K}$ для этого случая, а наши переменные $\tau_1, \ldots, \tau_n$ соответствуют одной переменной $\tau_1$; вместе с тем никакая переменная не может быть при этом поставлена в соответствие $\tau_2$ из п. 14.1.1.

Интуитивно ясно, что значение такой игры (для первого игрока) получается при максимизации выигрыша по всем его переменным (так как все они им управляются). Оно равно

(56:11) $$\max_{\tau_1, \ldots, \tau_n} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n),$$

что соответствует в схеме из п. 14.1.1 выражению

(56:12) $$\max_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \qquad (\tau_2 \text{ фактически отсутствует}).$$

Конечно, систематическая теория из §§ 14, 17 дает тот же самый результат: $\mathrm{v}_1$, $\mathrm{v}_2$ в п. 14.4.1 равны как друг другу, так и выражению (56:12), ибо операция $\min_{\tau_2}$ является «пустой». Таким образом, игра вполне определена и имеет значение (15:12) в смысле пп. 14.4.2 и 14.5. Следовательно, общая теория из § 17 необходимо приводит к тому же значению.

Итак, мы видим, что

(56:13) $$\mathrm{v}((1, \ldots, n)) = \max_{\tau_1, \ldots, \tau_n} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

Следовательно, (56:10) выражает, что ни один дележ не может дать всем реальным игрокам больше, чем они могут получить в самом благоприятном случае, т. е. предполагая полную кооперацию и наилучшую возможную стратегию [1]).

Замечание. Если игра в своей первоначальной форме, т. е. до того, как осуществлено нормирование из пп. 12.1.1 и 11.2.3, содержит случайные ходы, то в словах «самый благоприятный случай» речь идет не о них. Именно, предполагаются только кооперация и оптимальный выбор стратегий, в то время как случайные ходы должны учитываться только при нахождении математического ожидания выигрышей. В действительности как раз этим путем мы переходили в п. 11.2.3 от функций

$$\mathcal{G}_k(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$$

(где $\tau_0$ представляет влияние всех случайных ходов) к функциям $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, с которыми мы сейчас имеем дело.

Суммируя сказанное, мы получаем:

(56:B) Дележи в форме (56:7) подчиняются следующим ограничениям:

(56:B:a) Никакому реальному игроку не следует предлагать меньше, чем он может себе обеспечить, даже играя против остальных (см. (56:9)).

(56:B:b) Все реальные игроки вместе не должны получить больше той суммы, которую можно ожидать в самом благоприятном случае, т. е. при полной кооперации и лучшей стратегии (см. (56:10) и (56:13)).

Эти формулировки делают смысл наших ограничений (56:9) и (56:10) (т. е. (56:B:a), (56:B:b)) совершенно ясным. Нарушение (56:9) (т. е. (56:B:a)) означает, что один из реальных игроков получает предложение более неблагоприятное, чем то, на что он может рассчитывать в худшем случае. Нарушение (56:10) (т. е. (56:B:a)) означает, что объединение всех (реальных) игроков получает предложение более выгодное, чем то, что они могут надеяться когда-либо получить. Представляется естественным рассматривать (56:10) именно как те условия, при которых игроки, действующие разумно, откажутся рассматривать какую-либо схему распределения (дележ) ввиду ее явной бессмысленности.

**56.9.2.** Прежде чем продолжать, мы снова должны просмотреть уже сделанное и сравнить построенную только что теорию с прежней в тех случаях, когда они обе применимы.

В частности, предположим, что мы применяем преобразования предыдущего пункта к игре Г $n$ лиц, которая уже является игрой с нулевой суммой. Построим для этой игры сначала игру $n+1$ лица с нулевой суммой, как это описано в п. 56.2.2, а затем поступим, как в п. 56.8.2.

Важно не ошибиться в смысле этих операций. Очевидно, что операции из пп. 56.2.2 и 56.8.2 не нужны, если сама игра Г с нулевой суммой, так как мы располагаем теорией, которая этот случай предусматривает. Но если на этой основе должна быть построена более общая теория,

[1]) Заметим, что понятие наилучшей стратегии для всего объединения реальных игроков определено очевидным образом: если они полностью объединены, то мы имеем чистую задачу максимизации.

верная для всех игр, то мы должны потребовать, чтобы она согласовалась со старой (более частной) теорией там, где последняя применима. Это значит, что в пределах применимости старой теории, где новая теория оказывается излишней, она должна согласовываться со старой теорией [1]).

**56.9.3.** То, что Г является игрой $n$ лиц с нулевой суммой, означает, что

$$\sum_{k=1}^{n} \mathscr{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv 0,$$

т. е. $\mathscr{K}_{n+1}(\tau_1, \ldots, \tau_n) = 0$. Таким образом, $\mathrm{v}(S)$ не изменится, если $(n+1)$-й фиктивный игрок добавлен к множеству $S$ (или исключен из него). Иными словами,

(56:14) $$\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}(S \cup (n+1)) \quad \text{для} \quad S \subseteq (1, \ldots, n).$$

Частные случаи, когда $S = \varnothing$, $(1, \ldots, n)$ дают нам

(56:15) $$\mathrm{v}((n+1)) = 0,$$

(56:16) $$\mathrm{v}((1, \ldots, n+1)) = 0.$$

Соотношения (56:14) и (56:15) показывают, что игра $\overline{\Gamma}$ разложима с разлагающими множествами $(1, \ldots, n)$ и $(n+1)$. Ее составляющая с $(1, \ldots, n)$ есть первоначальная игра Г, а фиктивный игрок является «болваном» [2]). (О разложении см. конец п. 42.5.2 и п. 43.1. О «болванах» см. замечание на стр. 353 и наконец п. 43.4.2.)

Теперь мы можем высказать следующие соображения.

**56.9.4.** Первое. Так как $\overline{\Gamma}$ получается из Г добавлением «болвана», решения Г и $\overline{\Gamma}$ (в старой теории) должны соответствовать друг другу, и различие между ними должно заключаться лишь в том, что в последнем присутствует «болван» (фиктивный, $(n+1)$-й игрок), которому приписывается выигрыш $\mathrm{v}((n+1)) = 0$ (см. п. 46.9.1, или (46:M) в п. 46.10.4).

Предлагаемая нами новая теория позволит получить решение Г из решений (в старой теории) $\overline{\Gamma}$. Поэтому из приведенного выше рассуждения следует, что все новые решения, полученные для Г, будут находиться среди старых. Кроме того, мы видим, что в этом случае мы можем (а в действительности даже должны) взять всю систему $\Omega$ из (56:A:a) в п. 56.7.2. Следует отметить, однако, что в этом случае все решения $\Omega$ автоматически приписывают фиктивному игроку $n+1$ сумму $\mathrm{v}((n+1))$. Таким образом, здесь $\Omega = \Omega_c$ с $c = \mathrm{v}((n+1))$, т. е. $\Omega = \Omega'$ (см. (56:A:b) и (56:A:d)). Следовательно, любое множество, которое мы можем определить между $\Omega$ и $\Omega''$ (в частности, каждое из множеств $\Omega'$ и $\Omega''$ из (56:A:c) и (56:A:d)), совпадает с $\Omega$ и одинаково подходит для наших целей.

Другими словами, выбор между $\Omega'$ и $\Omega''$, который мы должны сделать, в данном случае не имеет значения. Обе возможности согласуются здесь

---

[1]) Это — хорошо известный методологический принцип математического обобщения.

[2]) Читатель должен помнить, что в общем случае в $\overline{\Gamma}$ фиктивный игрок не является «болваном». Это, возможно, звучит парадоксально, но это было показано в п. 56.3 на частном примере общей игры двух лиц Г. В действительности это именно потому, что правила игры $\overline{\Gamma}$ не позволяют ему в общем случае приписать роль «болвана», и мы должны были ограничить решения $\overline{\mathrm{V}}$ игры $\overline{\Gamma}$ теми, где он эту роль играет. В этом и состоит смысл пп. 56.3.2—56.6.2.

Мы определим в п. 57.5.3 те свойства Г, которые необходимы и достаточны для того, чтобы фиктивный игрок был «болваном».

со старой теорией; фактически здесь вовсе не было необходимости отказываться от старой теории [1].

**56.9.5.** Второе. Дележи для игры $n$ лиц с нулевой суммой в старой теории были определены следующим образом:

(56:C:a) $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$;

(56:C:b) $\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i))$ для $i = 1, \ldots, n$;

(56:C:c) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$.

Наше новое определение (56:7) из п. 56.8.1 отличается от этого. Здесь мы имеем

(56:C:a*) $\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\}$;

а на основании (56:9), (56:10) и (56:16),

(56:C:b*) $\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i))$ для $i = 1, \ldots, n$;

(56:C:c*) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq 0$.

Мы уже знаем из предыдущего замечания, что не может быть никакого существенного различия между старой и новой теориями [2]. Тем не менее полезно увидеть непосредственно (с точки зрения старой теории), что между (56:C:a), (56:C:b) и (56:C:a*), (56:C:b*) нет никакой разницы.

Единственное различие между этими определениями содержится в (56:C:c) и (56:C:c*). Вспоминая определение из п. 44.7.2, мы видим, что это различие можно выразить так: первое условие равносильно рассмотрению решения для $E$ (0), второе — для $F$ (0). Далее, мы уже заметили в п. 46.8.1, что 0 лежит в «нормальной» зоне игры Г и, по (45:O:b) в п. 45.6.1, $E$ (0) и $F$ (0) имеют одни и те же решения. Таким образом, мы получили полное соответствие.

Мы сделали эти два замечания, используя теорию композиции и разложения игр из главы IX для анализа влияния введенной новой процедуры для игры Г с нулевой суммой. Эта процедура состоит в основном из перехода от Г к $\overline{\Gamma}$, который, как мы видели, соответствует включению в игру Г «болвана». Это — существенно более частный случай композиции, рассмотренный в главе IX. Эти частные результаты могли быть получены с меньшими усилиями, чем в результате применения указанных гораздо более общих теорем. Мы не будем больше углубляться в этот предмет, так как общие результаты главы IX справедливы в любом случае, а проведенное выше рассуждение проясняет наши построения в их первоначальных условиях.

## 56.10. Анализ понятия доминирования

**56.10.1.** Вернемся теперь к общей игре $n$ лиц, ее расширению до игры с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$ и к новому определению дележей, которое было введено в п. 56.8.

[1]) Необходимость ограничения $\Omega$ была получена в пп. 56.5, 56.6 из рассмотрения игры Г с ненулевой суммой.

[2]) Или, более того, между старой и любой новой теорией, построенной в рассмотренном выше духе (мы пока еще не сделали выбора между $\Omega'$ и $\Omega''$).

Конечно, все решения $\overline{\Gamma}$, вообще говоря, не могут быть использованы для определения удовлетворительного понятия решения Г. Это выяснилось из рассмотрения частного примера в пп. 56.5—56.6. Изучим теперь вопрос систематически, т. е. применим к игре формальное определение решения, сформулированное в п. 30.1.1, и попытаемся выяснить в общем случае, какие из его свойств нас не удовлетворяют и требуют видоизменения.

При этом мы будем пользоваться понятием дележа (в $\overline{\Gamma}$) в новом определении (56:7) из п. 56.8.1. Важным свойством этого определения является то, что оно с самого начала подчеркивает значение реальных игроков в $\overline{\Gamma}$, т. е. обращает наше внимание скорее на Г, чем на $\overline{\Gamma}$. Но это, конечно, не изменяет того факта, что мы применяем формальную теорию п. 30.1.1 к игре $n+1$ лица с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$, а не к общей игре Г (что было бы невозможно).

Понятия в п. 30.1.1 опираются на понятия доминирования. Следовательно, мы начнем с объяснения смысла понятия доминирования, как оно было там определено, для дележей игры $\overline{\Gamma}$ в форме (56:7) из п. 56.8.1. Рассмотрим два дележа: $\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\}$, $\vec{\beta}=\{\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}\}$. Доминирование

$$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$$

означает, что существует непустое множество $S \subseteq (1, \ldots, n, n+1)$, эффективное для $\vec{\alpha}$, т. е.

$$\text{(56:17)} \qquad \sum_{i \in S} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(S),$$

и такое, что

$$\text{(56:18)} \qquad \alpha_i > \beta_i \quad \text{для всех} \quad i \in S.$$

Мы хотим выразить это в терминах $\alpha_i$, $\beta_i$ только для $i = 1, \ldots, n$. Необходимо различать две возможности.

**56.10.2.** Первая. $S$ не содержит $n+1$. Тогда

$$\text{(56:19)} \qquad S \subseteq (1, \ldots, n), \ S \text{ непусто.}$$

Условия (56:17) и (56:18) сохраняются в прежней форме, так как они содержат лишь $\alpha_i$, $\beta_i$ с $i=1, \ldots, n$. Кроме того, $S \subseteq (1, \ldots, n)$ для $\mathrm{v}(S)$ из (56:17).

Вторая. $S$ содержит $n+1$. Положим $T = S - (n+1)$. Тогда

$$\text{(56:20)} \qquad T \subseteq (1, \ldots, n), \ T \text{ может быть пустым.}$$

Условия (56:17) и (56:18) должны быть изменены, так как в них теперь входит $\alpha_{n+1}$, $\beta_{n+1}$.

Естественно составить множество $-S$ из $(1, \ldots, n, n+1)$, равное $(1, \ldots, n, n+1) - S$, и множество $-T$ из $(1, \ldots, n)$, равное $(1, \ldots, n) - T$. Ясно, что эти множества совпадают, но тем не менее полезно иметь для них два обозначения. Обозначим первое через $\perp S$, а второе через $-T$.

Так как $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 0$, то

$$\sum_{i \in S} \alpha_i = -\sum_{i \in \perp S} \alpha_i = -\sum_{i \in -T} \alpha_i, \qquad \mathrm{v}(S) = -\mathrm{v}(\perp S) = -\mathrm{v}(-T).$$

Следовательно, (56:17) превращается в

(56:21) $$\sum_{i \in -T} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(-T).$$

Сюда входят лишь $\alpha_i$ с $i = 1, \ldots, n$. Кроме того, $-T \subseteq (1, \ldots, n)$. Далее, неравенства (56:18) переписываем как

(56:22) $$\alpha_i > \beta_i \quad \text{для } i \text{ из } T$$

и $\alpha_{n+1} > \beta_{n+1}$. Последнее неравенство означает, что

(56:23) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

В (56:22) и (56:23) также входят лишь $\alpha_i$, $\beta_i$ с $i = 1, \ldots, n$.

Суммируя сказанное, мы получим следующее:

(56:D) $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ означает, что существуют либо

(56:D:a) $S$, удовлетворяющее (56:19) и (56:17), (56:18),

либо

(56:D:b) $T$, удовлетворяющее (56:20) и (56:21), (56:22), (56:23).

Заметим, что во все эти условия входят только множества $S$, $T$, $-T \subseteq (1, \ldots, n)$ и компоненты $\alpha_i$, $\beta_i$ при $i = 1, \ldots, n$, т. е. эти условия относятся только к первоначальной игре Г и к реальным игрокам $1, \ldots, n$.

**56.10.3.** Критерий доминирования (56:D) был получен буквальным применением первоначального определения из п. 30.1.1 к игре $\overline{\Gamma}$ и последующей его переформулировки в терминах игры Г. После того как эта строгая операция выполнена, попытаемся рассмотреть полученный результат с точки зрения его интерпретации, т. е. посмотрим, приводят ли в данном случае условия (56:D) к разумному определению доминирования.

В соответствии с (56:D) доминирование имеет место в двух случаях: (56:D:a) и (56:D:b).

(56:D:a) есть всего лишь переформулировка первоначального определения из п. 30.1.1 [1]). Оно выражает, что существует группа (реальных) игроков (множество $S$ из (56:19)), каждый из которых предпочитает свое положение в $\vec{\alpha}$ положению в $\vec{\beta}$ (т. е. (56:18)) и которым известно, что они могут данной группой (в объединении) обеспечить себе это предпочитаемое положение (т. е. (56:17)).

(56:D:b), с другой стороны, в терминах Г, и рассматриваемое только для реальных игроков, означает нечто совсем новое. Оно тоже требует, чтобы существовала группа (реальных) игроков (множество $T$ из (56:20)), каждый из которых предпочитает дележ $\vec{\alpha}$ дележу $\vec{\beta}$ (т. е. (56:22)). Способности этой группы обеспечить себе предпочитаемый дележ (т. е. (56:17)) не требуется. Вместо этого имеется условие, что реальные игроки, не вошедшие в эту группу, не должны быть в состоянии блокировать дележ $\vec{\alpha}$ в той мере, в какой он их затрагивает (это — (56:21)).

[1]) Примененного, однако, к общей игре Г, для которой эта теория не предназначалась!

Замечание. Реальные игроки из $-T$ могли бы не допустить дележа $\vec{\alpha}$, если бы они могли самостоятельно обеспечить себе больше, чем они вместе получают в $\vec{\alpha}$, т. е. если бы было

$$\sum_{i \in -T} \alpha_i < \mathrm{v}(-T).$$

(Заметим, что мы исключили здесь равенство, так как иначе дележ $\vec{\alpha}$ не блокировался бы.) Отрицанием этого будет

$$\sum_{i \in -T} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(-T). \tag{56:21}$$

Это можно сравнить с выражением возможности первоначальной группы $T$ обеспечить свое предпочтение, т. е.

$$\sum_{i \in T} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(T). \tag{56:17}$$

Следует отметить, что ни одно из (56:17), (56:21) не влечет другого: вполне возможно, что группа $T$ может обеспечить $\vec{\alpha}$, если это в интересах членов $T$, и что в это же самое время группа $-T$ может не допустить $\vec{\alpha}$, если это в ее интересах. С другой стороны, возможно также, что не выполнено ни то, ни другое.

Однако, если Г — игра с нулевой суммой и если мы требуем (как в старой теории) равенства $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, то соотношения (56:17) и (56:21) эквивалентны. В самом деле, в этом случае

$$\mathrm{v}(T) + \mathrm{v}(-T) = \mathrm{v}((1, \ldots, n)) = 0$$

и

$$\sum_{i \in -T} \alpha_i = -\sum_{i \in T} \alpha_i, \quad \mathrm{v}(-T) = -\mathrm{v}(T),$$

откуда и следует эквивалентность.

Наконец, имеется специфическое условие, в соответствии с которым всем (реальным) игрокам, т. е. обществу в целом, должно быть не хуже при предпочитаемом режиме $\vec{\alpha}$, чем при отвергнутом режиме $\vec{\beta}$ (см. (56:23)).

**56.10.4.** Странная возможность (56:D:b) была, очевидно, получена из-за трактовки фиктивного игрока как некоей реальности. Если же мы воздержимся от каких-либо попыток выражаться в терминах реальности (т. е. реальных игроков), то будет очень трудно интерпретировать (56:D:b). Лучшее, что можно, по-видимому, об этом сказать, — это то, что допускается эффективная возможность влияния некоторого определенного множества, которое повредит обществу в целом (т. е. объединению всех реальных игроков). В частности, в этом случае доминирование будет иметь место, когда все игроки некоторой группы (реальных игроков) предпочитают свое индивидуальное положение в $\vec{\alpha}$ положению в $\vec{\beta}$, если при этом оставшиеся (реальные) игроки не в состоянии изменить существующее положение и если это вредит обществу в целом.

При сравнении доминирования (56:D:b) с обычным доминированием (56:D:a) становятся ясными следующие различия: во-первых, в (56 : D:a) существенна возможность осуществления предпочтения некоторыми игроками, в то время, как в (56:D:b) существенна возможность остальных игроков блокировать это. Во-вторых, в (56:D:a) активная группа должна быть непустым множеством, в то время как в (56:D:b) она может быть и пустой (см. (56:19) и (56:20)). В-третьих, с (56:D:b) связаны антисоциальные соображения, чего нет в (56:D:a).

Читатель скоро сможет заметить, что (56:D:b) носит несколько неестественный характер, но тем не менее не является совсем уже необычным. Можно было бы легко сказать и больше о тех образах и аллегориях, точной формализацией которых являются (56:D:b). У нас нет необходимости дольше задерживаться здесь на этом вопросе. Важно то, что имеется ряд причин рассматривать возможность (56:D:b) как общее выражение тех трудностей, частный случай которых анализировался в пп. 56.5—56.6. Ясно, что (56:D:b) не является столь же правдоподобным подходом к понятию доминирования в том смысле, как (56:D:a).

Мы поэтому попытаемся разрешить наши трудности простым отбрасыванием (56:D:b).

## 56.11. Строгие рассуждения

**56.11.1.** Мы только что решили переопределить доминирование отбрасыванием (56:D:b) и сохранением (56:D:a) в (56:D) из п. 56.10.2. Эту новую концепцию *доминирования* можно обосновать двумя способами, каждый из которых заслуживает рассмотрения.

Первый. Как было отмечено в начале п. 56.10.3, утверждение (56:D:a) сводится к повторению соответствующего определения из п. 30.1.1. Единственное различие состоит в том, что там Г была игрой $n$ лиц с нулевой суммой, в то время как сейчас это — общая игра $n$ лиц.

Таким образом, данный способ означает, что мы распространили понятие доминирования из п. 30.1.1 на наш случай без изменения, несмотря на то, что игра уже не является игрой с нулевой суммой [1].

Второй. Рассмотрим теперь (56:D:a) с точки зрения $\overline{\Gamma}$, а не Г. В первоначальных рассмотрениях п. 56.10 мы получили два случая (56:D:a) и (56:D:b) в зависимости от двух исключающих друг друга возможностей. В смысле п. 30.1.1 понятие доминирования в $\overline{\Gamma}$ опиралось на множество $S$. При этом (56:D:a) получилось, когда $n+1$ не принадлежит $S$, а (56:D:b) — в противном случае. Следовательно, ограничиться (56:D:a) — значит потребовать, чтобы $S$ не содержало $n+1$.

Мы повторяем: наше новое понятие доминирования означает в терминах $\overline{\Gamma}$, что в определении доминирования из п. 30.1.1 мы добавляем к условиям (30:4:a) — (30:4:c), наложенным на множество $S$, еще и то условие, что $S$ не должно содержать некоторого конкретного элемента, именно $n+1$.

Это можно представить и как ограничение понятия эффективности, введенного в своем месте; мы будем считать множество $S$ эффективным, только если оно не содержит $n+1$ (конечно, первоначальные условия (30:3) также должны быть соблюдены).

**56.11.2.** Перейдем теперь к изучению нового понятия решения для $\overline{\Gamma}$, т. е. решения для Г, основанного на новом понятии доминирования, введенном в п. 56.11.1. При этом мы будем исходить из игры $\overline{\Gamma}$, определения дележей (56:5) (а не из игры Г и дележей в форме (56:7)) и определения доминирования, данного во втором замечании из п. 56.11.1.

[1]) Может показаться странным, что мы пришли к этому простому принципу с таким трудом, на деле же необходимо провести дальнейшее рассмотрение п. 56.11.2, прежде чем принять его окончательно. Однако принятие определения из п. 30.1.1 без каких-либо альтернатив, несмотря на исключительно широкое обобщение, проведенное здесь, требует самого пристального внимания. Подробный индуктивный подход, данный в этих пунктах, представляется наиболее приспособленным для этих целей.

Мы получим нужный результат, доказав последовательно четыре леммы.

(56:E) Если $\overline{\mathbf{V}}$ — решение $\overline{\Gamma}$ в новом смысле, то для каждого

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$$

из $\overline{\mathbf{V}}$ должно быть $\alpha_{n+1} = \mathrm{v}((n+1))$.

Доказательство. Предположим противное. Так как всегда $\alpha_{n+1} \geqq \mathrm{v}((n+1))$, должен существовать дележ $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\} \in \overline{\mathbf{V}}$, для которого $\alpha_{n+1} > \mathrm{v}((n+1))$. Положим $\alpha_{n+1} = \mathrm{v}((n+1)) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Определим $\vec{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}\}$, взяв

$$\beta_i = \alpha_i + \frac{\varepsilon}{n} \text{ для } i = 1, \ldots, n;$$
$$\beta_{n+1} = \alpha_{n+1} - \varepsilon = \mathrm{v}((n+1)).$$

Так как $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = -\beta_{n+1} = -\mathrm{v}((n+1)) = \mathrm{v}((1, \ldots, n))$ и $\beta_i > \alpha_i$ для $i = 1, \ldots, n$, должно быть $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$ по множеству $S = (1, \ldots, n)$[1]. Так как $\vec{\alpha}$ принадлежит $\overline{\mathbf{V}}$, дележ $\vec{\beta}$ не может принадлежать $\overline{\mathbf{V}}$. Следовательно, существует такое $\vec{\gamma} \in \overline{\mathbf{V}}$, что $\vec{\gamma} \succ \vec{\beta}$. Рассмотрим теперь множество $S$, относительно которого происходит это доминирование. Так как $S$ не содержит $n+1$, мы имеем $S \subseteq (1, \ldots, n)$. Из $\beta_i > \alpha_i$ для $i = 1, \ldots, n$ и $\vec{\gamma} \succ \vec{\beta}$ следует, что $\vec{\gamma} \succ \vec{\alpha}$. Но и $\vec{\gamma}$ и $\vec{\alpha}$ взяты из $\overline{\mathbf{V}}$; следовательно, получено противоречие.

(56:F) Если $\overline{\mathbf{V}}$ является решением $\overline{\Gamma}$ в новом смысле, то оно является решением и в старом смысле.

Доказательство. Мы должны показать, что (30:5:a), (30:5:b) из п. 30.1.1, с доминированием в новом смысле, влекут аналогичные соотношения с доминированием в старом смысле. В самом деле, из доминирования в новом смысле следует доминирование в старом, а значит, (30:5:b). Так что проверки требует лишь (30:5:a).

Предположим поэтому, что (30:5:a) неверно в старом смысле, т. е. что для некоторых $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \overline{\mathbf{V}}$ имеет место $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ в старом смысле. Пусть $S$ — множество, по которому осуществляется доминирование. По (56:E) $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$ $(= \mathrm{v}((n+1)))$; значит, $n+1$ не может принадлежать $S$. Следовательно, $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ в новом смысле, т. е. (30:5:a) неверно и в новом смысле. Это завершает доказательство.

(56:G) Если $\overline{\mathbf{V}}$ — решение $\overline{\Gamma}$ в старом смысле и если для любого

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$$

из $\overline{\mathbf{V}}$ имеет место $\alpha_{n+1} = \mathrm{v}((n+1))$, то $\overline{\mathbf{V}}$ является решением и в новом смысле.

Доказательство. Мы должны доказать, что из (30:5:a) и (30:5:b) с доминированием в старом смысле следуют те же соотношения с доминированием в новом смысле. Доминирование в старом смысле

[1]) Это доминирование, как и все остальные в этом доказательстве, понимается в новом смысле.

следует из доминирования в новом; следовательно, (30:5:a) выполняется. Остается доказать (30:5:b).

Рассмотрим теперь дележ $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$, не принадлежащий $\overline{V}$. Раз (30:5:b) верно в старом смысле, должно существовать такое $\vec{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}\} \in \overline{V}$, что $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$ в старом смысле. Пусть $S$ — множество, по которому осуществляется это доминирование. Всегда $\alpha_{n+1} \geqq \mathrm{v}((n+1))$, а так как $\vec{\beta}$ принадлежит $\overline{V}$ по предположению, должно быть $\beta_{n+1} = \mathrm{v}((n+1))$. Следовательно, $\beta_{n+1} \leqq \alpha_{n+1}$ и $n+1$ не может принадлежать $S$. Значит, $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$ в новом смысле, т. е. (30:5:b) выполняется и в новом смысле, что завершает доказательство.

(56:H) $\overline{V}$ является решением $\overline{\Gamma}$ в новом смысле тогда и только тогда, когда оно принадлежит системе $\Omega''$, определенной в (56:A:d) из 56.7.2.

Доказательство в одну сторону следует из (56:E) и (56:F), а в обратную — из (56:G).

**56.11.3.** Для того чтобы пояснить результат (56:H), мы должны вспомнить первоначальные рассуждения о необходимости ограничить систему $\Omega$ всех решений $\Gamma$ при использовании ее для $\Gamma$. Мы видели в п. 56.7, что разумным результатом такого ограничения могут являться множества $\Omega'$ или $\Omega''$ (или, возможно, некоторое промежуточное множество). После этого наши усилия были направлены на то, чтобы сделать выбор между этими двумя возможностями. Далее, в пп. 56.10—56.11.1 мы пришли к выводу, что изменение понятия доминирования в $\Gamma$ может помочь нам решить этот вопрос. А теперь в (56:H) показано, что это изменение понятия доминирования приводит в точности к $\Omega''$. Этим решение вполне определено. Мы принимаем теперь $\Omega''$ в качестве системы всех решений $\Gamma$.

## 56.12. Новое определение решения

**56.12.** Переформулируем сказанное, делая ссылки на те основные результаты, которые лежат в основе наших выводов.

(56:I)

(56:I:a) *Решением* общей игры $\Gamma$ является любое из решений (в первоначальном смысле ц. 30.1.1) ее расширения до игры с нулевой суммой (игры $n+1$ лиц с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$), в котором для всех

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$$

из $\overline{V}$

(56:24) $$\alpha_{n+1} = \mathrm{v}((n+1)).$$

Эти решения как раз образуют множество $\Omega''$, определенное условием (56:A:d) в п. 56.7.2.

(56:I:b) Используя для этих дележей форму (56:7), $\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}\}$ (т. е. подчеркивая, что речь идет об игре $\Gamma$ и ее игроках, а не о $\overline{\Gamma}$), преобразуем (56:24) в

(56:25) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \mathrm{v}((1, \ldots, n)).$$

Это, очевидно, является усиленной формой (56:10) из п. 56.8.2.

(56:I:c) В том частном случае, когда сама игра Γ является игрой с нулевой суммой, наше новое понятие решения (для Γ) совпадает со старым, т. е. без изменений применяется понятие из п. 30.1.1 (см. первое замечание в п. 56.9.4). Следовательно, нет больше необходимости различать старую и новую теории (см. также сноску 1 к стр. 523).

(56:I:d) Для общей игры $n$ лиц Γ решение также может быть получено применением определений п. 30.1.1 (которые были задуманы только для игр с нулевой суммой) непосредственно к Γ и без каких-либо изменений. Понятие дележей в Γ в этом случае должно использоваться в форме (56:7). (См. первое замечание в п. 56.11.1.)

(56:I:e) Справедливость (56:I:d) означает, что к определению дележей в форме (56:7), данному в п. 56.8.2, ничего добавлять не нужно. Однако по (56:I:d), равенство (56:25) будет в этом случае автоматически выполняться в каждом решении $\bar{\mathbf{V}}$. Следовательно, мы можем, если пожелаем, добавить условие (56:25), т. е. усилить (56:10) из п. 56.8.2 до (56:25) [1]).

(56:I:f) Ограничение, наложенное в (56:I:a) на решения $\bar{\Gamma}$, может быть также выражено модификацией понятия доминирования для $\bar{\Gamma}$ с последующим допущением всех решений в этом новом смысле. Эта модификация состоит в предъявлении к эффективному множеству (в смысле п. 30.1.1) нового требования, состоящего в том, что оно не должно содержать $n+1$ (см. второе замечание из п. 56.11.1).

# § 57. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ПОНЯТИЯ

## 57.1. Характеристическая функция. Расширенная и ограниченная формы

**57.1.** Теперь мы располагаем теорией, которая применима ко всем играм и, подобно теории из п. 30.1.1 для игр с нулевой суммой (обобщением которой она является), основана исключительно на характеристической функции. Это значит, что функции $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $k = 1, \ldots, n$, из п. 11.2.3, которые фактически определяют игру, оказывают влияние в этой теории не непосредственно, а лишь через характеристическую функцию $\mathrm{v}(S)$ [2]).

[1]) Эта возможность перехода от

(56:10) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq \mathrm{v}((1, \ldots, n))$$

к

(56:25) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \mathrm{v}((1, \ldots, n))$$

аналогична (но в более общей форме) эквивалентности $E(0)$ и $F(0)$, о которой говорилось во втором замечании из п. 56.9.5.

[2]) Конечно, $\mathrm{v}(S)$ определяется с помощью $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. См. пп. 25.1.3 и 58.1.

Существует, однако, различие между употреблениями характеристической функции v $(S)$ для игры с нулевой суммой и для общей игры. Для игры $n$ лиц с нулевой суммой Г характеристическая функция v $(S)$ определена для всех множеств $S \subseteq (1, \ldots, n)$ и только для них (см. 25.1). Для общей игры $n$ лиц мы должны были составить ее расширение, игру $n + 1$ лиц с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$, и характеристическая функция v $(S)$ была фактически построена как характеристическая функция (в старом смысле) для игры $\overline{\Gamma}$ (это та v $(S)$, которая фигурировала во всех наших последних рассуждениях, в частности в пп. 56.4.1, 56.5.1, 56.7.2, 56.8.2, 56.9.1, 56.9.3—56.10.3 и 56.11.2—56.12). Соответственно значения v $(S)$ определены теперь для всех множеств $S \subseteq (1, \ldots, n, n + 1)$ и только для них. Мы можем, однако, при желании рассматривать v $(S)$ только для множеств $S \subseteq (1, \ldots, n)$. Если это сделано, то мы будем говорить об *ограниченной характеристической функции*, тогда как v $(S)$ в своей первоначальной области определения, охватывающей все $S \subseteq (1, \ldots, n, n + 1)$, назовем *расширенной характеристической функцией*.

Отсюда мы заключаем, что в частном случае игры с нулевой суммой характеристическая функция из старой теории есть ограниченная характеристическая функция в новой теории [1]).

Возвращаясь к общим играм, мы видим, что характеристические функции являются основой всей рассматриваемой теории. Из эквивалентных формулировок этой теории (56:1:b) из п. 56.12 использует ограниченную характеристическую функцию, в то время как (56:I:a) использует расширенную.

Следовательно, нашей ближайшей целью неизбежно становится выяснение природы этих характеристических функций и их связей друг с другом.

## 57.2. Основные свойства

**57.2.1.** Рассмотрим общую игру $n$ лиц Г и две ее характеристические функции, как они были определены выше: ограниченную v $(S)$, определенную для всех подмножеств $S$ множества $I = (1, \ldots, n)$, и расширенную v $(S)$, определенную для всех подмножеств множества $\overline{I} = (1, \ldots, n, n + 1)$ [2]).

В дальнейшем мы должны различать две возможности в наших обозначениях для $-S$, как это делалось во втором замечании в п. 56.10.2. Для $S \subseteq \overline{I} = (1, \ldots, n, n + 1)$ мы можем понимать $-S$ из $\overline{I}$ как $\overline{I} - S$, тогда как для $S \subseteq I = (1, \ldots, n)$ мы можем также понимать $-S$ из $I$ как $I - S$ [3]). Снова обозначим первое множество через $\perp S$, а второе через $-S$.

Мы намерены перечислить существенные свойства обеих характеристических функций для общей игры $n$ лиц так же, как это было сделано в пп. 25.3 и § 26 для характеристической функции игры $n$ лиц с нулевой суммой.

---

[1]) Все эти различия и определения не могут влиять и не влияют на тот строго установленный факт, что для игр с нулевой суммой эти две теории эквивалентны (см. (56:I:c) из п. 56.12).

[2]) Мы обозначаем их одной и той же буквой v, так как они имеют одни и те же значения на тех множествах, для которых они обе определены.

[3]) Ясно, что эти множества, образованные для одного и того же множества $S$ (конечно, $S \subseteq I$), различны. Раньше мы требовали, чтобы они были одинаковыми, но там мы их образовывали для двух различных множеств $S$ и $T$.

Сначала рассмотрим расширенную характеристическую функцию. Так как она является характеристической функцией в старом смысле для игры $n+1$ лица $\overline{\Gamma}$ с нулевой суммой, она должна обладать свойствами (25:3:a) — (25:3:c), сформулированными в п. 25.3.1, с единственной заменой там $I=(1, \ldots, n)$ на $\overline{I}=(1, \ldots, n, n+1)$.

Таким образом, мы получаем следующее:

(57:1:a) $$\mathrm{v}(\varnothing)=0;$$

(57:1:b) $$\mathrm{v}(\perp S)=-\mathrm{v}(S);$$

(57:1:c) $$\mathrm{v}(S \cup T) \geqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T), \text{ если } S \cap T=\varnothing\ (S, T \subseteq \overline{I}).$$

Рассмотрим, далее, ограниченную характеристическую функцию. Условия, которым она должна удовлетворять, мы получим из (57:1:a) — (51:1:c), если ограничимся подмножествами из $I$. Условия (57:1:a), (57:1:c) сохраняются, чего нельзя сказать об условии (57:1:b) [1]. Итак, мы получаем:

(57:2:a) $$\mathrm{v}(\varnothing)=0;$$

(57:2:c) $$\mathrm{v}(S \cup T) \geqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T), \text{ если } S \cap T=\varnothing\ (S, T \subseteq I).$$

Заметим, что мы не можем заменить (57:1:b) чем-нибудь эквивалентным для $-S$. В самом деле, все, что мы можем сделать с $-S$, — это положить в (57:1:c) $T=-S$. Это даст нам

(57:2:b) $$\mathrm{v}(-S) \leqq \mathrm{v}(I)-\mathrm{v}(S).$$

Даже если $\mathrm{v}(I)=0$, чего в нашем случае и не может быть, (57:2:b) превращаются только в

(57:2:b*) $$\mathrm{v}(-S) \leqq -\mathrm{v}(S),$$

что не эквивалентно (25:3:b) из п. 25.3.1, где $\mathrm{v}(-S)=-\mathrm{v}(S)$.

Условия (57:1:a) — (57:1:c), так же как и (57:2:a) и (57:2:c), являются, как это следует из их вывода, лишь необходимыми свойствами (ограниченной или расширенной) характеристических функций. Мы должны выяснить, являются ли они также и достаточными.

**57.2.2.** Если $\overline{\Gamma}$ — произвольная игра $n+1$ лица с нулевой суммой, то из результатов п. 26.2 следует, что функция v $(S)$, удовлетворяющая условиям (57:1:a) — (57:1:c), является характеристической функцией (в старом смысле) некоторой игры $\overline{\Gamma}$, т. е. расширенной характеристической функцией некоторой общей игры $n$ лиц $\Gamma$. Другими словами, этим доказано, что условия (57:1:a) — (57:1:c) являются необходимыми и достаточными, т. е. что они содержат полное математическое описание характеристических функций всех возможных общих игр $\Gamma$.

Однако игра $\overline{\Gamma}$ не является совершенно произвольной. Как мы видели в п. 56.2.2, $(n+1)$-й (фиктивный) игрок не имеет влияния на течение игры, т. е. не имеет личных ходов; значения $\mathscr{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_{n+1})$ в действительности не зависят от переменной $\tau_{n+1}$. Кроме того, из п. 56.2.2 ясно, что это единственное ограничение, которому должна удовлетворять $\overline{\Gamma}$: если в игре $n+1$ лиц с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$ игрок $n+1$ не влияет на ход игры, то можно рассматривать $\overline{\Gamma}$ как расширение некоторой общей

[1]) $S$ и $\perp S$ не могут одновременно $\subseteq I=(1, \ldots, n)$, так как одно из этих множеств должно обязательно содержать $n+1$.

игры Г до игры с нулевой суммой, в которой участвуют остальные игроки 1, . . ., $n$[1]).

Следовательно, возникает следующий вопрос. Условия (57:1:a) — (57:1:c) являются необходимыми и достаточными для характеристических функций в старом смысле для всех игр $n + 1$ лица с нулевой суммой. Как их следует усилить для того, чтобы сделать их необходимыми и достаточными условиями для характеристических функций (в старом смысле) всех тех игр $n + 1$ лица с нулевой суммой, в которых $(n + 1)$-й игрок не имеет влияния на течение игры?

Мы могли бы ответить на этот вопрос, дав полное математическое описание расширенных характеристических функций всех общих игр $n + 1$ лица. Но тогда остался бы тот же вопрос для ограниченных характеристических функций.

Мы увидим, что, решая сначала вторую задачу, мы оказываемся в несколько более благоприятных условиях: первую задачу можно будет легко решить с помощью второй. Однако, наш подход будет доминироваться предыдущими рассмотрениями.

### 57.3. Нахождение всех характеристических функций

**57.3.1.** Продолжим доказательство того, что необходимые условия (57:2:a) и (57:2:c) являются также достаточными, т. е. что для любой числовой функции $v(S)$, удовлетворяющей условиям (57:2:a) и (57:2:c), существует общая игра $n$ лиц Г, для которой $v(S)$ есть ограниченная характеристическая функция [2]).

Для того чтобы избежать путаницы, удобнее обозначить данную числовую функцию множеств, удовлетворяющую условиям (57:2:a) и (57:2:c), через $v_0(S)$. Определим с ее помощью некоторую общую игру $n$ лиц Г и обозначим ограниченную характеристическую функцию этой игры через $v(S)$. Теперь мы должны доказать, что $v(S) = v_0(S)$.

Пусть поэтому числовая функция $v_0(S)$, удовлетворяющая условиям (57:2:a) и (57:2:c), задана. Построим общую игру $n$ лиц Г следующим образом [3]).

Каждый игрок $k = 1, \ldots, n$ своим личным ходом выбирает некоторое подмножество $S_k$ множества $I$, содержащее $k$; при этом он совершает свой выбор независимо от выбора других игроков.

После этого расплата происходит следующим образом

Множество игроков $S$, для которого

(57:3) $$S_k = S \quad \text{для любого} \quad k \in S,$$

называется *кольцом*. Любые два кольца с общими элементами совпадают. Другими словами, сумма всех колец (которые фактически образовались в игре) представляет собой систему попарно не пересекающихся подмножеств $I$.

Каждый игрок, который не содержится ни в каком из колец, следовательно, сам образует (одноэлементное) множество, которое

---

[1]) То есть что касается правил игры, то мы можем относиться к игроку $n + 1$ как к фиктивному игроку. Конечно, мы знаем, что существует решение $\overline{V}$ игры $\overline{Г}$, которое приписывает ему роль реального игрока. (Это в $\Omega$, но не в $\Omega'$, ср. (56:A:a)—(56:A:d) из п. 56.7.2 и (56:I:a) из п. 56.12; вспомним также пп. 56.3.2 и 56.3.4.)

[2]) Конструкция, которая будет приведена ниже, имеет много общего с конструкцией из п. 26.1.

[3]) Читателю рекомендуется сравнить детали этого построения с п. 26.1.2.

называется *сольным множеством*. Таким образом, совокупность всех колец и сольных множеств (которые фактически образовались в игре) представляет собой разбиение $I$, т. е. систему попарно не пересекающихся подмножеств $I$, объединение которых равно $I$. Обозначим эти множества через $C_1, \ldots, C_p$ и соответственно числа элементов в этих множествах через $n_1, \ldots, n_p$.

Рассмотрим теперь игрока $k$. Он принадлежит в точности одному из этих множеств $C_1, \ldots, C_p$, скажем $C_q$. Тогда игрок $k$ получает сумму

$$\frac{1}{n_q} \mathrm{v}_0(C_q). \tag{57:4}$$

Это завершает описание игры Г. Ясно, что Г — общая игра $n$ лиц, и ясно также, что $\overline{\Gamma}$ является ее расширением до игры с нулевой суммой. Мы особенно подчеркиваем, что в $\overline{\Gamma}$ фиктивный $(n+1)$-й игрок получает

$$-\sum_{q=1}^{p} \mathrm{v}_0(C_q)\,[1]. \tag{57:5}$$

Покажем теперь, что Г имеет данную ограниченную характеристическую функцию $\mathrm{v}_0(S)$.

**57.3.2.** Обозначим ограниченную характеристическую функцию Г через $\mathrm{v}(S)$. Напомним, что условия (57:2:a) и (57:2:c) остаются в силе для $\mathrm{v}(S)$, так как это — ограниченная характеристическая функция, а также для $\mathrm{v}_0(S)$, по предположению.

Если $S$ пусто, то $\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S)$, по (57:2:a). Поэтому мы можем предположить, что $S$ непусто. В этом случае коалиция всех игроков из $S$ может управлять выбором соответствующих $S_k$ так, чтобы сделать $S$ кольцом. Для этого достаточно, чтобы каждый игрок $k \in S$ выбрал $S_k = S$. Теперь, что бы ни делали остальные игроки (из $-S$), $S$ будет одним из множеств (колец или сольных) $C_1, \ldots, C_p$; пусть, например, $C_q$. Каждый игрок $k \in C_q = S$ получает выигрыш в соответствии с (57:4); следовательно, вся коалиция получает $\mathrm{v}_0(S)$. Поэтому

$$\mathrm{v}(S) \geqq \mathrm{v}_0(S). \tag{57:6}$$

Рассмотрим теперь дополнение $-S$. Коалиция всех игроков $k$, принадлежащих коалиции $-S$, может так управлять выбором соответствующих $S_k$, чтобы сделать $S$ суммой колец или сольных множеств. Если $-S$ пусто, то это тривиально, так как тогда $S = I$. Если $-S$ непусто, то достаточно каждому $k \in -S$ выбрать $S_k = -S$. Следовательно, $-S$ — кольцо, и, значит, $S$ есть сумма колец и сольных множеств.

Итак, $S$ есть сумма некоторых из множеств $C_1, \ldots, C_p$, скажем

$$C_{1'}, \ldots, C_{r'}$$

(здесь $1', \ldots, r'$ — некоторые из чисел $1, \ldots, p$). Каждый игрок $k \in C_q$ $(q = s' = 1', \ldots, r')$ получает сумму (57:4); следовательно, $n_q$ игроков в $C_q$ получают вместе сумму $\mathrm{v}_0(C_q)$. Так как $C_{1'}, \ldots, C_{r'}$ суть

---

[1]) $n_q$ игроков в $C_q$ в соответствии с (57:4) получают вместе $\mathrm{v}_0(C_q)$; следовательно, все игроки $1, \ldots, n$, т. е. все игроки из $C_1, \ldots, C_p$ получают вместе сумму $\sum_{q=1}^{p} \mathrm{v}_0(C_q)$. Отсюда мы имеем (57:5).

попарно не пересекающиеся множества, объединение которых равно $S$, повторное применение неравенства (57:2:c) дает

$$\sum_{s=1}^{r} \mathrm{v}_0(C_{s'}) \leqq \mathrm{v}_0(S).$$

Иными словами, что бы ни делали игроки из $S$, вместе они получают сумму $\leqq \mathrm{v}_0(S)$. Следовательно,

(57:7) $$\mathrm{v}(S) \leqq \mathrm{v}_0(S).$$

Теперь (57:6) и (57:7) вместе дают

(57:8) $$\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S),$$

что и требовалось доказать.

**57.3.3.** Рассмотрим теперь расширенную характеристическую функцию. Для этого случая мы знаем, что условия (57:1:a) — (57:1:c) необходимы. Докажем, что они также и достаточны, т. е. что для любой числовой функции множеств $\mathrm{v}(S)$, удовлетворяющей условиям (57:1:a) — (57:1:c), существует общая игра $n$ лиц Г, для которой $\mathrm{v}(S)$ есть расширенная характеристическая функция.

Для того чтобы избежать путаницы, удобно снова обозначить данную числовую функцию множеств, удовлетворяющую условиям (57:1:a) — (57:1:c), через $\mathrm{v}_0(S)$. Расширенную характеристическую функцию общей игры Г будем обозначать через $\mathrm{v}(S)$.

Итак, пусть дана функция $\mathrm{v}_0(S)$, удовлетворяющая условиям (57:1:a)—(57:1:c). Рассмотрим ее пока только для множеств $S \subseteq I = (1, \ldots, n)$; тогда она удовлетворяет условиям (57:2:a) и (57:2:c). Значит, построение из пп. 57.3.1 и 57.3.2 может быть применено к $\mathrm{v}_0(S)$. Таким образом, мы получаем такую общую игру $n$ лиц Г, что ее ограниченная характеристическая функция $\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S)$ и для ее расширенной характеристической функции всегда [1]) будет $\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S)$ для $S \subseteq I$. Иными словами, если мы возвратимся к первоначальной области множеств $S$ [2]), то получим

(57:9) $\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S)$, если $n+1$ не содержится в $S$.

Пусть теперь игрок $n+1$ содержится в $S$. Тогда он не содержится в $\perp S$. Следовательно, (57:9) дает нам $\mathrm{v}(\perp S) = \mathrm{v}_0(\perp S)$. Условия (57:1:a) — (57:1:c) выполняются, как для $\mathrm{v}(S)$, потому что $\mathrm{v}(S)$ — расширенная характеристическая функция, так и для $\mathrm{v}_0(S)$, по условию. Из (57:1:b) мы получаем, что $\mathrm{v}(\perp S) = -\mathrm{v}(S)$, $\mathrm{v}_0(\perp S) = -\mathrm{v}_0(S)$.

Из всех этих равенств следует, что

(57:10) $\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S)$, если $n+1$ содержится в $S$.

Из (57:9) и (57:10) мы получаем

(57:11) $$\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S)$$

для всех $S$, что и требовалось доказать.

**57.3.4.** Подведем итоги. Мы получили полное математическое описание как ограниченной, так и расширенной характеристических функций

---

[1]) Слово «всегда» в этом случае относится, конечно, только к множествам $S \subseteq I$.

[2]) Которая в этом случае состоит из всех $S \subseteq \overline{I}$.

$\mathrm{v}(S)$ для всех возможных общих игр $n$ лиц. Первая из них описывается условиями (57:2:a), (57:2:c), а вторая — условиями (57:1:a) — (57:1:c).

Подобно тому как это было сделано в п. 26.2, мы назовем функции, удовлетворяющие этим условиям, соответственно *ограниченной характеристической функцией* и *расширенной характеристической функцией*, даже если они рассматриваются сами по себе, вне связи с какой-либо конкретной игрой.

### 57.4. Устранимые множества игроков

**57.4.1.** Результат, который мы получили для расширенной характеристической функции, можно сформулировать еще и так: любая характеристическая функция (в старом смысле) некоторой игры $n+1$ лица с нулевой суммой является также расширенной характеристической функцией соответствующей общей игры $n$ лиц [1]). Вспоминая сказанное в п. 57.2.2, мы видим, что любая характеристическая функция игры $n+1$ лица с нулевой суммой есть также характеристическая функция некоторой игры $n+1$ лица с нулевой суммой, в которой $(n+1)$-й игрок не имеет влияния на ход игры.

Заменяя в этом утверждении $n+1$ на $n$, мы получим эквивалентное утверждение для игры $n$ лиц с нулевой суммой и для роли игрока $n$. Для того чтобы сформулировать этот результат, удобно ввести следующее определение.

(57:A) Пусть даны игра $n$ лиц с нулевой суммой $\Gamma$ и множество $S \subseteq I = (1, \ldots, n)$. Назовем множество $S$ *устранимым* в $\Gamma$, если существует игра $n$ лиц с нулевой суммой $\Gamma'$, имеющая ту же характеристическую функцию, что и $\Gamma$, но в которой ни один из игроков, принадлежащих $S$, не имеет влияния на ход игры.

Используя это определение, мы можем сказать, что множество $S = (n)$ устранимо. Любого игрока $k = 1, \ldots, n$ мы можем поменять ролями с $n$; следовательно, множество $S = (k)$ также устранимо. Таким образом, мы видим:

(57:B) Любое одноэлементное множество $S$ устранимо в любой игре $\Gamma$.

Теперь нам следует отметить, что, в соответствии с нашей теорией, стратегия коалиций, а также компенсации в игре зависят только от характеристической функции. Следовательно, игры $\Gamma$ и $\Gamma'$ из (57:A) с этой точки зрения идентичны.

Итак, (57:B) можно переформулировать следующим образом: роль любого игрока в любой игре $n$ лиц с нулевой суммой, пока это касается стратегических возможностей коалиций и компенсаций, может быть в точности продублирована в такой ситуации, в которой он лишен всякого прямого влияния на ход игры. Слово «роль» здесь употребляется в самом широком смысле: в нее входят связь игрока со всеми остальными игроками и его влияние на связи остальных игроков друг с другом.

Другими словами, мы описали в пп. 56.3.2—56.3.4 механизм, с помощью которого игрок, не имеющий прямого влияния на ход игры, может тем не менее влиять на переговоры по поводу коалиций и компенсаций. В (57:B) мы показали, что этот механизм вполне пригоден для

---

[1]) Действительно, условия (57:1:a) — (57:1:c) совпадают с условиями (25:3:a) — (25:3:c) из п. 25.3.1, если заменить в них $I = (1, \ldots, n)$ на $\bar{I} = (1, \ldots, n, n+1)$.

описания влияния, которое любой игрок может иметь в любой игре. Это утверждение следует воспринимать буквально: наш результат обеспечивает воспроизведение всех мыслимых деталей и нюансов.

**57.4.2.** Согласно (57:B), каждый игрок $k = 1, \ldots, n$ устраним, т. е. устранимо любое одноэлементное множество $S = (k)$; это не означает, однако, что все эти игроки устранимы одновременно, т. е. что устранимо множество

$$S = I = (1, \ldots, n).$$

В действительности мы имеем:

(57:C) Множество $S = I$ устранимо тогда и только тогда, когда Г несущественна.

Доказательство. То, что ни один игрок $k = 1, \ldots, n$ не имеет влияния на течение игры Г′, означает, что все функции $\mathcal{K}'_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ не зависят от своих переменных $\tau_1, \ldots, \tau_n$, т. е. что все они являются постоянными:

(57:12) $$\mathcal{K}'_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \alpha_k.$$

Отсюда следует, что

(57:13) $$\mathrm{v}(S) = \sum_{k \in S} \alpha_k \text{ для всех } S \subseteq I.$$

Обратно, если принять равенство (57:13), то из него будет следовать (57:12).

Следовательно, в (57:13) стоит характеристическая функция игры Г, для которой такая игра Г′ существует, и (57:13) является в точности определением несущественности игры Г.

Для $n = 1, 2$ любая игра несущественна; значит, в этих случаях множества $S = I$, а вместе с ним и любое множество устранимы.

Замечание. Основной результат для игр двух лиц, состоящий в том, что игры этого типа имеют определенное значение для каждого игрока (скажем v и —v; см. пп. 17.8 и 17.9), означает только то, что эта игра эквивалентна постоянным платежам v и —v игрокам, и это составляет построение, при котором ни один из них не влияет на игру.

С другой стороны, во всякой существенной игре имеет место взаимодействие (переговоры о коалициях и выплатах компенсаций); это исключает одновременную устранимость всех игроков.

Отсюда возникает вопрос:

(57:D) Каковы устранимые множества для существенной игры Г?

Утверждения (57:B) и (57:C) содержат частичный ответ на этот вопрос: одноэлементные множества устранимы, $n$-элементное ($S = I$) — неустранимо. Где же проходит разделяющая граница?

**57.4.3.** Верхним крайним случаем будет тот, когда все $(n — 1)$-элементные множества, а вместе с ними все множества, кроме $I$, устранимы. Мы назовем такие игры *экстремальными*. Полезно отдавать себе отчет в том, что скрывается за этим свойством. Стратегическая ситуация в такой игре эквивалентна следующей: только один игрок имеет влияние на течение игры, а роль остальных игроков сводится к попытке повлиять на принимаемые им решения. Способ влияния на него состоит, конечно, в предложении ему компенсаций с целью заставить его принять решение, благоприятное для того игрока или тех игроков, которые делают это предложение.

Теперь мы можем доказать следующее:

(57:E) Для $n=3$: существенная игра трех лиц с нулевой суммой экстремальна.

(57:F) Для $n=4$: существуют как экстремальные, так и неэкстремальные игры четырех лиц с нулевой суммой.

Более подробно это выглядит так:

(57:E*) В существенной игре трех лиц с нулевой суммой все двухэлементные множества устранимы.

(56:F*) В существенной игре четырех лиц с нулевой суммой устранимы либо все трехэлементные множества, либо все, кроме одного [1,2]).

Доказательства этих утверждений не представляют серьезных трудностей, и мы не имеем в виду здесь их приводить.

Результаты (57:B), (57:C), (57:E) и (57:F) показывают, что общая теория устранимых множеств и экстремальных игр, по-видимому, не так уж проста. Систематически она будет рассмотрена в последующих публикациях.

### 57.5. Стратегическая эквивалентность. Игры с нулевой и постоянной суммой

**57.5.1.** Мы уже исчерпали все полезные сведения из расширения $\overline{\Gamma}$ общей игры $n$ лиц до игры с нулевой суммой, и поэтому будем впредь изучать теорию общих игр $n$ лиц, не прибегая к этому понятию. Следовательно, далее мы будем рассматривать только саму игру $\Gamma$ и ее ограниченную характеристическую функцию, кроме тех случаев, которые будут специально оговорены. По этой причине мы будем в термине опускать слово «ограниченная» и будем говорить просто о *характеристической функции* $\Gamma$. Это соответствует прежней терминологии игр $n$ лиц с нулевой суммой, так как здесь старое и новое употребления понятия характеристической функции согласованы. (См. первое замечание в конце п. 57.1.)

В соответствии со сказанным, решение должно быть определено, как указано в (56:I:d) из п. 56.12. Дележи определены в (56:I:b) и в последней части (56:I:e). Представляется полезным повторить приведенное там определение в явном виде.

Дележом называется вектор

(57:14) $$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\},$$

компоненты которого удовлетворяют условиям

(57:15) $$\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i)) \text{ для } i=1, \ldots, n;$$

(57:16) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \mathrm{v}(I)\ ^{3)}.$$

---

[1]) Любое двухэлементное множество есть подмножество двух трехэлементных множеств (мы помним, что $n=4$) и, по сказанному выше, хотя бы одно из них устранимо. Значит, каждое двухэлементное множество устранимо в любом случае.

[2]) Части куба $Q$ из п. 34.22, которые соответствуют этим двум возможностям, могут быть определены в явном виде.

[3]) Как было показано там же, мы могли бы рассматривать эквивалентное условие

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(I),$$

что является его первоначальной формой. Однако мы предпочитаем (57:16).

Мы можем теперь распространить понятие стратегической эквивалентности на случай общих игр. Это будет сделано точно так же, как в пп. 42.2 и 42.3.1, т. е. аналогично п. 27.1.1.

Пусть даны общая игра $n$ лиц $\Gamma$ с функциями $\mathscr{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ и набор постоянных $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$; определим новую игру $\Gamma'$ с функциями $\mathscr{K}'_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, положив

(57:17) $$\mathscr{K}'_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv \mathscr{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) + \alpha_k^0.$$

Отсюда, как и раньше, мы получаем, что характеристические функции $\mathrm{v}(S)$ и $\mathrm{v}'(S)$ в этих двух играх связаны соотношением

(57:18) $$\mathrm{v}'(S) = \mathrm{v}(S) + \sum_{k \in S} \alpha_k^0.$$

Мы назовем две такие игры, как и их характеристические функции, стратегически эквивалентными.

Так как мы свободны от ограничений, связанных с нулевой суммой, то на постоянные $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$ не накладывается никаких условий, как это было в (42:B) из п. 42.2.2.

Заметим, что стратегическая эквивалентность порождает изоморфизм дележей для игр $\Gamma$ и $\Gamma'$ так же, как это было в двух примерах, разобранных раньше. Рассуждения и выводы из пп. 31.3.3 и 42.4.2 переносятся на этот случай без изменения; поэтому нет необходимости в их переформулировке.

**57.5.2.** Область всех характеристических функций (всех общих игр $n$ лиц) определяется условиями (57:2:a) и (57:2:c), которые мы перепишем:

(57:2:a) $$\mathrm{v}(\varnothing) = 0;$$

(57:2:c) $$\mathrm{v}(S \cup T) \geqq \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(T) \quad \text{для } S \cap T = \varnothing.$$

Среди них характеристические функции игр с нулевой суммой и игр с постоянной суммой представляют собой частные случаи. Первые определяются условиями (25:3:a) — (25:3:c) из п. 25.3.1 (см. п. 26.2), т. е. мы должны добавить к (57:2:a) и (57:2:c) (которые совпадают с упомянутыми (25:3:a) и (25:3:c)) еще условие

(57:19) $$\mathrm{v}(-S) = -\mathrm{v}(S).$$

Последние определяются условиями (42:6:a) — (42:6:c) из п. 42.3.2 (см. там же), т. е. мы должны добавить к (57:2:a) и (57:2:c) (которые совпадают с (42:6:a) и (42:6:c)) условие

(57:20) $$\mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(-S) = \mathrm{v}(I).$$

Так как игры с нулевой суммой представляют собой частный случай игр с постоянной суммой, (57:20) должно вытекать из (57:19); предполагается при этом всегда (57:2:a) и (57:2:c). Это действительно так; фактически мы можем даже доказать нечто большее, а именно:

(57:G) (57:19) эквивалентно условию (57:20) вместе с $\mathrm{v}(I) = 0$.

Доказательство[1]). Если $\mathrm{v}(I) = 0$, то (57:19) и (57:20) означают одно и то же. Следовательно, достаточно показать, что из (57:19)

---

[1]) По существу, этот вывод был проделан в п. 42.3.2.

следует v $(I) = 0$. В самом деле, (57:2:a) и (57:19) дают v $(I) =$ v $(-\varnothing) =$ $= -$ v $(\varnothing) = 0$.

Заметим, что (57:20) эквивалентно выполнению равенства в (57:2:c), если $S \cup T = I$ [1]). Таким образом, v $(S)$ для игр с постоянной суммой характеризуется тем свойством, что слияние двух различных коалиций не дает дополнительной выгоды в том случае, если их объединение содержит всех игроков.

Для того чтобы v $(S)$ определяла игру с нулевой суммой, надо добавить дальнейшее условие v $(I) = 0$.

В заключение мы подчеркнем, что дополнительные условия (57:19) или (57:20) не означают, что любая игра с такой характеристической функцией должна иметь нулевую или постоянную сумму. Из них следует только, что такой характеристической функцией, среди прочих, должна обладать хотя бы одна игра с нулевой или с постоянной суммой. Может случиться, что и игра с ненулевой (или непостоянной) суммой имеет такую характеристическую функцию, т. е. характеристическую функцию игры с нулевой суммой (или игры с постоянной суммой). В этом случае с точки зрения стратегий коалиций и компенсаций она будет вести себя так же, как игра с нулевой суммой (или игра с постоянной суммой), хотя таковой и не является.

**57.5.3.** Теперь мы в состоянии ответить на вопрос, который был поставлен раньше. В пп. 56.3.2—56.4.3 мы уже касались того факта, что фиктивный игрок, несмотря на его нереальность, не является тем самым «болваном», т. е. он не является таковым в смысле расширенной характеристической функции и теории разложения расширения игры $\overline{\Gamma}$ до игры с нулевой суммой [2]). Этот вопрос возник снова в начале п. 56.9.3, где мы отметили, что такой игрок является «болваном» для игры $\Gamma$ с нулевой суммой.

Сейчас мы ответим на вопрос: для какой же общей игры фиктивный игрок является «болваном» [3]). Мы докажем следующее.

(57:H) Фиктивный игрок является «болваном» тогда и только тогда, когда $\Gamma$ имеет такую же характеристическую функцию, как и некоторая игра с нулевой суммой, т. е. если выполнено (57:20).

Доказательство. Как показано в конце п. 43.4.2, игрок является болваном тогда и только тогда, когда он составляет (как одноэлементное множество) компоненту первоначальной игры. Мы должны применить это к фиктивному игроку $n+1$ в игре $\overline{\Gamma}$ с нулевой суммой. То, что $n+1$ является компонентой, очевидно, означает, что

(57:21) $\quad \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}((n+1)) = \mathrm{v}(S \cup (n+1))$ для всех $S \subseteq (1, \ldots, n)$.

Далее, мы имеем:

$$\mathrm{v}((n+1)) = -\mathrm{v}(I),$$

$$\mathrm{v}(S \cup (n+1)) = -\mathrm{v}(\perp S \cup (n+1)) = -\mathrm{v}(-S).$$

---

[1]) Действительно, если $S \cup T = I$ и по предположению из (57:2:c) $S \cap T = \varnothing$, то $T = -S$.

[2]) Мы вынуждены были исключить его из игры явным ограничением решения с $\Omega$ до $\Omega''$.

[3]) Рассуждения из первого замечания в п. 56.9.4 показывают, что для таких игр $\Omega$ и $\Omega''$ совпадают, т. е. ограничение решений игры $\overline{\Gamma}$ не является необходимым.

Итак, (57:21) превращается в

$$v(S)-v(I)=-v(-S),$$

т. е.

(57:22) $$v(S)+v(-S)=v(I).$$

Но это и есть в точности условие (57:20).

# § 58. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

## 58.1. Анализ определения

**58.1.1.** Мы пришли к формулировке теории общих игр $n$ лиц и установили, что понятие характеристической функции является столь же существенным в теории общих игр $n$ лиц, как и в рассмотренной ранее теории игр с нулевой суммой. Следовательно, имеет смысл проанализировать это понятие еще раз, приведя его математическое определение в явном виде и сопроводив его некоторыми замечаниями интерпретационного характера.

Рассмотрим общую игру $n$ лиц $\Gamma$, задаваемую функциями $\mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ $(k=1, \ldots, n)$ в смысле п. 11.2.3. Значение $v(S)$ характеристической функции для множества $S \subseteq I = (1, \ldots, n)$ получается в результате вычисления этой величины для игры $n+1$ лица с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$ — т. е. для расширения $\Gamma$ до игры с нулевой суммой [1]). Следовательно, мы можем выразить ее по формуле п. 25.1.3.

(58:1) $$v(S)=\max_{\vec{\xi}}\min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})=\min_{\vec{\eta}}\max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}),$$

где $\vec{\xi}$ — вектор с компонентами $\xi_{\tau^S}$,

$$\xi_{\tau^S} \geqq 0, \qquad \sum_{\tau^S} \xi_{\tau^S}=1;$$

$\vec{\eta}$ — вектор с компонентами $\eta_{\tau^{-S}}$,

$$\eta_{\tau^{-S}} \geqq 0, \qquad \sum_{\tau^{-S}} \eta_{\tau^{-S}}=1;$$

$\tau^S$ — набор переменных $\tau_k$, $k \in S$; $\tau^{-S}$ — набор переменных $\tau_k$, $k \in -S$ [2]) и окончательно

(58:2) $$K(\vec{\xi}, \vec{\eta})=\sum_{\tau^S, \tau^{-S}} \overline{\mathcal{K}}(\tau^S, \tau^{-S}) \cdot \xi_{\tau^S} \cdot \eta_{\tau^{-S}},$$

где

(58:3) $$\overline{\mathcal{K}}(\tau^S, \tau^{-S})=\sum_{k \in S} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

---

[1]) Мы ограничились множествами $S \subseteq I = (1, \ldots, n)$, т. е. ограниченной характеристической функцией. Использование всех $S \subseteq \overline{I} = (1, \ldots, n, n+1)$, т. е. расширенной характеристической функции, противоречит нашей точке зрения в данный момент (см. начало п. 57.5.1).

[2]) Через $-S$ обозначается $I-S$. Так как мы имеем дело с игрой $\overline{\Gamma}$, мы должны образовать $\perp S$, т. е. $\overline{I}-S$ (см. начало п. 57.2.1). Однако это несущественно, так как переменной $\tau_{n+1}$ на самом деле нет. (См. конец п. 56.2.2.)

Замечание. Мы используем только первоначальные $\mathcal{K}_k$, $k=1, \ldots, n$, т. е. $\mathcal{K}_{n+1}$ из (56:2) в п. 56.2.2, для которого

$$\mathcal{K}_{n+1}(\tau_1, \ldots, \tau_n) = -\sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) \tag{58:4}$$

здесь не участвует. Это следует, конечно, из того факта, что $S \subseteq I = (1, \ldots, n)$.

Следует помнить, что формула (58:3) есть первая формула (25:2) из п. 25.1.3. Вторая формула (25:2) оттуда же дает

$$\overline{\mathcal{K}}(\tau^S, \tau^{-S}) \equiv -\sum_{k \in \perp S} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n). \tag{58:5}$$

(Заметим, что теперь мы должны пользоваться обозначением $\perp S = \overline{I} - S$ для $-S$, так как имеем дело с игрой $\overline{\Gamma}$. См. также сноску 2 на стр. 542.) Так как $n+1$ не содержится в $S$, этот игрок принадлежит $\perp S$; следовательно, $\sum_{k \in \perp S}$ из (58:5) содержит функцию $\mathcal{K}_{n+1}$, определенную равенством (58.5). Однако (58:4) гарантирует, как это и должно было быть, совпадение правых частей (58:3) и (58:5).

## 58.2. Желание выиграть или нанести ущерб

**58.2.1.** Очевидно, $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ есть ожидаемое значение выигрыша в игре $\overline{\Gamma}$ для коалиции $S$, если эта коалиция $S$ применяет свою смешанную стратегию $\vec{\xi}$, а противостоящая ей коалиция $-S$ [1]) — смешанную стратегию $\vec{\eta}$. Следовательно, (58:1) определяет $\mathrm{v}(S)$, т. е. значение выигрыша для коалиции $S$ в предположении, что коалиция $S$ стремится максимизировать $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, в то время как противостоящая ей коалиция $-S$ стремится ее минимизировать, и они выбирают соответственно свои смешанные стратегии $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$.

Этот принцип, конечно, верен в игре $n+1$ лица с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$ [2]), но в действительности мы имеем дело с общей игрой $n$ лиц $\Gamma$, а $\overline{\Gamma}$ — только «рабочая гипотеза»! А в игре $\Gamma$ желание коалиции $-S$ навредить своим оппонентам из $S$ ни в коей мере не очевидно. В самом деле, естественным желанием коалиции $-S$ должно быть не столько стремление уменьшить значение $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ для коалиции $S$, сколько стремление увеличить свое значение $\mathrm{K}'(\vec{\xi}, \vec{\eta})$. Эти два принципа совпадают в том случае, если уменьшение $\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ равносильно увеличению $\mathrm{K}'(\vec{\xi}, \vec{\eta})$. Это, разумеется, будет иметь место для случая игры с нулевой суммой $\Gamma$ (но вовсе не обязательно должно выполняться для общей игры $\Gamma$).

Замечание. Действительно, если игра $\Gamma$ имеет нулевую сумму, то

$$\mathrm{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + \mathrm{K}'(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \equiv 0. \tag{58:6}$$

Это ясно из общих соображений; формальное доказательство состоит в следующем. Ясно, что

$$\mathrm{K}'(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \equiv \sum_{\tau^S, \tau^{-S}} \overline{\mathcal{K}}'(\tau^S, \tau^{-S})\, \xi_{\tau^S} \eta_{\tau^{-S}}, \tag{58:7}$$

---

[1]) См. сноску 2 на стр. 542.

[2]) То есть если мы будем рассматривать $-S = I - S$ фактически как представление $\perp S = \overline{I} - S$.

где

(58:8) $$\overline{\mathcal{K}}'(\tau^S, \tau^{-S}) \equiv \sum_{k \in -S} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

(Заметим, что это не та сумма $\sum_{k \in \perp S} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, которая фигурировала в (58.5).)

Сравнение (58:2) с (58:7) показывает, что (58:6) эквивалентно

(58:9) $$\overline{\mathcal{K}}_1(\tau^S, \tau^{-S}) + \overline{\mathcal{K}}'(\tau^S, \tau^{-S}) \equiv 0,$$

а из (58:3) и (58:5) следует, что (58:9) превращается в

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv 0,$$

т. е. в условие нулевой суммы для игры Г.

Таким образом, в общей игре Г успех одной группы игроков не является синонимом поражения остальных. В такой игре могут существовать ходы (или, лучше сказать, изменения в стратегиях), выгодные для обеих групп. Другими словами, в такой игре может существовать возможность для истинного возрастания производительности одновременно во всех секторах общества.

58.2.2. В действительности это больше, чем просто возможность,— ситуации, о которых идет речь, являются одним из важных предметов, с которым должны иметь дело экономическая и социальная теории. Следовательно, возникает вопрос, не игнорирует ли вовсе наше рассмотрение этот аспект? Не упускаем ли мы вовсе из вида кооперативную сторону социальных отношений из-за того особого значения, которое мы придаем противоположной, антагонистической стороне?

Мы думаем, что это не так. На этот вопрос трудно ответить со всей полнотой, так как состоятельность теории в конечном счете подтверждается успехом ее применения, а мы до сих пор не рассматривали применений. Поэтому мы приведем только основные доводы в пользу нашей процедуры, а затем сошлемся на приложения, которые обеспечат ей определенное подтверждение.

## 58.3. Обсуждение

58.3.1. В этой связи особого внимания заслуживают следующие соображения.

Первое. Доставить потери противнику еще не значит получить непосредственную выгоду в общей игре (т. е. не обязательно с нулевой суммой), однако это является способом оказать на него давление. Его можно заставить такой угрозой платить компенсацию, можно регулировать его стратегии желательным образом и т. д. Следовательно, нельзя с самого начала отмахнуться от рассмотрения этого вида стратегических возможностей. Наш способ построения характеристической функции, как было проанализировано выше, может оказаться для этого наиболее подходящим. Следует отметить, однако, что это не есть оправдание нашего способа; это только подготовка почвы для действительного оправдания, которое состоит в успешных его приложениях.

Второе. Дальнейшие соображения в этом же направлении следующие. Мы видели, что в нашей теории все решения соответствуют получению максимальной общей выгоды совокупностью всех игроков [1]). Когда

[1]) См. конец п. 56.7.1 и, в частности, сноску 2 на стр. 519.

максимум достигнут, любой дальнейший выигрыш некоторой группы игроков должен быть компенсирован по меньшей мере равным ему проигрышем остальных. В действительности возможны и сверхкомпенсации, т. е. одна группа может получить выигрыш путем нанесения большего ущерба остальным. Однако мы предположили наличие полной информации для всех игроков и беспрепятственного взаимодействия угроз, контругроз и компенсаций между игроками [1]). Следовательно, можно предположить, что такие возможности будут эффективными только как угрозы и что соответствующие действия никогда не реализуются благодаря переговорам и компенсациям. При этом мы не имеем в виду, что эти угрозы являются блефом, который никогда не применяется. Так как у всех игроков имеется полная информация, никакого сомнения возникнуть не может. Однако, если появляется угроза действий, в результате которых одна сторона выигрывает меньше, чем проигрывает другая, то тем самым возникает возможность избежать этой угрозы путем компенсаций, которые выгодны обеим сторонам [2]). Когда это произойдет, снова окажется, что одна сторона выиграет ровно столько, сколько потеряет другая.

Если считать эту аргументацию верной во всех случаях, то наши трудности исчезают.

**58.3.2.** Третье. Можно было бы сказать, что аргументация в двух предыдущих пунктах слишком краткая и не оправдывает нашу теорию в той точной форме, в которой мы предполагаем ее использовать. Это верно, но подробное обоснование теории, какое было дано в пп. 56.2.2—57.1, удовлетворяет этим требованиям. Если читатель снова рассмотрит эти пункты в свете двух предшествующих замечаний, то он увидит, что там шла речь о подробном обосновании в желаемом смысле. Действительно, возможность такого возражения послужила причиной столь детального обсуждения нашей теории и исключения правдоподобных беглых рассуждений [3]).

Четвертое. Несмотря на все это, читатель может почувствовать, что мы преувеличили роль угроз, компенсаций и т. д. и что в этом, возможно, содержится односторонность нашего подхода, которая может испортить результаты его применения. Лучшим ответом на это возражение, как уже указывалось раньше, будет изучение применений теории.

Мы рассмотрим поэтому некоторые приложения, которые соответствуют известным экономическим проблемам. Их изучение покажет, что наша теория ведет к результатам, которые, вплоть до некоторого момента, удовлетворительно согласуются с обычной, основанной на здравом смысле, точкой зрения на эти предметы. Это будет всегда, пока выполнены следующие два условия. Во-первых, пример должен быть настолько прост, чтобы допускать чисто словесный анализ без использования какого-либо математического аппарата. Во-вторых, нужно, чтобы те факторы, которые неотделимы от нашей теории, но часто исключаются при обычном, словесном подходе,— коалиции и компенсации,— не играли бы

---

[1]) Все наше отношение к коалициям и компенсациям было основано на этих положениях уже в теории игр с нулевой суммой.

[2]) Мы не собираемся определять здесь размеры компенсаций, т. е. природу соглашения. Это — задача точной теории, которой мы уже располагаем. Это будет основным вопросом в каждом приложении (см. различные интерпретации в §§ 61—63). Сейчас мы хотим только показать, что действия, которые могли бы привести к потерям для всех игроков, могут быть исключены описанным выше способом.

[3]) Можно было бы определить характеристическую функцию как в п. 58.1 и выступать тогда с прямым обобщением теории игр с нулевой суммой, т. е. с (56:I:d) из п. 56.12.

существенной роли. Такую ситуацию мы найдем в приложениях в пп. 61.2.2—61.4. Эти примеры дадут фактическое подтверждение нашего подхода.

Кроме того, в случае, когда первое условие выполняется, а второе — нет, мы обнаружим расхождения как раз в том направлении и в той степени, которые могут быть оправданы различием в точках зрения. Это будет, в частности, ясно из примеров пп. 61.5.2, 61.6.3 и 62.6.

Наконец, когда и первое условие не выполнено и задача перестает быть элементарной, мы постепенно достигнем области, в которой теоретическая процедура с необходимостью вытесняет обычную, чисто словесную [1]).

## § 59. ОБЩИЕ РАССМОТРЕНИЯ

### 59.1. Обсуждение программы

**59.1.1.** Теперь мы можем перейти к применениям нашей теории общих игр $n$ лиц. Лучше всего начать такое применение с систематического изучения всех общих игр $n$ лиц для небольших значений $n$. Окажется, что мы сможем сделать это без труда для тех же $n$, что и в случае игр с нулевой суммой, именно для $n \leqq 3$. Исследование для бóльших значений, т. е. для $n \geqq 4$, по меньшей мере так же трудно, как и для игр с нулевой суммой, где мы смогли изучить только различные частные случаи.

На этот раз мы предполагаем сделать значительно меньше в анализе игр с $n \leqq 4$. Мы можем позволить себе теперь быть гораздо более краткими, чем при изучении игр с нулевой суммой: детальное обсуждение там было необходимо для того, чтобы самим убедиться в адекватности нашего подхода, а также общих идей и методических принципов, лежащих в его основе. На той стадии, которой мы уже достигли, общие положения теории уже подтверждены, и мы хотим лишь приобрести уверенность в одном обобщающем шаге, сделанном в этой главе. Для этой цели достаточно и менее подробного анализа приложений.

Кроме того, окажется возможным связать общие игры, для которых $n \leqq 3$, с некоторыми типичными экономическими проблемами (двусторонней монополией, дуополией и т. д.), что позволит судить об адекватности нашей теории в ранее определенном смысле.

Более подробное исследование общих игр с $n \geqq 4$ будет предпринято в последующих публикациях.

**59.1.2.** Систематическое применение нашей новой теории лучше всего начать с общего рассмотрения, подобного произведенному в § 31. Однако нет необходимости проводить в деталях эквивалентное рассуждение; мы должны только проанализировать, в какой мере полученные там результаты применимы в настоящей ситуации или какие изменения требуется в них внести.

Нам не надо снова обсуждать роль стратегической эквивалентности, как это делалось в п. 31.3, так как этот предмет разобран вполне удовлетворительно в п. 57.5.1. С другой стороны, мы поставим некоторые

---

[1]) Этот постепенный переход от подтверждений теории с помощью надежных, с точки зрения здравого смысла, результатов в простом случае к пренебрежению нетеоретическими подходами в пользу теорий в сложных случаях является, безусловно, весьма характерной чертой построения научных теорий.

другие вопросы, не возникавшие в § 31: редуцированные формы, неравенства, которые выполняются для характеристической функции, несущественность и существенность (см. пп. 27.1—27.5); далее, абсолютные значения $|\Gamma|_1$, $|\Gamma|_2$ (см. п. 45.3) и, наконец, некоторые замечания, касающиеся теории разложения из главы IX.

### 59.2. Редуцированная форма. Неравенства

**59.2.1.** Понятие стратегической эквивалентности, введенное в п. 57.5.1, можно использовать для определения редуцированной формы всех характеристических функций в духе п. 27.1.

Пусть дана характеристическая функция $\mathrm{v}(S)$; тогда ее общее стратегически эквивалентное преобразование описывается равенством (57:18) из п. 57.5.1, т. е.

$$\mathrm{v}'(S) = \mathrm{v}(S) + \sum_{k \in S} \alpha_k^0. \tag{59:1}$$

Это в точности совпадает с (27:2) из п. 27.1.1 с той только разницей, что теперь на $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$ не накладывается ограничение (27:1), которому они должны были удовлетворять раньше: $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 = 0$. Таким образом, $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$ оказываются теперь $n$ независимыми параметрами, тогда как раньше среди них было только $n-1$ независимых (см. п. 27.1.3) [1]).

Однако было бы ошибочно предполагать, что это ведет к более ограниченным возможностям нормирования, чем найденные в п. 27.1.4. В самом деле, там мы хотели получить конкретную $\mathrm{v}'(S)$ (которую мы обозначили через $\bar{\mathrm{v}}(S)$) удовлетворяющую $n-1$ условию (27:3):

$$\bar{\mathrm{v}}((1)) = \bar{\mathrm{v}}((2)) = \ldots = \bar{\mathrm{v}}((n)). \tag{59:2}$$

К тому же, рассматривавшаяся тогда характеристическая функция относилась к игре с нулевой суммой; следовательно, мы имели автоматически:

$$\bar{\mathrm{v}}((1, \ldots, n)) = 0. \tag{59:3}$$

Теперь, считая это нормирующим условием, мы будем иметь $n$ условий: (59:2) и (59:3). Так мы получаем:

$$\mathrm{v}(I) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 = 0, \tag{59:4}$$

$$\mathrm{v}((1)) + \alpha_1^0 = \mathrm{v}((2)) + \alpha_2^0 = \ldots = \mathrm{v}((n)) + \alpha_n^0. \tag{59:5}$$

(59:4) выражает (59:3); (59:5) выражает (59:2). Эти равенства соответствуют (27:1*) и (27:2*); легко проверить, что им удовлетворяет

[1]) Наша настоящая точка зрения на этот вопрос подобна той, которую мы высказали для игр с постоянной суммой в п. 42.2.2.

единственная система $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$:

$$\alpha_k^0 = -\mathrm{v}((k)) + \frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k)) - \mathrm{v}(I)\right\}^{1)}. \tag{59:6}$$

Таким образом, мы можем сказать:

(59:A) Характеристическая функция $\overline{\mathrm{v}}(S)$ называется *редуцированной* тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям (59:2) и (59:3) [2]. Тогда любая характеристическая функция $\mathrm{v}(S)$ стратегически эквивалентна ровно одной редуцированной $\overline{\mathrm{v}}(S)$. Эта $\overline{\mathrm{v}}(S)$ задается формулами (59:1) и (59:6), и мы назовем ее *редуцированной формой* $\mathrm{v}(S)$.

**59.2.2.** Другое возможное требование, предъявляемое к $n$ параметрам $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$, возникает, если требовать, чтобы $\mathrm{v}'(S)$, которую мы обозначим через $\tilde{\mathrm{v}}(S)$, удовлетворяла $n$ условиям

$$\tilde{\mathrm{v}}((1)) = \tilde{\mathrm{v}}((2)) = \ldots = \tilde{\mathrm{v}}((n)) = 0. \tag{59:7}$$

Это означает, что

$$\mathrm{v}((1)) + \alpha_1^0 = \mathrm{v}((2)) + \alpha_2^0 = \ldots = \mathrm{v}((n)) + \alpha_n^0 = 0, \tag{59:8}$$

т. е.

$$\alpha_k^0 = -\mathrm{v}((k)). \tag{59:9}$$

Итак, мы можем сказать:

(59:B) Назовем характеристическую функцию $\mathrm{v}(S)$ *нуль-редуцированной* тогда и только тогда, когда она удовлетворяет (59:7). Тогда любая характеристическая функция $\mathrm{v}(S)$ стратегически эквивалентна ровно одной нуль-редуцированной $\tilde{\mathrm{v}}(S)$. Эта характеристическая функция $\tilde{\mathrm{v}}(S)$ определяется формулами (59:1) и (59:9), и мы назовем ее *нуль-редуцированной* формой $\mathrm{v}(S)$.

**59.2.3.** Рассмотрим редуцированную характеристическую функцию $\overline{\mathrm{v}}(S)$. Обозначим общее значение $n$ членов в (59:2) через $-\gamma$, т. е. положим

$$-\gamma = \overline{\mathrm{v}}((1)) = \overline{\mathrm{v}}((2)) = \ldots = \overline{\mathrm{v}}((n)). \tag{59:10}$$

Следовательно, $-\gamma = \mathrm{v}((k)) + \alpha_k^0$, и из (59:6) мы получаем

$$\gamma = \frac{1}{n}\left\{\mathrm{v}(I) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k))\right\}. \tag{59:11}$$

---

[1]) Доказательство. Обозначим общее значение $n$ членов равенств (59:5) через $\beta$. Тогда (59:5) дает $\alpha_k^0 = -\mathrm{v}((k)) + \beta$, а (59:4) превращается в

$$\mathrm{v}(I) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k)) + n\beta = 1,$$

т. е.

$$\beta = \frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k)) - \mathrm{v}(I)\right\}.$$

[2]) Это в точности является определением из п. 27.1.4.

Если мы рассмотрим нуль-редуцированную форму $\tilde{\mathrm{v}}(S)$ той же характеристической функции $\mathrm{v}(S)$, то получим

$$\tilde{\mathrm{v}}(I) = \mathrm{v}(I) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0;$$

следовательно, из (59:9) мы получаем $\tilde{\mathrm{v}}(I) = \mathrm{v}(I) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k))$, т. е., используя (59:11), имеем:

(59:12) $$n\gamma = \tilde{\mathrm{v}}(I).$$

Возвращаясь к редуцированной форме $\bar{\mathrm{v}}(S)$, мы видим, что некоторые равенства и все неравенства из п. 27.2 остаются в силе.

Начнем с того, что (59:10) можно переписать следующим образом:

(59:13) $\bar{\mathrm{v}}(S) = -\gamma$ для любого одноэлементного $S$.

Это совпадает с (27:5*), в то время как (27:5**) неверно, так как мы видели в п. 57.2.1, что у нас теперь нет эквивалента для (25:3:b) из п. 25.3.1, и это не позволяет здесь получить (27:5**) из (27:5*).

Повторное применение (57:2:c) из п. 57.2.1 к множествам (1), . . ., $(n)$ дает с помощью (59:13) $-n\gamma \leqq 0$, т. е.

(59:14) $$\gamma \geqq 0.$$

Это совпадает с (27:6) из п. 27.2.

Рассмотрим, далее, произвольное подмножество $S$ множества $I$. Пусть $p$ — число его элементов: $S = (k_1, \ldots, k_p)$. Повторное применение (57:2:c) из п. 57.2.1 к множествам $(k_1), \ldots, (k_p)$ и использование (59:13) дают нам

$$\bar{\mathrm{v}}(S) \geqq -p\gamma.$$

Применим это к множеству $-S$, которое состоит из $n-p$ элементов. Ввиду (57:2:b) из п. 57.2.1 и (59:3) мы получаем

$$\bar{\mathrm{v}}(-S) \leqq -\bar{\mathrm{v}}(S)$$ [1].

Поэтому предыдущее неравенство превращается в

$$\bar{\mathrm{v}}(S) \leqq (n-p)\gamma.$$

Объединение этих неравенств дает нам

(59:15) $-p\gamma \leqq \bar{\mathrm{v}}(S) \leqq (n-p)\gamma$ для каждого $p$-элементного множества $S$.

Это совпадает с (27:7) из п. 27.2.

(59:13) вместе с $\mathrm{v}(\varnothing) = 0$ (т. е. с (57:2:a) из п. 57.2.1) можно сформулировать также следующим образом:

(59:16) Для $p = 0, 1$ мы получаем равенство в первом соотношении из (59:15).

[1]) Заметим, что мы применяем здесь это неравенство вместо недостающего равенства (25:3:6) из п. 25.3.1, которое использовалось в п. 27.2.

Это совпадает с (27:7*) из п. 27.2.

$\overline{\mathrm{v}}(I) = 0$ (т. е. (59:3)) можно также сформулировать в следующем виде:

(59:17) Для $p = n$ мы имеем во втором соотношении из (59.15) знак $=$.

Это совпадает с (27.7**) из п. 27.2, за исключением случая $p = n - 1$, отсутствующего по той же причине, по которой здесь недостает эквивалента для (27.5**) (см. замечание, следующее за (59.13)).

### 59.3. Различные вопросы

**59.3.1.** Полученные неравенства теперь можно трактовать в том же духе, как это делалось в п. 27.3.1.

Рассмотрим две возможности, основанные на (59:14).

Первый случай: $\gamma = 0$. Здесь (59:15) дает нам $\overline{\mathrm{v}}(S) = 0$ для всех $S$. Это есть как раз *несущественный* случай, рассмотренный в п. 27.3.1, со всеми присущими ему свойствами, перечисленными там. Рассмотрение (59:A) дает, что несущественная игра эквивалентна игре, для которой $\overline{\mathrm{v}}(S) \equiv 0$, т. е. игре, которая является совершенно бессодержательной.

Второй случай: $\gamma > 0$. Изменяя масштаб, мы можем положить $\gamma = 1$ со всеми последствиями, выявленными в п. 27.3.2. Так же как и там, мы сделаем это несколько ниже. По той же причине, что и там, стратегии коалиций имеют решающее значение в такой игре. Мы назовем игру в этом случае *существенной*.

Критерии несущественности и существенности (27:B), (27:C), (27:D) из п. 27.4 остаются в силе: в (27:B) сумму $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k))$ следует заменить на

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}((k)) - \mathrm{v}(I),$$

в то время как (27:C) и (27:D) остаются без изменения. Действительно, легко проверить, что доказательства, данные там, переносятся на этот случай, если использовать для обоснования сказанное в п. 59.2.1.

Мы предоставляем читателю применить выводы из п. 27.5 для существенного случая при нормировании $\gamma = 1$ к настоящей ситуации.

**59.3.2.** Мы можем теперь перейти к исследованиям, которые аналогичны проведенным в § 31.

Замечания из пп. 31.1.1—31.1.3, касающиеся структуры понятия доминирования, а также *заведомо необходимых* и *заведомо не необходимых* множеств, могут быть повторены без изменений. Понятия *выпуклости* и *линейности* можно ввести как и в п. 31.1.4. Выводы из пп. 31.1.4—31.1.5 также получаются непосредственно; исключение составляют (31:E:b) из 31.1.4 и (31:G) из п. 31.1.5, так же как и (31:H) для случая $p = n - 1$. Это происходит лишь там, где используется (25:3:b) из п. (25:3:1) (см. п. 57.2.1).

Наконец, замечание в конце п. 31.1.5 должно быть изменено. Ввиду сказанного выше, значение $p = n - 1$ так же вызывает сомнение, как и в (31:8), т. е. те $p$, для которых необходимость $S$ сомнительна, ограничены случаями $p \neq 0, 1, n$, т. е. интервалом

(59:18) $$2 \leq p \leq n - 1.$$

Таким образом, этот интервал здесь непуст уже при $n \geqq 3$, а не только для $n \geqq 4$ [1]), как это было раньше.

Рассмотрим теперь результаты п. 31.2. Для читателя, познакомившегося с этим пунктом, не составит труда проверить справедливость утверждений (31:I), (31:J), (31:K). В (31:L) построение $\vec{\beta}$ с помощью $\vec{\alpha}$ может быть проделано без какого-либо изменения; первое утверждение, $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$, не может быть сохранено, так как оно опирается на ту часть (31:H) из п. 31.1.5, которая больше не имеет места; второе утверждение, что неверно $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$, не затрагивается. Это ослабление (31:L) исключает (31:M). Утверждение (31:N) остается верным, так как оно использует только незатронутую часть (31:L). Утверждения (31:O) и (31:P) сохраняются.

**59.3.3.** В заключение рассмотрим некоторые понятия из главы IX. Мы определили там два числа, $|\Gamma|_1$ и $|\Gamma|_2$, первое — в п. 45.1, а второе — в п. 45.2.3, и разобрали их свойства в п. 45.3.

Оба определения, т. е. содержание пп. 45.1 и 45.2, переносятся буквально. В п. 45.3 нужно внести, однако, существенные изменения: в (45:F) остается в силе только вторая часть доказательства, но не первая его часть, так как первая (и только она) использует (25:3:b) из п. 25.3.1 (см. п. 57.2.1). Конкретно говоря, мы имеем

(59:19) $$|\Gamma|_2 \leqq \frac{n-2}{2}|\Gamma|_1$$

и можем, таким образом, оценивать $|\Gamma|_2$ через $|\Gamma|_1$; но

(59:20) $$|\Gamma|_1 \leqq (n-1)|\Gamma|_2$$ [2])

неверно, и мы не можем оценивать $|\Gamma|_1$ с помощью $|\Gamma|_2$. В действительности мы увидим в п. 60.2.1, что для некоторых игр может оказаться

(59:21) $$|\Gamma|_1 > 0, \quad |\Gamma|_2 = 0.$$

В соответствии с этим замечания из пп. 45.3.3—45.3.4 становятся беспредметными. То же самое можно сказать и о п. 45.3.1, т. е. его результат (45:E) неверен, поскольку это касается $|\Gamma|_2$. Он верен для $|\Gamma|_1$, однако это просто пересказ определения. Отсюда и из (59:19), (59:21) мы видим, что (45:E) должно быть ослаблено следующим образом:

(59:C) Если игра $\Gamma$ несущественна, то $|\Gamma|_1 = 0$, $|\Gamma|_2 = 0$.
Если игра $\Gamma$ существенна, то $|\Gamma|_1 > 0$, $|\Gamma|_2 \geqq 0$.

Теория *композиции* и *разложения*, которой посвящена глава IX, может быть распространена в своей существенной части и на данный случай. Разница между поведением $|\Gamma|_1$ и $|\Gamma|_2$, рассмотренная выше, требует внесения небольших изменений, но и это легко осуществляется. Конечно, теория эксцессов и решений в множествах $E(e_0)$ и $F(e_0)$ должна быть распространена и на настоящий случай, но это тоже не представляет реальных трудностей.

Подробный анализ этих вопросов вывел бы нас за пределы, которые мы себе поставили в п. 59.1.1. Кроме того, интерпретационное значение этих результатов не отличается существенно от того, что уже было получено в главе IX при рассмотрении игр с нулевой суммой.

---

[1]) Это соответствует той связи, которая существует между общей игрой $n$ лиц и игрой $n+1$ лица с нулевой суммой, которая рассматривалась в пп. 56.2—56.12.

[2]) (59:20) и (59:19) выражают соответственно две части (45:F).

# § 60. РЕШЕНИЯ ВСЕХ ОБЩИХ ИГР ДЛЯ $n \leqq 3$

## 60.1. Случай $n = 1$

**60.1.** Перейдем к систематическому описанию всех общих игр $n$ лиц с $n \leqq 3$, как это было обещано в п. 59.1.1.

Рассмотрим сначала $n = 1$. Этот случай уже рассматривался (и для практических целей был решен) в п. 12.2. В частности, в п. 12.2.1 мы указывали, что в этом (и только в этом) случае мы имеем дело с чистой задачей максимизации. Тем не менее хотелось бы проверить, что наша общая теория дает и в этом (тривиальном) частном случае те же результаты, что и основанные на здравом смысле [1]). Поэтому мы применим общую теорию в полной ее математической строгости.

Общая игра Г с $n = 1$ необходимо несущественна: это следует из рассмотрения характеристической функции $\bar{v}(S)$ в редуцированной форме, так как тогда (59:16) и (59:17) из п. 59.2.3 дают (для $p = 1 = n$) $-\gamma = 0$, т. е. $\gamma = 0$. Мы можем также воспользоваться (не прибегая к редукции) любым из критериев (27:B), (27:C) или (27:D) из п. 27.4 (см. п. 59.3.1). Например, (27:C), очевидно, удовлетворяется при $\alpha_1 = v((1))$. Заметим, что это есть $v(I)$, т. е. по (56:13) из п. 56.9.1 (в обозначениях из п. 12.2.1) $\max_\tau \mathscr{K}(\tau)$. Перепишем это:

$$\alpha_1 = v((1)) = v(1) = \max_\tau \mathscr{K}(\tau). \tag{60:1}$$

Так как игра Г несущественна, мы можем применить (31:O) или (31:P) из п. 31.2.3 (см. п. 59.3.2). Это дает нам:

(60:A) Игра Г имеет ровно одно решение, которым является одноэлементное множество $(\vec{\alpha})$, где $\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1\}\}$, причем $\alpha_1$ определяется согласно (60:1).

Это и есть, очевидно, тот «основанный на здравом смысле» результат из п. 12.2.1, как и должно было быть.

## 60.2. Случай $n = 2$

**60.2.1.** Рассмотрим теперь $n = 2$. Основным фактом является то, что общая игра для $n = 2$ не обязана быть несущественной; это отличает ее от игры с нулевой суммой при $n = 2$. (Последняя несущественна по первому замечанию из п. 27.5.2.)

Действительно, характеристическая функция $\bar{v}(S)$ в своей редуцированной форме полностью определяется соотношениями (59:16) и (59:17) из п. 59.23:

$$\bar{v}(S) = \begin{cases} 0 \\ -\gamma \\ 0 \end{cases} \text{если } S \text{ содержит } \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \text{элементов.} \tag{60:2}$$

Теперь немедленно проверяется, что $\bar{v}(S)$ из (60:2) удовлетворяет условиям (57:2:a) и (57:2:c) из п. 57.2.1, т. е. что она является характеристической функцией некоторой игры Г тогда и только тогда, когда $\gamma \geqq 0$. Это есть в точности условие (59:14) из п. 59.2.3. Таким образом, мы видим, что в (60:2) возможно любое $\gamma \geqq 0$ из (59:14).

[1]) Это возвращает нас к четвертому замечанию из п. 58.3.2.

Итак, как и утверждалось, случай $\gamma > 0$, т. е. существенность, является возможным. В этом случае мы можем продолжить нормирование, положив $\gamma = 1$, чем полностью определяется (60:2). Таким образом, существует только один тип существенной общей игры двух лиц.

Заметим, что, в то время как $|\Gamma|_1 = 2\gamma$ может быть $> 0$, $|\Gamma|_2 = 0$ всегда (для $n = 2$). Достаточно доказать это для редуцированной формы, т. е. для (60:2).

В самом деле, вспоминая определения из пп. 45.2.1 и 45.2.3, мы видим, что дележ $\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2\}\}$ исключен, если $\alpha_1, \alpha_2 \geqq -\gamma$, $\alpha_1 + \alpha_2 \geqq 0$, и что соответствующее минимальное $e = \alpha_1 + \alpha_2$ есть 0 [1]). Значит, $|\Gamma|_2 = 0$, что и требовалось доказать.

Резюмируем: для $n = 2$ игра с нулевой суммой должна быть несущественной, а общая — не обязательно. Соответственно для первой должно быть $|\Gamma|_1 = 0$, а для второй может быть также и $|\Gamma|_1 > 0$. Но для обеих всегда $|\Gamma|_2 = 0$.

Мы предоставляем читателю интерпретировать этот результат в свете предыдущих рассуждений и, в частности, п. 45.3.4.

**60.2.2.** Легко найти решения общей игры $\Gamma$ для $n = 2$.

По остающейся в силе части (31:H) из п. 31.1.5 (см. соответствующие замечания из п. 59.3.2) все множества $S \subseteq I$ с 0, 1, $n$ элементами являются заведомо не необходимыми, но так как $n = 2$, этим исчерпываются все подмножества. Следовательно, мы можем искать решения $\Gamma$ так же, как если бы доминирования вообще не было. Следовательно, решение определяется просто тем свойством, что вне его не имеется дележей. Это значит, что существует ровно одно решение: множество всех дележей.

Дележ задается в этом случае как вектор $\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2\}\}$, удовлетворяющий условиям (57:15), (57:16) из п. 57.5.1, которые теперь превращаются в

(60:3) $$\alpha_1 \geqq v((1)), \quad \alpha_2 \geqq v((2)),$$

(60:4) $$\alpha_1 + \alpha_2 = v((1, 2)) = v(I).$$

Сформулируем результат.

**(60:B)** Игра $\Gamma$ имеет единственное решение, именно множество всех дележей, т. е. $\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2\}\}$, где $\alpha_1$ и $\alpha_2$ удовлетворяют (60:3) и (60:4).

Заметим, что (60:3) и (60:4) определяют единственную пару чисел $\alpha_1$, $\alpha_2$ (т. е. вектор $\vec{\alpha}$) тогда и только тогда, когда

(60:5) $$v((1)) + v((2)) = v((1, 2)).$$

По критерию из п. 27.4 это в точности выражает несущественность $\Gamma$. Этот результат, как и следовало ожидать, согласуется с (31:P) из п. 31.2.3 (см. п. 59.3.2).

В противном случае

(60:6) $$v((1)) + v((2)) < v((1, 2)),$$

и существует бесконечно много пар $\alpha_1$, $\alpha_2$, т. е. $\vec{\alpha}$. Это — случай существенной игры $\Gamma$.

Истолкование этих результатов будет приведено в пп. 61.2—61.4.

---

[1]) Это получается, например, при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

### 60.3. Случай $n = 3$

**60.3.1.** Рассмотрим, наконец, $n = 3$. Среди этих игр содержится и существенная игра трех лиц с нулевой суммой, для которой $|\Gamma|_1 > 0$ и $|\Gamma|_2 > 0$ (см. п. 45.3.3). Итак, мы видим:

Для $n = 3$ игра с нулевой суммой, так же как общая игра, может быть существенной и оба неравенства $|\Gamma|_1 > 0$ и $|\Gamma|_2 > 0$ возможны.

Случай, когда игра Г несущественна, рассмотрен в (31:O) или (31:P) из п. 31.2.3 (см. п. 59.3.2). Мы предположим поэтому, что игра Г существенна.

Используем редуцированную форму Г с нормированием $\gamma = 1$. Тогда мы можем описать характеристическую функцию $\overline{\mathrm{v}}(S)$ с помощью (59:16) и (59:17) из п. 59.2.3 следующим образом:

(60:7) $$\overline{\mathrm{v}}(S) = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \text{если } S \text{ имеет } \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 3 \end{cases} \text{элементов}$$

и

(60:8) $$\overline{\mathrm{v}}((2,3)) = a_1,\ \overline{\mathrm{v}}((1,3)) = a_2,\ \overline{\mathrm{v}}((1,2)) = a_3, \text{ если } S \text{ имеет 2 элемента.}$$

Непосредственно проверяется, что $\overline{\mathrm{v}}(S)$ из (60:7) и (60:8) должна удовлетворять условиям (57:2:a) и (57:2:c) из п. 57.2.1, т. е. она является характеристической функцией некоторой игры Г (см. п. 57.3.4) тогда и только тогда, когда

(60:9) $$-2 \leqq a_1,\ a_2,\ a_3 \leqq 1.$$

Заметим, что такая Г может иметь нулевую сумму (т. е. что (25:3:b) из п. 25.3.1 выполняется) тогда и только тогда, когда

(60:10) $$a_1 = a_2 = a_3 = 1.$$

Другими словами, область (60:9) представляет собой множество всех общих игр, тогда как ее верхняя крайняя точка (60:10) представляет в нашем случае (единственную) игру с нулевой суммой.

**60.3.2.** Определим теперь решения этой (существенной) общей игры трех лиц.

Общий дележ в этом случае задается как вектор $\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\}$, удовлетворяющий условиям (57:15) и (57:16) из п. 57.5.1, которые превращаются в

(60:11) $$\alpha_1 \geqq -1,\ \alpha_2 \geqq -1,\ \alpha_3 \geqq -1,$$

(60:12) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Эти условия в точности те же, что и для $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в п. 32.1.1 (см. (32.2) и (32.3)), т. е. те же, что использовались в теории существенных игр трех лиц с нулевой суммой. Они согласуются также, если отбросить множитель $1 + \frac{e_0}{3}$ с условиями из п. 47.2.2 для $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ (см. (47:2*) и (47:3*)), т. е. с условиями, использованными в теории существенных игр трех лиц с нулевой суммой с эксцессом. Следовательно, мы можем пользоваться графическим представлением, описанным в п. 32.1.2 и, в частности, представленным на рис. 31. Мы получаем область векторов $\vec{\alpha}$ как фундаментальный треугольник в п. 32.1.2 на рис. 32. Аналогично в 47.2.2 и на рис. 49.

Выразим отношение доминирования в этом графическом представлении. Относительно множества $S$ из п. 30.1.1, по которому происходит доминирование $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$, можно сказать следующее. По верной части (31:H) из 31.1.5 (см. соответствующие рассуждения в п. 59.3.2) все множества $S \subseteq I$ с 0, 1 и $n$ элементами заведомо не необходимы, но, так как $n = 3$, это ограничивает наше исследование двухэлементными множествами $S$.

Положим поэтому $S = (i, j)$ [1]. Тогда доминирование означает, что

$$\alpha_i + \alpha_j \leqq \bar{v}((i, j)) = a_k \text{ и } \alpha_i > \beta_i, \ \alpha_j > \beta_j.$$

Согласно (60:12) первое условие можно переписать как $\alpha_k \geqq -a_k$.

Итак, доминирование $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ означает, что

(60:13) $$\begin{cases} \text{либо } \alpha_1 > \beta_1, \ \alpha_2 > \beta_2 \text{ и } \alpha_3 \geqq -a_3; \\ \text{либо } \alpha_1 > \beta_1, \ \alpha_3 > \beta_3 \text{ и } \alpha_2 \geqq -a_2; \\ \text{либо } \alpha_2 > \beta_2, \ \alpha_3 > \beta_3 \text{ и } \alpha_1 \geqq -a_1 \text{ [2]}. \end{cases}$$

Обстоятельствами, описываемыми (60:13), можно теперь дополнить картину фундаментального треугольника. Сходство теперь имеется больше с § 47, чем с § 32. Эта процедура соответствует переходу от рис. 49 к рис. 50 и 51, или к рис. 63 и 64, или к рис. 66 и 67. Действительно, различие по сравнению с рис. 50, 63, 66 (которые изображают одно и то же в соответствующих случаях (IV), (V), (VI)) состоит только в следующем.

Шесть прямых

(60:14) $$\begin{cases} \alpha' = -\left(1 + \frac{e_0}{3}\right), & \alpha^2 = -\left(1 + \frac{e_0}{3}\right), & \alpha^3 = -\left(1 + \frac{e_0}{3}\right), \\ \alpha' = -\left(1 - \frac{2e_0}{3}\right), & \alpha^2 = -\left(1 - \frac{2e_0}{3}\right), & \alpha^3 = -\left(1 - \frac{2e_0}{3}\right), \end{cases}$$

которые составляют там конфигурацию, заменяются теперь соответственно шестью прямыми

(60:15) $$\begin{cases} \alpha_1 = -1, & \alpha_2 = -1, & \alpha_3 = -1, \\ \alpha_1 = -a_1, & \alpha_2 = -a_2, & \alpha_3 = -a_3. \end{cases}$$

Поэтому второй треугольник (образованный тремя последними прямыми), который появляется в фундаментальном треугольнике (образованном тремя первыми прямыми), не обязательно должен располагаться симметрично относительно последнего, как это было на трех упомянутых рисунках.

**60.3.3.** Удобно различать два случая в соответствии с тем, пересекаются полуплоскости

(60:16) $$\alpha_1 \geqq -a_1, \quad \alpha_2 \geqq -a_2, \quad \alpha_3 \geqq -a_3,$$

ограниченные тремя последними прямыми из (60:15) (где допускаются все три отношения доминирования из (60:13)) или нет. Согласно (60:12),

---

[1] $i, j, k$ — некоторая перестановка 1, 2, 3.

[2] Это похоже на (47:5) из п. 47.2.3, за исключением того, что там мы имели $1 - \frac{2e_0}{3}$ на месте всех трех $a_1, a_2, a_3$. Имеется также изменение масштаба на коэффициент $1 + \frac{e_0}{3}$, о котором говорилось после (60:11) и (60:12).

По отношению к (32:4) из п. 32.1.3 можно сказать то же, что и для (47:5) из п. 47.2.3, см. сноску 1 на стр. 419.

первое означает, что

(60:17:a) $$a_1+a_2+a_3>0,$$

а второе — что

(60:17:b) $$a_1+a_2+a_3\leqq 0.$$

Мы назовем эти случаи соответственно случаями (a) и (b).

Случай (a). Мы имеем здесь те же условия, что и на рис. 50 и 51, за исключением того, что внутренний треугольник расположен не обязательно симметрично относительно фундаментального треугольника, как это было там. Если иметь это в виду, то разбор случая (IV), как он приведен в пп. 47.1—47.5, можно здесь дословно повторить. Решения поэтому будут такого же типа, как и те, что изображены на рис. 61 и 62.

Заметим, что если некоторое $a_i=1$, то соответствующие стороны внутреннего и фундаментального треугольников совпадают (см. (60:15)) и соответствующие кривые исчезают [1]).

Случай (b). Мы имеем, в сущности, условия, отраженные на рис. 63, 64 (условия на рис. 66, 67 — всего лишь варианты), с теми же оговорками по поводу асимметрии, какие были сделаны в случае (a).

Мы воспроизведем здесь снова рис. 63, отмечая стороны фундаментального треугольника сплошной чертой, а внутреннего — пунктиром: см. рис. 70. Их взаимное расположение допускает несколько вариантов, так как внутренний треугольник может выходить за пределы фундаментального различными способами [2]). Рисунки 70—73 изображают эти варианты [3]).

Замечание. Рисунки 70—73 отличаются друг от друга последовательным исчезновением областей *2*, *3*, *4*. Кроме того, одна или более из областей *1* и *5*, *6*, *7* может вырождаться в интервал на прямой или даже в точку. Иногда нелегко усмотреть различие между «исчезновением», о котором было сказано выше, и этим «вырождением». Правило, обходящее эти трудности, по которому можно различить четыре случая, соответствующие рис. 70—73, следующее: рис. 70—73 последовательно соответствуют тем случаям, когда внутренний треугольник пересекает стороны фундаментального треугольника в количестве от 0 до 3. (Пересечение в вершине считается пересечением обеих сторон, которым она принадлежит.)

Если иметь в виду эти обстоятельства, то приведенное в п. 47.6 обсуждение случая (v) можно повторить дословно [4]). Решения, следовательно, будут такими же, как и на рис. 65 (с необходимыми поправками на асимметрию и с учетом возможного исчезновения или вырождения областей *1*—*7* (см. рис. 70—73 и замечание выше)).

### 60.4. Сравнение с играми с нулевой суммой

**60.4.1.** Мы нашли все решения общей игры $n$ лиц при $n=3$, но мы еще не пытались анализировать смысл этих результатов. Теперь мы приступим к такому анализу.

---

[1]) Так в случае нулевой суммы, где $a_1=a_2=a_3=1$, в соответствии с результатами из § 32 ни одной из этих кривых нет.

[2]) По (60:9) должно быть $-2\leqq a_i\leqq 1$. Это означает, как читатель может легко проверить сам, что каждая сторона «внутреннего» треугольника должна быть расположена между соответствующей стороной фундаментального треугольника и его противоположной вершиной. Рис. 70—73 исчерпывают все возможности при этом ограничении.

[3]) Симметричными могут быть только те, которые соответствуют игре с нулевой суммой, т. е. $a_1=a_2=a_3=0$; см. рис. 70 и 73. Рис. 70 соответствует рис. 63, а рис. 73— рис. 66.

[4]) Обсуждение случая (VI) в п. 47.7 можно также рассматривать как такое повторение, только при более простых условиях.

Начнем с замечаний несколько формального свойства. Мы уже видели, что наименьшим $n$, для которого общая игра может быть существенной, является $n = 2$, в то время как для игр с нулевой суммой было $n = 3$. Мы видели также, что существует (предполагая редукцию и нормирование $\gamma = 1$) всего одна существенная общая игра для $n = 2$, а для случая

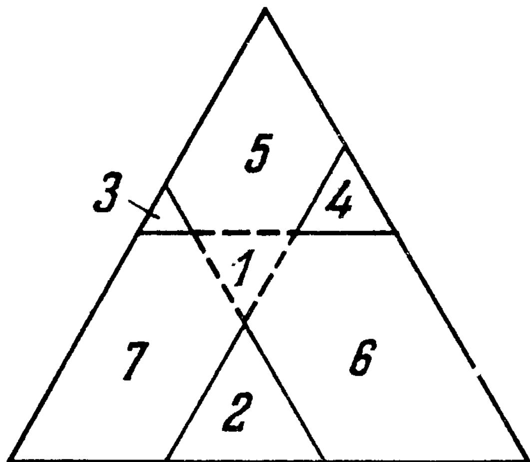


Рис. 70.

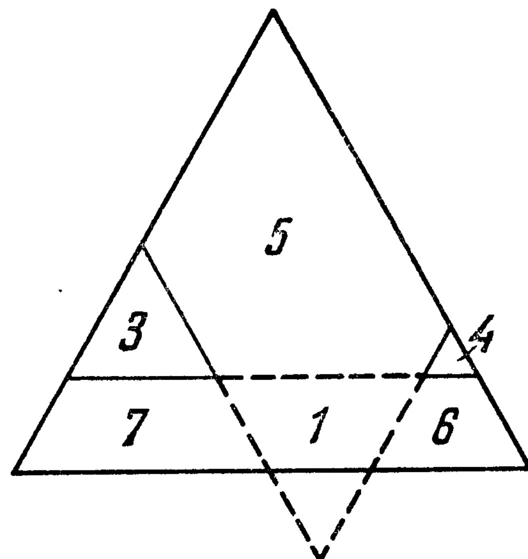


Рис. 71.

нулевой суммы то же можно сказать для $n = 3$. Далее, существенные общие игры для $n = 3$ (при тех же предположениях, что и выше) образуют трехпараметрическое семейство, в то время для игр с нулевой суммой это имело место при $n = 4$. Все это указывает на аналогию между общими играми $n$ лиц и играми $n + 1$ лица с нулевой суммой.

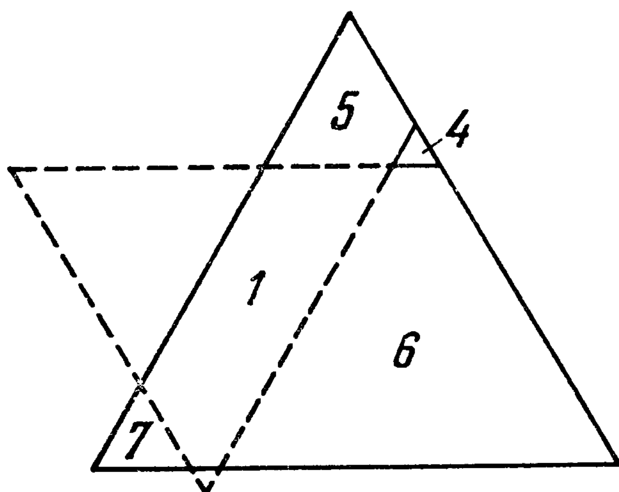


Рис. 72.

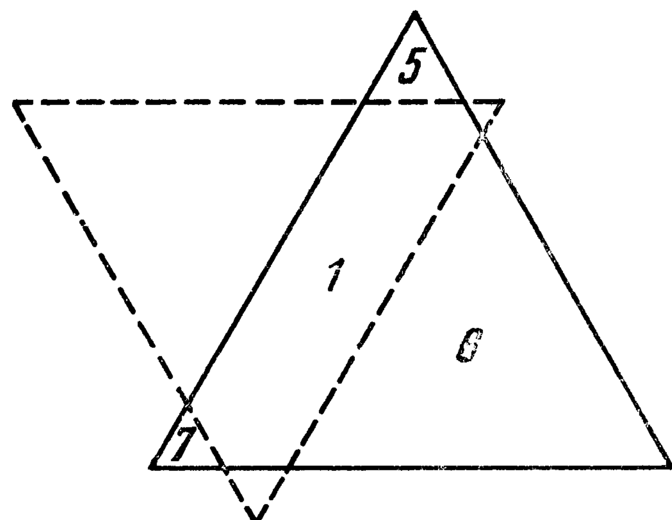


Рис. 73.

Конечно, нам известна и причина этого: расширение общей игры $n$ лиц есть игра $n + 1$ лица с нулевой суммой, и мы видели, что любая игра $n + 1$ лица с нулевой суммой может быть получена таким способом [1]).

60.4.2. Следует, однако, помнить, что хотя игры $n + 1$ лица с нулевой суммой исчерпываются этой процедурой, но для решений это не так: решения общей игры $n$ лиц образуют только подмножество решений ее расширения до игры с нулевой суммой (см., например, (56:1:a) из п. 56.12).

Таким образом, описание всех решений любой общей игры трех лиц означает только, что мы знаем некоторые, но не все решения любой игры четырех лиц с нулевой суммой. Действительно, пространное, но далеко не полное исследование в главе VII показывает, что нахождение всех решений игры четырех лиц с нулевой суммой является задачей значительно большего объема. Наши результаты, касающиеся общих игр трех лиц, позволяют, однако, сделать более важный вывод: любая игра четырех лиц с нулевой суммой имеет решение (исследования в главе VII не дали этого результата).

[1]) Точнее, она стратегически эквивалентна игре, которая может быть так получена (см. начало п. 57.4.1).

# § 61. ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ $n = 1, 2$

## 61.1. Случай $n = 1$

**61.1.** Мы переходим теперь к основной цели нашего настоящего анализа — к истолкованию результатов для $n = 1, 2, 3$.

Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Смысл этого случая был уже сформулирован в п. 60.1. В результате, как и должно было быть, получается простой принцип максимизации, характеризующий этот и только этот случай, который называется случаем «Робинзона Крузо».

## 61.2. Случай $n = 2$. Рынок двух лиц

**61.2.1.** Рассмотрим, далее, случай $n = 2$. Наши выводы, касающиеся этого случая, полученные в п. 60.2.2, можно словесно сформулировать следующим образом.

Здесь существует единственное решение. Оно состоит из всех тех дележей, в которых каждый игрок индивидуально получает не меньшую сумму, чем он может себе обеспечить один, а оба вместе получают ту максимальную сумму, которую они могут себе обеспечить в коалиции.

Здесь слова «сумма, которую игрок может себе обеспечить один» означают, что это — та сумма, которую он может получить независимо от действий оппонента, даже в предположении, что тот руководствуется в большей степени желанием нанести ему ущерб, чем выиграть самому [1]).

При исследовании решения мы сможем выполнить обещание, содержащееся в четвертом замечании в п. 58.3.2. Мы должны выяснить, действительно ли упомянутая выше сумма, которую игрок «может себе обеспечить один», основанная на предположении большего желания принести оппоненту потери, чем себе выигрыш, ведет к выводам, согласующимся с обычными представлениями [2]). Для того чтобы сравнить результаты нашей теории со здравым смыслом, желательно представить общую игру двух лиц в такой форме, которая доступна обычной интуиции. Такую форму легко получить при рассмотрении некоторых основных экономических отношений, которые могут иметь место между двумя лицами.

**61.2.2.** В соответствии с этим рассмотрим ситуацию, образованную на рынке двумя лицами: продавцом и покупателем. Мы будем анализировать только одну сделку; при этом окажется, что она эквивалентна общей игре двух лиц. Она, очевидно, также эквивалентна простейшей форме классической экономической проблемы *двусторонней монополии*.

---

[1]) См. подробное обсуждение в конце п. 58.2.1 и в п. 58.3. Сумма, которую игрок $k$ может себе обеспечить, есть, конечно, $v((k))$.

[2]) Читатель должен понять, что мы не приписываем этого желания оппоненту. Речь идет лишь о том, что наша теория строится так, как если бы он имел это желание. Значение имеют не эти возможные формулировки, а результаты теории.

Действительно, это «недоброжелательное» поведение оппонента определяет только некоторые, но не все свойства решения: оно определяет лишь минимальную сумму, которую игрок должен получить, а то, что они получат вместе, может быть найдено лишь с помощью противоположного допущения полной кооперации (см. выше).

Это является лишь частным случаем того общего факта, что только полная, строгая теория является надежным руководителем при всех условиях, тогда как словесная иллюстрация отдельных ее частей имеет ограниченное применение и может войти в противоречие с ее остальными частями.

Все это следовало и из подробных выводов п. 58.3.

Участниками являются 1 и 2: продавец 1 и покупатель 2. Сделка, которую мы рассматриваем, состоит в продаже игроком 1 единицы $A$ некоторого товара игроку 2. Обозначим полезность от обладания $A$ для 1 через $u$, а для 2 — через $v$. Это значит, что $u$ характеризует наилучший способ использования $A$ для продавца, а $v$ — полезность $A$ для покупателя после покупки.

Для того чтобы такая сделка имела смысл, полезность $A$ для покупателя должна превосходить полезность для продавца, т. е. должно быть

(61:1) $$u < v.$$

Удобно использовать состояние покупателя, когда продажи не происходит, т. е. его первоначальное финансовое положение, в качестве нуля при отсчете его полезности [1]).

Опишем это явление как игру. Для этого лучше вовсе исключить из рассмотрения $A$ и вместо этого иметь дело с полезностью, связанной с его передачей или иным использованием. Мы можем тогда сформулировать правила игры следующим образом.

1 предлагает 2 «цену» $p$, которую 2 может «принять» или «отклонить». В первом случае игроки 1 и 2 получают суммы $p$ и $v - p$. Во втором случае они получают $u$ и 0 [2]).

С точки зрения здравого смысла результат должен состоять в том, что цена $p$ будет иметь некоторое значение, заключенное между пределами, определяемыми оценками обоих участников, т. е.

(61:2) $$u \leqq p \leqq v.$$

Где фактически окажется значение $p$ в этих пределах из (61:2), зависит от факторов, не входящих в данное описание. Действительно, правило игры предусматривает только одно предложение цены, которое может быть принято или отклонено; ясно, что оно является и окончательным предложением в сделке. Ему могут предшествовать переговоры, соглашения, торг, заключение и расторжение контрактов, о которых мы ничего не знаем. Следовательно, удовлетворительная теория этой в высшей степени упрощенной модели должна считать весь интервал (61:2) допустимым для $p$.

### 61.3. Рассмотрение рынка двух лиц и его характеристической функции

**61.3.1.** Прежде чем перейти дальше, мы сделаем два замечания, касающихся описания игры, которая представляет собой модель рассматриваемой экономической ситуации.

Первое. Можно было бы использовать более сложную модель, допускающую большее (но ограниченное) число предложений цены и т. п.

На первый взгляд имеется довод в пользу рассмотрения таких вариантов, так как все существующие рынки регулируются более или менее сложными правилами для последовательных предложений цены каждым из всех участников, которые представляются существенными для понимания характера этих рынков. Кроме того, в § 19 мы подробно исследовали

---

[1]) Мы намеренно пренебрегаем возможностью описания продажи как обмена товара на товар. Наша теория заставляет нас по причинам, которые мы уже повторяли, использовать неограниченно трансферабельную (передаваемую) численную полезность, которую мы можем хорошо описать в терминах денег.

Мы отойдем от этой точки зрения только в главе XII.

[2]) Мы предоставляем читателю сформулировать это в терминах нашего первоначального комбинаторного определения игры.

игру в покер. Эта игра построена на взаимодействии ставок всех участников, и мы видели там, что последовательность и организация этих ставок имели решающее значение для структуры и теории этой игры. (См., в частности, описательную часть в пп. 19.1—19.3, варианты, разобранные в пп. 19.11—19.14 и заключительные выводы в п. 19.16.)

Ближайшее рассмотрение показывает, однако, что в данном случае эти детали не становятся решающими. Здесь ситуация существенно отличается от покера, который является игрой с нулевой суммой и где любой проигрыш одного игрока — это выигрыш для другого [1]). Читатель может исследовать любой более сложный рынок (но только с двумя участниками!) таким же способом, как мы это делаем для нашего простого варианта в п. 61.3.3. Он получит ту же характеристическую функцию, которую мы описываем в (61:5) и (61:6) из п. 61.3.3. Действительно, выводы, которые там делаются, применимы с соответствующими изменениями к любому рынку (с двумя участниками). Читатель, который проведет это сравнение до конца, убедится, что в этом доказательстве [2]) имеет значение в основном тот факт, что продавец (или покупатель) может, если он захочет, настаивать на упомянутой там цене, независимо от контрпредложений, которые он может получить, и от требуемого числа последовательных предложений цены.

Замечание. Возвращаясь к нашему предыдущему замечанию, касающемуся покера, отметим следующее. Читатель может проверить, как соответствующая простая универсальная политика там перестает действовать ввиду штрафов, которые накладываются правилами этой игры на любое запрещение, повышение или любые другие способы поддержания единой схемы ставок.

Можно, конечно, включить подобные условия в правила, управляющие рынком. В действительности имеются некоторые традиционные формы сделок, по-видимому, принадлежащие к этому типу, например определяемые правами на торговлю. Однако нам представляется нецелесообразным включать их в это первоначальное, элементарное исследование проблемы.

Эти уточнения приводят, по существу, к тем же результатам, что и в нашей простой модели. Поэтому мы не будем их рассматривать.

**61.3.2.** Второе. С другой стороны, наша модель поддается дальнейшему упрощению. В самом деле, механизм компенсаций между кооперированными игроками, который мы допускаем во всех частях нашей теории, полностью сохраняется при замене предложений цен самими ценами. Поэтому нет необходимости вводить в правила игры предложение, принятие или отклонение цен. Механизм компенсаций способен полностью их заменить, включая предварительные переговоры, соглашения, торг, заключение и расторжение контрактов.

Такая упрощенная игра может быть описана следующим образом. Оба игрока 1, 2 могут решить, совершать им обмен или нет. Если хотя бы один из них решит не меняться, то 1 и 2 получают величины $u$ и 0. Если оба решат меняться, то они получают величины $u'$ и $u''$, где $u'$ и $u''$ — два произвольных фиксированных числа, в сумме составляющих $v$ [3]).

Другими словами, правила игры могут допускать произвольную «цену» $p = u'$ (тогда $v - p = u''$), на которую игроки не могут влиять;

---

[1]) Это применимо непосредственно к покеру как к игре двух лиц, который рассмотрен в § 19. Если имеется более двух участников, то, рассматривая коалиции, мы приходим к той же ситуации.

[2]) Существенным является доказательство (61:5) из п. 61.33.

[3]) Характеристические функции для обоих случаев (для того, что из п. 61.2.2, и для рассмотренного выше) будут определены в п. 61.3.3; там же будет показано, что они совпадают.

тем не менее они смогут осуществить соответствующими компенсациями любую другую цену, которую они пожелают.

Таким образом, оказывается, что модель из п. 61.2.2 не является ни самой простой, ни самой полной. Однако мы используем ее, так как нам представляется, что она лучше выявляет существенные черты ситуации без излишних деталей.

**61.3.3.** Основанный на здравом смысле результат п. 61.2.2 в терминах дележей состоит в следующем. Существует единственное решение: множество дележей

$$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\ \alpha_2\}\},$$

где

(61:3) $$\alpha_1 \geqq u,\ \alpha_2 \geqq 0,$$

(61:4) $$\alpha_1+\alpha_2=v.$$

Сравнивая это с приложениями теории в п. 60.2.2, мы видим, что соответствие будет достигнуто, если (61:3) и (61:4) совпадают с (60:3) и (60:4). Это означает, что должно быть

(61:5) $$\mathrm{v}((1))=u,\ \mathrm{v}((2))=0,$$

(61:6) $$\mathrm{v}((1,\ 2))=v.$$

Легко проверить, что (61:5) и (61:6) действительно справедливы. В целях полноты мы сделаем это для обеих моделей из пп. 61.2.2 и 61.3.1, 61.3.2. Для первой мы это сделаем подробно, а изменения, необходимые для второй, мы будем приводить в квадратных скобках.

(61:5). Игрок 1 может быть уверен в получении $u$, если он предложит цену $p=u$ (решит не производить обмена). Игрок 2 может быть уверен, что игрок 1 получит $u$, отклонив любую цену (решив не производить обмена). Следовательно, $\mathrm{v}((1))=u$.

Заменяя $p=u$ на $p=v$ (при том же поведении обоих игроков), мы получаем таким же образом, что $\mathrm{v}((2))=0$.

(61:6). Оба игрока вместе получают либо $u$, либо $v$, которое получается из $p+(v-p)$ (из $u'+u''$). По (61:1) $v$ предпочтительнее; следовательно, $\mathrm{v}((1,\ 2))=v$.

## 61.4. Обоснование точки зрения, высказанной в § 58

**61.4.** Установленное в п. 63.3.3 совпадение значений характеристической функции $\mathrm{v}(S)$ с числами $u$, 0, $v$ может показаться тривиальным. Однако в этом имеется некоторый важный момент. Это совпадение было получено на основании нашего определения характеристической функции, которое критиковалось в пп. 58.3 и 61.2. Таким образом, оно связано с приписыванием каждому игроку (в некоторой части теории, но не во всей теории) большего желания принести убыток другому игроку, чем самому получить выигрыш.

Важно отдать себе отчет в том, что эта зависимость действительно существенная, т. е. что изменение этого предположения изменит и результат и поэтому сделает его неверным, так как, как мы видели, он был верным. Сказанное лучше всего проверить на модели из п. 61.2.2.

В самом деле, предположим, что при некоторых условиях игрок 2 предпочитает принести пользу себе, чем причинить ущерб игроку 1. Предположим, что такие условия осуществляются, например, когда

игрок 1 предлагает некоторую цену $p_0 > u$, но $<v$. В этом случае игрок 2 получает $v - p_0$, если он ее примет, и 0, если он ее отклонит. Следовательно, он выигрывает, если принимает цену. С другой стороны, игрок 1 получает $p_0$, если игрок 2 примет предложение, и $u$, если отклонит. Следовательно, наше предположение, касающееся целей игрока 2, означает, что он примет предложение.

Таким образом, в этих условиях игрок 1 может рассчитывать на получение суммы $p_0$. Это противоречит предыдущим выводам, в соответствии с которыми весь интервал цен (61:2) должен быть допустимым, а в п. 61.2.2 мы видели, что этот последний результат должен рассматриваться как естественный.

Подведем итоги. Обсуждение общей игры двух лиц, проведенное в пп. 61.2—61.4, показало, что общая игра двух лиц помогла нам в решении вопроса, следует ли строить характеристические функции так, как это сделано в нашей теории. Структура игры была достаточно простой для того, чтобы позволить предсказать результат, согласующийся со «здравым смыслом», и любое изменение в процедуре образования характеристической функции существенно изменит теоретический результат. Таким образом, с помощью приложения теории мы получили ее подтверждение в смысле четвертого замечания из п. 58.3.

## 61.5. Делимые продукты. «Маргинальные пары»

**61.5.1.** Дискуссия из пп. 61.2—61.4 относилась к весьма простому случаю, но тем не менее оказалась достаточной для той задачи «подтверждения», которую мы себе поставили. Кроме того, интерпретируя одну существенную общую игру двух лиц, мы интерпретируем сразу все такие игры, так как все они стратегически эквивалентны игре в редуцированной форме (которую мы можем нормировать, положив $\gamma = 1$).

Пока нам было этого достаточно. Однако желательно убедиться еще и в том, что наша теория справедлива также и в несколько менее тривиальных экономических ситуациях. С этой целью мы сначала несколько расширим описание рынка двух лиц. Как мы увидим, это не даст ничего существенно нового. После этого мы обратимся к общей игре трех лиц. Там мы найдем действительно новые подтверждения и возможности для более глубоких интерпретаций.

**61.5.2.** Вернемся к ситуации, описанной в п. 61.2.2: продавец 1 и покупатель 2 на рынке. Мы допускаем теперь сделки, касающиеся некоторых или всех из $s$ (неделимых и взаимозаменяемых) единиц $A_1, \ldots$ $\ldots, A_s$ некоторого товара [1]).

Обозначим полезность для игрока 1 от обладания $t$ ($= 0, 1, \ldots, s$) этими единицами через $u_t$, а для игрока 2 — через $v_t$. Таким образом, количества

(61:7) $$u_0 = 0,\ u_1, \ldots, u_s,$$

(61:8) $$v_0 = 0,\ v_1, \ldots, v_s$$

описывают различные полезности этих единиц для каждого участника. Так же как и в п. 61.2.2, мы считаем исходное положение покупателя нулем его полезности.

---

[1]) Мы могли бы допустить также и бесконечную его делимость, но это не составило бы существенной разницы.

Здесь нет необходимости повторять рассуждения из пп. 61.2.2, 61.3.1 и 61.3.2, касающиеся правил игры, которая моделирует эту ситуацию.

Легко видеть, какой должна быть ее характеристическая функция. Так как каждый игрок может воспрепятствовать любой из сделок[1]), мы, как и в п. 61.3.3, получаем, что

(61:9) $$\mathrm{v}((1)) = u_s, \quad \mathrm{v}((2)) = 0.$$

Так как оба игрока вместе могут определить число единиц, которые должны быть переданы, и так как передача $t$ единиц приносит им в сумме $u_{s-t}+v_t$, должно быть

(61:10) $$\mathrm{v}((1,\ 2)) = \max_{t=0,\ 1,\ \ldots,\ s} (u_{s-t}+v_t).$$

$\mathrm{v}(S)$ является характеристической функцией и потому должна удовлетворять неравенствам (57:2:a), (57:2:c) из п. 57.2.1. Только одно из них (ввиду (61:9) и (61:10)) не является очевидным:

(61:11) $$\mathrm{v}((1,\ 2)) \geqq \mathrm{v}((1)).$$

Оно получается, если заметить, что (согласно (61:10)) его левая часть $\geqq u_s+v_0=u_s$ (полагая $t=0$), а правая часть $=u_s$.

**61.5.3.** Рассмотрим теперь то значение $t$, на котором достигается максимум в (61.10). Пусть это будет $t=t_0$. Оно характеризуется неравенством $u_{s-t_0}+v_{t_0} \geqq u_{s-t}+v_t$ для всех $t$. Это должно быть установлено только для $t \neq t_0$, и мы можем устанавливать это для случаев $t \gtrless t_0$ по отдельности. Эти неравенства можно переписать так:

(61:12) $$u_{s-t_0}-u_{s-t} \geqq v_t - v_{t_0} \quad \text{для } t > t_0,$$

(61:13) $$u_{s-t}-u_{s-t_0} \leqq v_{t_0} - v_t \quad \text{для } t < t_0.$$

Положив в (61:12) $t=t_0+1$ (кроме того случая, когда $t_0=s$ и (61:12) неверно), мы получим

(61:14) $$u_{s-t_0}-u_{s-t_0-1} \leqq v_{t_0+1}-v_{t_0},$$

а положив в (61:13) $t=t_0-1$ (кроме $t_0=0$, когда (61:13) утрачивает смысл), мы будем иметь

(61:15) $$u_{s-t_0+1}-u_{s-t_0} \leqq v_{t_0}-v_{t_0-1}.$$

Заметим, что (61:12) и (61:13) (кроме случаев $t=t_0 \pm 1$, которые ведут к (61:14) и (61:15)) могут быть записаны следующим образом:

(61:16) $$\sum_{i=t_0+1}^{t} (u_{s-i+1}-u_{s-i}) \geqq \sum_{j=t_0+1}^{t} (v_j - v_{j-1}) \quad \text{для } t > t_0,$$

(61:17) $$\sum_{i=t+1}^{t_0} (u_{s-i+1}-u_{s-i}) \leqq \sum_{j=t+1}^{t_0} (v_j - v_{j-1}) \quad \text{для } t < t_0.$$

В общем случае мы можем сказать, что (61:14) и (61:15) лишь необходимы, тогда как (61:16) и (61:17) необходимы и достаточны. Однако мы можем теперь ввести предположение об *убывающей полезности*, т. е. о том, что полезность каждой добавляемой единицы убывает, в то время

[1]) Игрок 1 — требованием неприемлемо высокой цены, а игрок 2 — отклонением любого предложения.

как общее имущество возрастает для обоих участников 1, 2. Формально это выглядит так:

(61:18) $$u_1 - u_0 > u_2 - u_1 > \ldots > u_s - u_{s-1},$$

(61:19) $$v_1 - v_0 > v_2 - v_1 > \ldots > v_s - v_{s-1}.$$

Отсюда следует, что

(61:20) $$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\sum_{i=t_0-1}^{t} (u_{s-i+1} - u_{s-i}) \geqq (t - t_0)(u_{s-t_0} - u_{s-t_0-1}), \\ &\sum_{j=t_0+1}^{t} (v_j - v_{j-1}) \leqq (t - t_0)(v_{t_0+1} - v_{t_0}) \end{aligned}\right\} \text{ для } t > t_0, \\ \left.\begin{aligned} &\sum_{i=t+1}^{t_0} (u_{s-i+1} - u_{s-i}) \leqq (t_0 - t)(u_{s-t_0+1} - u_{s-t_0}), \\ &\sum_{j=t+1}^{t_0} (v_j - v_{j-1}) \geqq (t_0 - t)(v_{t_0} - v_{t_0-1}) \end{aligned}\right\} \text{ для } t < t_0. \end{cases}$$

Поэтому теперь из (61:16) и (61:17) следуют (61:14) и (61:15). Значит, (61:14) и (61:15) также необходимы и достаточны. Объединяя (61:14) и (61:15) с частью (61:18) и (61:19), мы можем также написать:

(61:21) каждая из разностей $u_{s-t_0} - u_{s-t_0-1}$, $v_{t_0} - v_{t_0-1}$ больше, чем каждая из разностей $u_{s-t_0+1} - u_{s-t_0}$, $v_{t_0+1} - v_{t_0}$ [1]).

В соответствии с обычным представлением максимизирующее $t = t_0$ есть число фактических обмененных единиц. Мы показали, что оно характеризуется соотношениями (61:21), и читатель может убедиться, что (61:21) есть в точности определение «маргинальных пар», данное Бем-Баверком [2]).

Итак, мы видим следующее:

(61:A) Объем сделки, т. е. число $t_0$ обмененных единиц определяется в соответствии с критерием «маргинальных пар» Бем-Баверка.

Итак, мы можем сказать, что в нашей теории воспроизводятся результаты, естественные с точки зрения здравого смысла.

Можно отметить в заключение, что случай, когда игра оказывается несущественной, имеет простое истолкование. Несущественность означает здесь

$$\mathrm{v}((1, 2)) = \mathrm{v}((1)) + \mathrm{v}((2)),$$

т. е. ввиду (61:9) — равенство в (61:11). Для (61:9) и (61:10) это означает, что максимум в последнем достигается при $t = 0$, т. е. $t_0 = 0$. Итак, мы видим:

(61:B) Наша игра несущественна тогда и только тогда, когда никакого обмена не происходит, т. е. когда $t_0 = 0$ [3]).

---

[1]) Сравнение первого члена из первой группы со вторым из второй дает (61:14); аналогичное сравнение второго с первым есть (61:15). Сравнение первого с первым дает неравенство из (61:18), а второго со вторым — из (61:19).

[2]) E. von Böhm-Bawerk, Positive Theorie des Kapitals, 4-th Edit, Jena 1921, стр. 266 и след.

[3]) Заметим, что в нашей прежней модели из п. 61.2.2 мы принуждали к совершению обмена требованием (61:1). В данном случае обе возможности остаются открытыми.

### 61.6. Цена. Обсуждение

**61.6.1.** Перейдем теперь к определению цены в этой модели. Для того чтобы пояснить это понятие, надо сначала рассмотреть более подробно единственное решение этой игры, как это было сделано в п. 60.2.2.

Данная модель математически не является более общей, чем исследованная в пп. 61.2—61.4. Обе они представляют существенную общую игру двух лиц, а мы знаем, что имеется только одна такая игра. Тем не менее старая модель является частным случаем новой и притом тем, который соответствует $s=1$. Эта разница почувствуется, когда мы перейдем к интерпретации.

Сравнение (61:5) и (61:6) из п. 61.3.3 с (61:9) и (61:10) из п. 61.5.2 показывает, что математическое совпадение этих моделей заключается в возможности замены $u$ и $v$ на соответствующие им величины

(61:22) $$u=u_s,\quad v=\max_{t=0,\,1,\,\ldots,\,s}(u_{s-t}+v_t).$$

Решение (единственное) состоит, следовательно, из всех дележей

$$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\ \alpha_2\}\},$$

удовлетворяющих условиям (61:3) и (61:4) из п. 61.3.3. В терминах $\alpha_2$ это означает, что

(61:23) $$0\leqq\alpha_2\leqq v-u$$ [1].

Сформулируем это теперь в терминах обычного понятия цены — вместо терминологии дележей, которые в нашей теории являются основным способом выражения [2]. Ввиду найденного в п. 61.5.3 покупателю 2 будут переданы $t_0$ единиц. Поэтому должно быть

(61:24) $$v_{t_0}-t_0p=\alpha_2,$$

если уплачивалась цена $p$ за каждую единицу. Следовательно, (61:23) означает, в терминах $p$, что

(61:25) $$\frac{1}{t_0}(u_s-u_{s-t_0})\leqq p\leqq\frac{1}{t_0}v_{t_0}$$ [3].

Это можно переписать как

(61:26) $$\frac{1}{t_0}\sum_{i=1}^{t_0}(u_{s-i+1}-u_{s-i})\leqq p\leqq\frac{1}{t_0}\sum_{j=1}^{t_0}(v_j-v_{j-1}).$$

**61.6.2.** Итак, границы в (61:26) совсем не те, что даются теорией Бем-Баверка. В соответствии с этой теорией цена должна быть заключена между полезностями двух «маргинальных пар» (61:21) из п. 61.5.3, т. е. лежать в интервале

(61:27) $$\begin{Bmatrix}u_{s-t_0+1}-u_{s-t_0}\\ v_{t_0+1}-v_{t_0}\end{Bmatrix}\leqq p\leqq\begin{Bmatrix}u_{s-t_0}-u_{s-t_0-1}\\ v_{t_0}-v_{t_0-1}\end{Bmatrix}.$$

---

[1] Мы могли бы также взять за основу $\alpha_1$, но в случае рынка трех лиц данная процедура лучше подходит для повторения.

[2] Стоит еще раз подчеркнуть: это — интерпретация, но не сама теория!

[3] Заметим, что по (61:22) должно быть $n=u_s$, $v=u_{s-t_0}+v_{t_0}$.

Это можно также переписать как

(61:28) $$\max(u_{s-t_0+1} - u_{s-t_0},\ v_{t_0+1} - v_{t_0}) \leqq p \leqq$$
$$\leqq \min(u_{s-t_0} - u_{s-t_0-1},\ v_{t_0} - v_{t_0-1}).$$

Для того чтобы установить связь этого интервала с (61:26), удобно построить еще один интервал:

(61:29) $$u_{s-t_0+1} - u_{s-t_0} \leqq p \leqq v_{t_0} - v_{t_0-1}.$$

Из двух последних неравенств (61:20) из п. 61.5.3 (при $t_0 = 0$) следует, что нижний предел (61:29) $\geqq$ нижнему пределу (61:26) и что верхний предел (61:29) $\leqq$ верхнему пределу (61:26). Следовательно, интервал (61:29) содержится в интервале (61:26). Далее, (61:29), очевидно, содержит интервал (61:27), т. е. (61:28). Следовательно, каждый из интервалов (61:26), (61:29), (61:28) содержит последующий.

Таким образом, мы видим:

(61:C) Цена $p$ за единицу товара ограничена интервалом (61:26), в то время как теория Бем-Баверка ограничивает ее более узким интервалом (61:28).

**61.6.3.** Два результата (61:A) и (61:C) дают точную картину отношения нашей теории в данном ее приложении к представлениям здравого смысла [1]). Они показывают, что имеется полное согласие по вопросу о действии, т. е. о том, какое число единиц будет обменено, и расхождение наблюдается лишь в условиях, при которых это действие происходит, т. е. в цене одной единицы. Именно, наша теория допускает более широкие пределы для цены, чем обычная точка зрения.

То, что различие должно появляться именно здесь и именно в этом, легко можно понять. Наша теория существенно зависит (в числе прочего) от предположения о наличии полного механизма компенсаций между игроками. Они составляются из возможных выплат разного рода премий или скидок, связанных с различными передаваемыми единицами. Теперь узкий интервал (определенный Бем-Баверком посредством «маргинальных пар») для цены при обычной точке зрения известным образом зависит от существования единственной цены, одинаково подходящей для всех происходящих обменов. Так как мы в действительности допускаем премии и скидки, как это было указано выше, единственность исчезает.

Наша цена за единицу есть всего лишь средняя цена (фактически она определяется как среднее в (61:24) из п. 61.6.1), и, следовательно, совершенно естественно, что мы получили более широкий интервал, чем определяемый «маргинальными парами».

В заключение заметим, что такие ненормальности в образовании структуры цены согласуются также с тем фактом, что рассматриваемый рынок является рынком с двусторонней монополией.

---

[1]) Мы берем трактовку Бем-Баверка как представителя этой точки зрения. Взгляды на этот предмет большинства других исследователей, начиная с Карла Менгера, по существу, те же самые.

# § 62. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ $n = 3$; ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

## 62.1. Случай $n = 3$; частный случай. Рынок трех лиц

**62.1.1.** Рассмотрим, наконец, $n = 3$. Мы предполагаем получить некоторую интерпретацию в том же смысле, что и в п. 61.2.1. Мы сделаем это, расширяя модель п. 61.2.2 для двух лиц до рынка трех лиц.

Как мы уже отмечали, такие рассуждения не могут не оказаться исчерпывающими, так как существует всего лишь одна существенная общая игра трех лиц. С другой стороны, мы знаем, что существенные общие игры трех лиц образуют трехпараметрическое семейство, и подробное исследование в п. 60.3.2 заставляет нас различать многочисленные возможности [1]). В соответствии с этим для описания всех вариантов существенной общей игры трех лиц требуется несколько моделей. Мы ограничимся рассмотрением одного типичного класса. Полное исследование было бы несколько длинно и не внесло бы пропорционального вклада в понимание теории, хотя оно и не представило бы каких-либо дополнительных трудностей.

**62.1.2.** Итак, рассмотрим рынок трех лиц, состоящий из продавца и двух покупателей. Рынок с двумя продавцами и одним покупателем приводит к той же математической модели и к соответствующим заключениям. Для определенности мы рассмотрим первый вариант задачи и предоставим читателю провести параллельное изучение второго.

Тремя участниками являются 1, 2, 3 — продавец 1 и (возможные) покупатели 2 и 3. Мы последовательно рассмотрим частный случай, соответствующий п. 61.2.2, а затем более общий, соответствующий п. 61.5.2. В противоположность тому, что было там, здесь второй случай фактически окажется обобщением первого.

Начнем с модели п. 61.2.2. Сделка, которую мы рассматриваем, состоит в продаже игроком 1 одной (неделимой) единицы $A$ некоторого товара одному из игроков 2 и 3. Обозначим полезность $A$ для 1 через $u$, для 2 через $v$ и для 3 через $w$.

Для того чтобы сделка имела смысл для всех участников, полезность $A$ для каждого покупателя должна быть больше, чем для продавца. Далее, кроме того случая, когда 2 и 3 находятся в абсолютно равном положении, один из них сильнее другого, т. е. может извлечь бо́льшую пользу из обладания $A$. Мы можем предположить, что в данном случае более сильным покупателем является 3. Эти предположения означают, что

$$u < v \leqq w. \tag{62:1}$$

Как и в пп. 61.2.2 и 61.5.2, мы используем начальное положение каждого покупателя в качестве нуля его полезности.

Как и в п. 61.5, здесь нет необходимости повторять рассуждения пп. 61.2.2 и 61.3 относительно правил игры, которая моделирует эту ситуацию.

Легко показать, что характеристическая функция должна быть следующей. Так как каждый покупатель может отказаться покупать товар, а продавец, так же как и оба покупателя вместе, может вообще

---

[1]) Два основных случая (a) и (b), причем второй подразделен на четыре подслучая, представлены на рис. 70—73.

воспрепятствовать какой-либо сделке (см. п. 61.5.2), мы получаем, как и в п. 61.3.3, что

(62:2) $$\mathrm{v}((1)) = u,\ \mathrm{v}((2)) = \mathrm{v}((3)) = 0,$$

(62:3) $$\mathrm{v}((1,\ 2)) = v,\ \mathrm{v}((1,\ 3)) = w,\ \mathrm{v}((2,\ 3)) = 0,$$

(62:4) $$\mathrm{v}((1,\ 2,\ 3)) = w\,[1].$$

Так как $\mathrm{v}(S)$ — характеристическая функция, она должна удовлетворять неравенствам (57:2:a) и (57:2:c) из п. 57.2.1. Проверка этого не вызывает больших трудностей, и мы предоставим ее читателю.

По происхождению игра, которой соответствует эта $\mathrm{v}(S)$, не является игрой с постоянной суммой [2]; тем более она существенна.

## 62.2. Предварительное обсуждение

**62.2.** Мы можем теперь применить к нахождению всех решений нашей задачи результаты, полученные в п. 60.3 для существенной общей игры трех лиц. Мы снова проследим связь математических выводов с теми, которые получаются при рассуждениях на основе простого здравого смысла.

Согласие здесь окажется в некотором смысле даже лучшим, чем в пп. 61.5.2—61.6.3. Именно, границы для цены будут теми же самыми при обоих методах. Возможно, это следует приписать тому факту, что мы теперь имеем дело только с одной единицей, так же как в п. 61.2.2. Когда мы перейдем к $s$ единицам в пп. 63.1—63.6, снова возникнут осложнения, как и в пп. 61.5.2—61.6.3.

Однако, кроме указанного сходства, появится еще некоторое качественное расхождение между нашей теорией и обычной точкой зрения. Мы увидим, что это вызвано возможностью образования коалиций. Эта возможность впервые становится реальностью для игр с тремя участниками, и следует ожидать, что наша теория это учтет, в то время как обычная точка зрения, как правило, этим пренебрегает. Таким образом, эти расхождения с точки зрения нашей теории оказываются вполне оправданными.

## 62.3. Решения. Первый подслучай

**62.3.1.** Мы приступим к применению сказанного в пп. 60.3.1 и 60.3.2 к заданной равенствами (62:2) — (62:4) характеристической функции $\mathrm{v}(S)$.

Дележи в этом случае имеют вид

$$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}\},$$

где

(62:5) $$\alpha_1 \geqq u,\ \alpha_2 \geqq 0,\ \alpha_3 \geqq 0,$$

(62:6) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = w.$$

Для того чтобы применить пп. 60.3.1 и 60.3.2, необходимо привести характеристическую функцию к редуцированной форме и затем пронормировать ее с $\gamma = 1$.

---

[1]) Конечно, здесь использованы неравенства $u < v \leqq w$.

[2]) Доказательство (57:20) из п. 57.5.2 нарушается, например, при

$$\mathrm{v}((1)) + \mathrm{v}((2,\ 3)) = u < w = \mathrm{v}((1,\ 2,\ 3)).$$

Первая операция соответствует замене $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$:

$$\alpha_k' = \alpha_k + \alpha_k^0, \tag{62:7}$$

как упоминалось в п. 57.5.1 и обсуждалось в пп. 31.3.2 и 42.4.2. Числа $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0$ находятся, как это описано в выводе (59:A) из п. 59.2.1. Именно

$$\alpha_1' = \alpha_1 - \frac{w+2u}{3}, \quad \alpha_2' = \alpha_2 - \frac{w-u}{3}, \quad \alpha_3' = \alpha_3 - \frac{w-u}{3}. \tag{62:8}$$

Соответствующие изменения $v(S)$ даются формулами (59:1) в п. 59.2.1; они превращают (62:2) — (62:4) в

$$v'((1)) = v'((2)) = v'((3)) = -\frac{w-u}{3} \tag{62:9}$$

$$\left\{\begin{aligned} v'((1, 2)) &= \frac{3v-2w-u}{3}, \\ v'((1, 3)) &= \frac{w-u}{3}, \\ v'((2, 3)) &= -\frac{2(w-u)}{3}, \end{aligned}\right. \tag{62:10}$$

$$v'((1, 2, 3)) = 0. \tag{62:11}$$

Итак, $\gamma = \frac{w-u}{3}$, и вторая операция состоит в делении всех выражений на это число. Вместо этого мы предпочтем применить пп. 60.3.1, 60.3.2 непосредственно, вставляя везде (где предполагается $\gamma = 1$) множитель $\frac{w-u}{3}$ [1].

Сравнение с (60:8) из п. 60.3.1 показывает, что

$$\alpha_1 = -\frac{2(w-u)}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{w-u}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{3v-2w-u}{3}.$$

Шесть прямых (60:15) из п. 60.3.2, характеризующих треугольник, из которого мы вывели наши решения, превращаются в

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_1' = -\frac{w-u}{3}, \quad \alpha_2' = -\frac{w-u}{3}, \quad \alpha_3' = -\frac{w-u}{3}\ ^{2)}, \\ &\alpha_1' = \frac{2(w-u)}{3}, \quad \alpha_2' = -\frac{w-u}{3}, \quad \alpha_3' = -\frac{3v-2w-u}{3}\ ^{3)}. \end{aligned}\right. \tag{62:12}$$

**62.3.2.** Мы можем теперь исследовать эту конфигурацию в духе п. 60.3.3. Ясно, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = v - w \leqq 0.$$

Следовательно, мы имеем (60:17:b), т. е. случай (b) из этого пункта; нам остается решить, какой из его четырех подслучаев, представленных рис. 70—73, имеет место. Обратимся поэтому к графическому представлению.

---

[1]) Этот процесс аналогичен использованному при исследовании существенных игр трех лиц с нулевой суммой с избытком в § 47, в частности, в пп. 47.2.2 и 47.3.2 (случай (III)), 47.4.2 (некоторая фаза случая (IV)).

[2]) $-1$ в (60:15) соответствует $-\gamma$; поэтому мы должны все умножить, как уже было сказано, на $\frac{w-u}{3}$.

[3]) $-a_1, -a_2, -a_3$ в (60:15), которые появляются и здесь, уже включают множитель $\frac{w-u}{3}$.

Для этого представления мы используем, как и прежде, плоскость рис. 32. Изображая шесть прямых (62:12) так же, как были изображены (60:15) из п. 60.3.2 на рис. 70—73, мы получим рис. 74. Качественные черты этого рисунка вытекают из следующих рассуждений:

(62:A:a) Вторая $\alpha'_1$-прямая проходит через пересечение первых $\alpha'_2$- и $\alpha'_3$-прямых. Действительно,

$$\frac{2(w-u)}{3}-\frac{w-u}{3}-\frac{w-u}{3}=0.$$

(62:A:b) Обе $\alpha'_2$-прямые совпадают.

(62:A:c) Вторая $\alpha'_3$-прямая левее, чем первая. Действительно, ей соответствует большее значение $\alpha'_3$, так как

$$-\frac{3v-2w-u}{3}+\frac{w-u}{3}=w-v\geqq 0.$$

Сравнение этого рисунка с рис. 70—73 показывает, что он является повернутой и выродженной формой рис. 72 [1]): область *5* вырождается в точку (верхняя вершина основного треугольника $\Delta$), площади *1*, *7* также вырождаются, но уже в два отрезка (верхняя и нижняя части основного треугольника $\Delta$), в то время как области *6*, *2* сохраняются

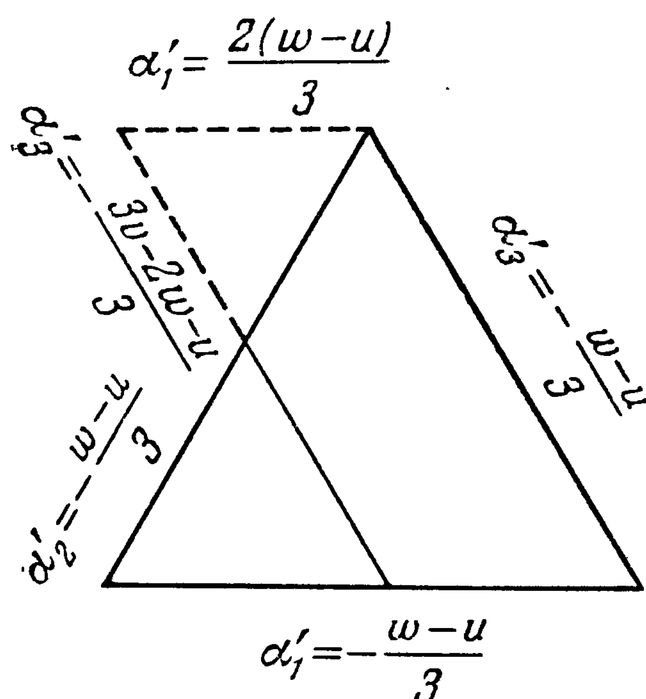



Рис. 74.

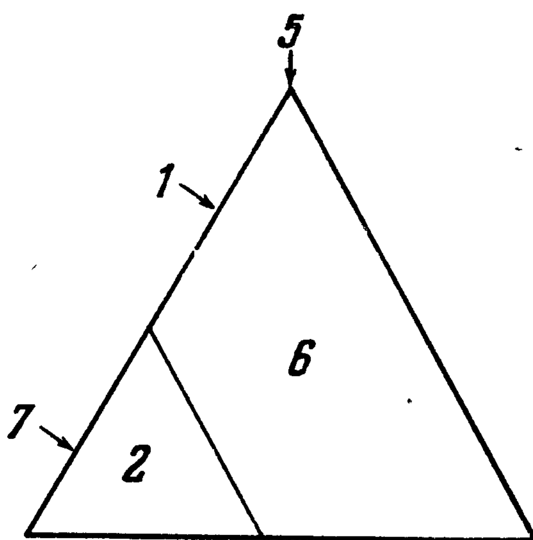



Рис. 75.

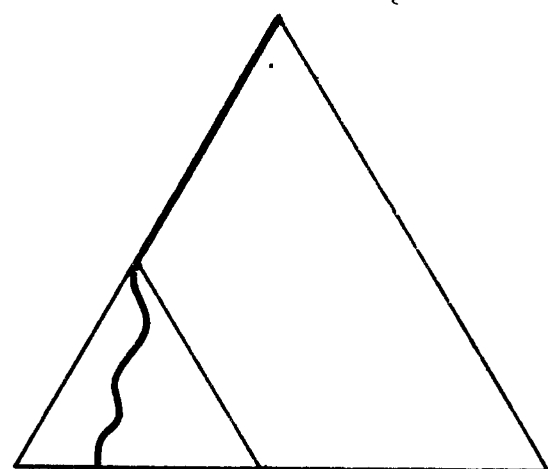


Рис. 76.

(трапеция и меньший треугольник, на которые разделен фундаментальный треугольник $\Delta$ на нашем рисунке). Расположение пяти областей рис. 72 показано на рис. 75. Теперь мы получим общее решение **V**, как указано в конце п. 60.3.3, перенесением картины на рис. 65 в ситуацию, описанную рис. 75. На рис. 76 показан результат [2]) (**V** — отрезок и кривая).

## 62.4. Решения. Общая форма

**62.4.** Прежде чем переходить к дальнейшему, заметим, что рис. 75, вообще говоря, соответствует предположению

(62:13) $$u<v\leqq w,$$

---

[1]) По этому поводу и по поводу следующего дальше замечания см. замечание на стр. 556.

[2]) Кривая на рис. 76 подобна кривой на рис. 65; она удовлетворяет условиям (47:6) из п. 47.5.5.

однако на рисунке изображен случай

(62:14) $$v < w.$$

Когда

(62:15) $$v = w,$$

область 1 на рис. 75, т. е. верхний интервал левой стороны фундаментального треугольника, вырождается в точку (см. (62:A:c) в п. 62.3.2). Следовательно, в этом случае рис. 76 превращается в рис. 77.

Эти рассуждения можно применять совершенно симметрично по отношению к игрокам 2 и 3 (двум покупателям), следующим образом.

Предполагая (62:14) или (62:15), мы можем заменить (62:13) на более слабое условие

(62:16) $$u < v,\ w.$$

Предположим теперь, что выполняется только (62:16), но не (62:13) с (62:14) и (62:15). Это означает, что каждый покупатель извлекает бо́льшую пользу из обладания $A$, чем продавец, однако не фиксирует взаимного расположения покупателей. (См. первую часть п. 62.1.2.)

Теперь (62:16) оставляет открытыми три возможности: (62:14), (62:15) и

(62:17) $$v > w.$$

Решения для (62:14) и (62:15) изображены на рис. 76, 77. (62:17) получается из (62:14) перестановкой игроков 2 и 3 (двух покупателей) и чисел

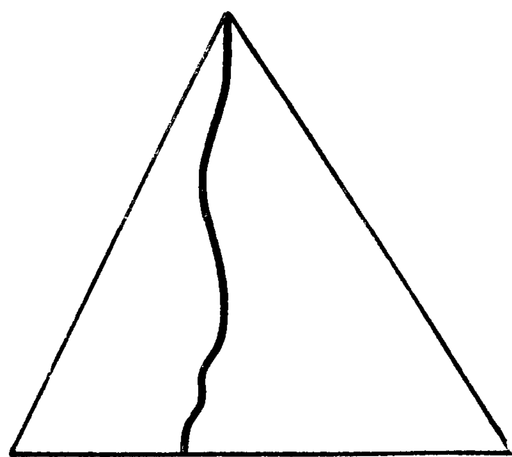


Рис. 77.

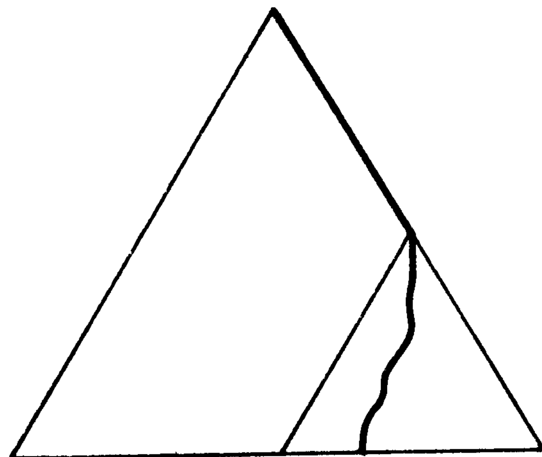


Рис. 78.

$v$ и $w$. Это означает, что рис. 76 надо отразить от его вертикальной оси симметрии (после перестановки $v$ и $w$). Это показано на рис. 78.

Суммируем сказанное.

(62:B) Если предполагать (62:16), то общее решение **V** приведено на рис. 76, 77, 78 соответственно для случаев $v <, =, > w$.

### 62.5. Алгебраическая форма результата

**62.5.1.** Результат, представленный рис. 76, алгебраически может быть выражен так [1]):

Решение **V** состоит из верхней части левой стороны фундаментального треугольника и кривой.

Первая часть **V** характеризуется соотношениями

$$\alpha_2' = -\frac{w-u}{3}, \quad -\frac{3v-2w-u}{3} \geqq \alpha_3' \geqq -\frac{w-u}{3}.$$

[1]) Заметим, что это справедливо, если только $v \leqq w$, и не противоречит (62:B).

Ввиду (62:6) из п. 62.3.1 это означает, что

$$\alpha_2 = 0, \quad w - v \geqq \alpha_3 \geqq 0.$$

Теперь (62:6) из п. 62.3.1 дает нам

$$\alpha_1 = w - \alpha_3.$$

Следовательно, приведенные выше условия можно переписать:

(62:18) $$v \leqq \alpha_1 \leqq w, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = w - \alpha_1.$$

Вторая часть **V** (кривая) соединяет наименьшее $\alpha'_1$ из первой части с абсолютным минимумом $\alpha'_1 \left(-\frac{w-u}{3}\right)$. Ее геометрическая форма (см. (47:6) из п. 47.5.5) характеризуется тем, что вдоль нее $\alpha'_2$ и $\alpha'_3$ являются монотонно убывающими функциями от $\alpha'_1$. Мы можем снова перейти от $\alpha'_1$, $\alpha'_2$, $\alpha'_3$ к $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ по (62:8) из п. 62.3.1. Тогда $\alpha_1$ изменяется от своего минимального значения из (62:18) ($v$) до своего абсолютного минимума ($u$), и $\alpha_2$, $\alpha_3$ снова являются монотонно убывающими функциями от $\alpha_1$. Итак, мы имеем:

(62:19) $u \leqq \alpha_1 \leqq v$; $\alpha_2$, $\alpha_3$ — монотонно убывающие функции $\alpha_1$ [1,2].

Итак, общее решение **V** есть объединение двух множеств, заданных соотношениями (62:18) и (62:19). Заметим, что функции, фигурирующие в (62:19), произвольны (в некоторых пределах), но что определенное решение (т. е. определенная норма поведения) соответствует определенному выбору этих функций. Эта ситуация вполне аналогична описанной в (47:A) из п. 47.8.2 и в п. 55.12.4.

**62.5.2.** Соотношения (62:18) и (62:19) могут быть использованы для всех случаев $v \leqq w$ (см. сноску 1 на стр. 571). Для $v = w$ (62:18) упрощается:

(62:20) $$\alpha_1 = v_1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Мы будем поэтому использовать (62:18) и (62:19) только при $v < w$ и (62:20), (62:19) при $v = w$ [3].

Если $v > w$. то мы можем использовать (62:18) и (62:19), переставив игроков 2 и 3 (покупателей), а также $v$ и $w$. Тогда (62:18), (62:19) превращаются в

(62:21) $$w \leqq \alpha_1 \leqq v, \quad \alpha_2 = v - \alpha_1, \quad \alpha_3 = 0,$$

(62:23) $u \leqq \alpha_1 \leqq w$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ — монотонно убывающие функции $\alpha_1$ [4].

Замечание. Заметим, что указанная выше перестановка превращает (62:4) из п. 62.1.2 в

(62:22) $$\mathrm{v}\,((1,\ 2,\ 3)) = v,$$

и (62:6) из п. 62.3.1 в

(62:6*) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = v.$$

---

[1]) Они должны, конечно, удовлетворять соотношениям (62:5) и (62:6) из п. 62.3.1.

[2]) Как показывает рис. 76, самая низкая точка прямых совпадает с самой высокой точкой кривой, т. е. точка $\alpha_1 = v$ из (62:18) и (62:19) одна и та же.

Следовательно, можно исключить $\alpha_1 = v$ из одного (но не из обоих!) выражений (62:18) или (62:19).

[3]) Замечание в сноске 2, касающееся (62:18) и (62:19), применимо также к (62:20) и (62:19). Поэтому мы можем вовсе опустить (62:20), но в целях интерпретации п. 62.6 это условие удобно сохранить.

[4]) Замечание в сноске 2, касающееся (62:18), (62:19), применимо и к (62:21), (62:22). Конечно, мы должны заменить $v$ на $w$.

Суммируя сказанное, мы получаем:

(62:C) Если предположить (62:16), то общее решение описывается условиями (62:18), (62:19); (62:20), (62:19); (62:21), (62:23) соответственно для случаев $v <, =, > w$.

### 62.6. Обсуждение

**62.6.1.** Для того чтобы связать полученные выводы с математическими результатами, сформулированными в (62:C), применим теперь к рынку с одним продавцом и двумя покупателями и с одной неделимой единицей товара обычный, опирающийся на здравый смысл, анализ.

Рассуждения на основе здравого смысла приводят к тому выводу, что мы здесь фактически имеем дело с одним из простейших частных случаев теории «маргинальных пар». Аргументация имеет следующий вид.

Продавец владеет одной неделимой единицей товара, которую мы рассматриваем; имеются также два покупателя. Следовательно, один будет включен в сделку, а другой исключен из нее. Ясно, что более сильный покупатель занимает преимущественное положение, кроме того случая, когда оба имеют одинаковую силу, и в этом случае они оба одинаково могут быть выбраны. В соответствии с этим цена, при которой состоится сделка, будет лежать между полезностями включенного и исключенного из нее покупателей, а если они окажутся одинаковой силы, то цена окажется в точности равной общему значению этих величин. Значение полезности для продавца, которое, как мы должны предполагать для того, чтобы иметь фактически рынок трех лиц, меньше, чем соответствующие значения для обоих покупателей, никак в игре не фигурирует.

В нашей математической формулировке полезности продавца и покупателя суть $u$, $v$, $w$. Сделанное выше замечание означает, что

(62:16) $$u < v,\ w.$$

Утверждения, касающиеся цены, означают, что

(62:24) $$v \leqq p \leqq w \quad \text{при} \quad v < w,$$

(62:25) $$p = v \quad \text{при} \quad v = w,$$

(62:26) $$w \leqq p \leqq v \quad \text{при} \quad v > w.$$

Исключенный покупатель кончает с тем, что он имел вначале, т. е., в нашей системе отсчета, с нулевой полезностью.

Следовательно, это утверждение в точности соответствует (62:18), (62:20), (62:21), как и предусмотрено в (62:C).

До этого места математические результаты согласуются со «здравым смыслом». Но очевидна и граница этого совпадения: (62:C) определяет еще и другие дележи, именно (62:19) и (62:23), которые не затрагиваются проведенными выше обычными рассуждениями.

В чем же значение (62:19) и (62:23)? Не выражают ли они противоречие между нашей теорией и точкой зрения «здравого смысла»?

Легко ответить на эти вопросы и увидеть, что никакого реального противоречия не существует, а (62:19) и (62:23) представляют собой вполне естественное обобщение обычной точки зрения.

**62.6.2.** Сумма $\alpha_1$, полученная продавцом в данном дележе, есть, конечно, цена $p$, рассматриваемая при предложении данного дележа. В (62:19) и (62:23) $\alpha_1$ изменяется от $u$ до $v$ или до $w$ (в зависимости от того,

которое из этих чисел меньше); иными словами, цена изменяется от полезности продавца до полезности более слабого покупателя. Имеется также определенная (монотонная) функциональная зависимость между (переменными) суммами, получаемыми покупателями [1]).

Эти два факта позволяют дать (62:19) и (62:23) следующую словесную интерпретацию. Два покупателя могут образовать коалицию, основанную на определенных правилах разделения между ними полученного дохода, и вступить в соглашение с продавцом. Правила разделения представлены монотонной функцией, описанной в (62:19) и (62:23). Никакое соглашение не может сделать доход продавца меньшим, чем его собственный предел [2]). С другой стороны, цена более высокая, чем предел слабого покупателя, исключает любую возможность для него оказывать влияние на игру.

Особым правилам, содержащимся в (62:19) и (62:23), а также ролям всех участников в таких ситуациях может быть дано более подробное словесное объяснение. Мы не будем здесь этого делать, так как приведенных выше рассуждений достаточно для того, чтобы утверждать основное положение: с одной стороны, (62:18), (62:20) и (62:21) (т. е. верхняя часть V на рис. 76—78) соответствуют конкуренции двух покупателей в сделке, в которой более сильный игрок, если такой существует, уверен в выигрыше. С другой стороны, (62:19) и (62:23) (т. е. нижняя часть V на рис. 76—78, кривые) соответствуют коалиции двух покупателей против продавца.

Итак, оказывается, что классические выводы, по крайней мере в той форме, в какой они применялись в п. 62.6.1, учитывают только первую возможность и не принимают во внимание коалиций. Наша теория, в которую коалиции введены по существу и с самого начала, необходимо отличается в этом отношении: она охватывает обе возможности, она их объединяет как одно целое в решении, которое она дает. Разделение, соответствующее схемам с коалициями и без них, может быть проведено на основе словесных объяснений, по-видимому, лишь для относительно простых игр трех лиц: нет оснований предполагать, что это может быть сделано для всех игр, в то время как математическая теория строго применима во всех ситуациях.

## § 63. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ $n=3$. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

### 63.1. Делимые товары

**63.1.1.** Нам остается обобщить модель игры трех лиц из п. 62.1.2 так же, как была обобщена модель игры двух лиц, рассмотренная в п. 62.2.2, до модели из пп. 61.5.2 и 61.5.3.

Вернемся поэтому к ситуации, описанной в п. 62.1.2: продавец 1 и (возможные) покупатели 2 и 3 на рынке. Мы предполагаем теперь, что в сделке фигурируют часть или все $s$ (неделимых и взаимозаменяемых) единиц $A_1, \ldots, A_s$ некоторого товара. (См. также сноску 1 на стр. 562.) Обозначим полезность $t$ $(=0, 1, \ldots, s)$ этих единиц для 1 через $u_t$, для 2 через $v_t$ и для 3 через $w_t$. Итак, числа

(63:1) $$u_0=0, \ u_1, \ \ldots, \ u_s,$$

[1]) Все эти «суммы» выражены в полезности, которую мы рассматриваем в предположении существования только одной неделимой единицы товара.

[2]) Этот предел есть наилучшее использование им (вместо продажи) товара $A$.

(63:2) $$v_0=0,\quad v_1,\ \ldots,\ v_s,$$

(63:3) $$w_0=0,\quad w_1,\ \ldots,\ w_s$$

описывают полезности этих единиц для каждого участника.

Как и раньше, мы считаем начальную позицию каждого покупателя нулем его полезности.

Как и в пп. 61.5.2, 61.5.3 и 62.1.2, мы не считаем нужным повторять рассуждения пп. 61.2.2, 61.3.1, 61.3.2, касающиеся правил игры, которая моделирует эту ситуацию.

Легко видеть, какой должна быть характеристическая функция этой игры. Так как каждый покупатель может воспрепятствовать продаже товара ему, а продавец, равно как и оба покупателя вместе, могут не допустить вообще любой сделки (см. пп. 61.5.2 и 62.1.2), из этого следует, как и в п. 61.3.3, что

(63:4) $$\mathrm{v}((1))=u_s,\quad \mathrm{v}((2))=\mathrm{v}((3))=0,$$

(63:5) $$\mathrm{v}((2,\ 3))=0.$$

Обозначая число единиц, переданное продавцом 1 покупателям 2 и 3 соответственно через $t$ и $r$, легко найти, что получают остальные коалиции (1, 2), (1, 3), (1, 2, 3), т. е. продавец с одним или двумя покупателями. Знакомые рассуждения дают нам:

(63:6) $$\mathrm{v}((1,\ 2))=\max_{t=0,\ 1,\ldots,\ s}(u_{s-t}+v_t),$$
$$\mathrm{v}((1,\ 3))=\max_{r=0,\ 1,\ldots,\ s}(u_{s-r}+w_r),$$

(63:7) $$\mathrm{v}((1,\ 2,\ 3))=\max_{\substack{t,\ r=0,\ 1,\ldots,\ s\\ t+r\leqq s}}(u_{s-t-r}+v_t+w_r)\ ^{1)}.$$

Это $\mathrm{v}(S)$ является характеристической функцией. Мы предоставляем читателю проверить выполнение неравенств, вытекающих из этого факта.

Исследование того, когда игра является существенной, может быть проведено как и в пп. 61.5.2 и 61.5.3 и тоже предоставляется читателю [2]). Можно определить также, когда один из двух покупателей 2 и 3 становится «болваном» в смысле теории разложения. Мы также не будем этого рассматривать; результаты нетрудно получить, и хотя они не являются неожиданными, но не лишены интереса.

**63.1.2.** Если положить $r=0$ под знаком максимума в (63:7), то это выражение превращается в первый максимум из (63:6). Если же положить далее $t=0$, то оно превращается в $u_s$. В результате каждой из этих операций значение становится $\leqq$, т. е. мы имеем

(63:8) $$\mathrm{v}((1))\leqq\mathrm{v}((1,\ 2))\leqq\mathrm{v}((1,\ 2,\ 3)).$$

Если мы сделаем то же самое для $r$ и $t$ в обратном порядке, то получим таким же образом

(63:9) $$\mathrm{v}((1))\leqq\mathrm{v}((1,\ 3))\leqq\mathrm{v}((1,\ 2,\ 3)).$$

---

[1]) Условие $t+r\leqq s$ под знаком max выражает тот факт, что число $t+r$ проданных единиц не может превосходить числа единиц, первоначально имевшихся у продавца.

[2]) Исследование связи с (62:1) из п. 62.1.2 или с (62:16) из 62.4, когда $s=1$, также может быть легко проделано. Следует вспомнить обсуждение (61:B) в конце п. 61.5.3 и сноску 3 на стр. 564.

Рассмотрим первое неравенство из (63:8). Для того чтобы в нем было равенство, необходимо, чтобы первый максимум в (63:6) достигался при $t = 0$. В свете обычных представлений об этом предмете это означает, что продавец и покупатель 2 в отсутствие покупателя 3 не совершают никаких сделок. Иначе говоря, покупатель 2, в отсутствие покупателя 3, не может заставить рынок функционировать.

Рассмотрим второе неравенство в (63:8). Здесь равенство означает, что максимум в (63:7) достигается при $r = 0$. В соответствии с обычными представлениями это значит, что продавец и покупатель 3 в присутствии покупателя 2 не смогут осуществить сделку. Иначе говоря, покупатель 3 в присутствии покупателя 2 не в состоянии участвовать в рынке.

Объединяя сказанное вместе с соответствующими выводами из (63:9), получающимися перестановкой покупателей 2 и 3, мы получим следующее:

(63:A) Равенство в любом из четырех неравенств (63:8), (63:9) означает некоторую слабость одного из покупателей.

В первом неравенстве (63:8) ((63:9)) это означает, что покупатель 2 (3) в отсутствие покупателя 3 (2) не может заставить рынок функционировать. Во втором неравенстве (63:8) ((63:9)) это означает, что покупатель 3 (2) в присутствии покупателя 2 (3) не в состоянии влиять на рынок.

Действительно интересный случай возникает, очевидно, когда все эти слабости исключены. Следовательно, имеет смысл предполагать, что

(63:B:a) Мы имеем $<$ в первом неравенстве как в (63:8), так и в (63:9).

(63:B:b) Мы имеем $<$ во втором неравенстве как в (63:8), так и в (63:9).

## 63.2. Анализ неравенств

**63.2.1.** Предположим на время, что (63:B:a) выполняется, а (63:B:b) нет. Это означает, что один из игроков абсолютно сильнее второго. Более точно, это значит, что он по крайней мере так же силен, как другой, даже когда он пытается полностью исключить второго покупателя из рынка.

Следовательно, мы можем ожидать в этом случае результатов, которые подобны полученным в пп. 62.1.2—62.5.2, когда имелась лишь одна (неделимая) единица $A$. Таким образом, делимость товара на единицы $A_1, \ldots, A_s$, которую мы здесь имеем, должна теперь сыграть роль.

Это действительно так. Для того чтобы это доказать, введем величины $u$, $v$, $w$ равенствами

(63:10) $$\mathrm{v}((1)) = u, \quad \mathrm{v}((1, 2)) = v, \quad \mathrm{v}((1, 3)) = w.$$

Тогда вторые неравенства в (63.8) и в (63:9) и отрицание (63:B:b) дают

(63:11) $$\mathrm{v}((1, 2, 3)) = \max(v, w),$$

тогда как первые неравенства в (63:8) и в (63:9) и вместе с (63:B:a) дают

(63:12) $$u < v, w.$$

Теперь мы получили в точности условия из пп. 62.1.2—62.5.2. Именно, (63:12) совпадает с (62:16) из п. 62.4, а (63:4) и (63:10) дают (62:2) и (62:3) из п. 62:1.2 и, наконец, (63:11) дает (62:4) из п. 62.1.2 (когда $v \geqq w$) или (62:22) из п. 62.5.2 (когда $v \leqq w$).

Следовательно, результаты пп. 62.4 и 62.5.2 с $u$, $v$, $w$ из (63:10) справедливы. Общее решение получается, как это описано, например, в (62:B) из п. 62.4, в соответствии с рис. 76—78.

**63.2.2.** С этого момента мы будем предполагать, что выполняется как (63:B:a), так и (63:B:b).

Введем величины $u$, $v$, $w$, $z$ равенствами

(63:13) $$\mathrm{v}((1)) = u, \quad \mathrm{v}((1, 2)) = v, \quad \mathrm{v}((1, 3)) = w,$$

(63:14) $$\mathrm{v}((1, 2, 3)) = z.$$

Тогда из (63:8) и (63:9), а также из (63:B:a) и (63:B:b) следует, что

(63:15) $$u < \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} < z.$$

Это представление отличается от представления игры в п. 62.1.2, но тем не менее имеет смысл сравнить их в деталях: (63:15) соответствует (62:1) и (63:4), а (63:13) и (63:14) соответствуют (62:2) — (62:4).

Удобно ввести снова предположение об *убывающей полезности*, уже использованное в пп. 61.5.2, 61.5.3. Нам сейчас это понадобится на более ранней стадии, чем это было там; это предположение теперь (по крайней мере частично) полезно и для математической части теории [1]), в то время как раньше оно было нужно только в целях интерпретации.

Мы считаем, что полезность убывает для всех трех участников 1, 2, 3:

(63:16) $$u_1 - u_0 > u_2 - u_1 > \ldots > u_s - u_{s-1},$$

(63:17) $$v_1 - v_0 > v_2 - v_1 > \ldots > v_s - v_{s-1},$$

(63:18) $$w_1 - w_0 > w_2 - w_1 > \ldots > w_s - w_{s-1}.$$

Немедленного применения потребует только (63:16). Оно дает нам

(63:19) $$v + w > z + u \; ^{2)}.$$

Доказательство. Принимая во внимание (63:6) и (63:7), а также (63:13) и (63:14), предположение (63:19) можно записать следующим образом:

$$\max_{t=0,1,\ldots,s} (u_{s-t} + v_t) + \max_{r=0,1,\ldots,s} (u_{s-r} + w_r) > \max_{\substack{t,\, r=0,\,1,\,\ldots,\,s \\ t+r \leqq s}} (u_{s-t-r} + v_t + w_r) + u_s.$$

Рассмотрим те $t$ и $r$, для которых достигается максимум в правой части. Так как мы имеем (63:B:b), т. е. знак $>$ во вторых неравенствах (63:8) и (63:9), мы можем заключить, пользуясь аргументацией из п. 63.1.2, что эти $t$, $r \neq 0$. Обозначим их через $t_0$ и $r_0$. Следовательно, наше предположение превращается в

$$\max_{t=0,1,\ldots,s} (u_{s-t} + v_t) + \max_{r=0,1,\ldots,s} (u_{s-r} + w_r) > u_{s-t_0-r_0} + v_{t_0} + w_{r_0} + u_s,$$

---

1) Но не необходимо; отсутствие этого свойства только слегка усложнило бы рассуждения.

2) В п. 62.1.2 это выполнялось тривиально. В самом деле, из (63:13) и (63:14 мы получаем, что в этом случае

$$u < v \leqq w = z,$$

откуда немедленно следует (63:19).

т. е. мы требуем, чтобы существовали такие $t$ и $r$, чтобы было

$$u_{s-t}+v_t+u_{s-r}+w_r>u_{s-t_0-r_0}+v_{t_0}+w_{r_0}+u_s.$$

Это действительно выполняется для $t=t_0$ и $r=r_0$. Последнее неравенство может быть тогда переписано как

(63:20) $$u_{s-r_0}-u_{s-t_0-r_0}>u_s-u_{s-t_0}.$$

По смыслу должно быть ясно, что это следует из предположения убывающей полезности. Формально мы это получаем из (63:16) следующим образом: (63:20) означает, что

(63:21) $$\sum_{i=1}^{t_0}(u_{s-r_0-i+1}-u_{s-r_0-i})>\sum_{i=1}^{t_0}(u_{s-i+1}-u_{s-i});$$

из (63:16) следует

$$u_{s'}-u_{s'-1}>u_{s''}-u_{s''-1},$$

как только $s'<s''$; следовательно, в частности,

$$u_{s-r_0-i+1}-u_{s-r_0-i}>u_{s-i+1}-u_{s-i},$$

и из этого следует (63:21).

## 63.3. Предварительное обсуждение

**63.3.** Мы теперь применим к данной ситуации пп. 60.3 1 и 60.3.2. Это похоже на выводы из п. 62.3 для модели п. 62.1.2. Мы дадим более краткое изложение, и лучше всего читать его параллельно с соответствующими частями п. 62.3.

Как и при сравнении математических результатов с выводами, полученными с помощью здравого смысла, снова применяются замечания из п. 62.2. Мы уже указали там, какие усложнения появляются в данном случае. Мы рассмотрим эту модель кратко, хотя и считаем ее более важной. Общая точка зрения была уже достаточно проиллюстрирована раньше, на более простых примерах, а специальный детальный анализ интерпретации этой модели и других, даже более общих моделей, будет предпринят в последующих публикациях.

## 63.4. Решения

**63.4.1.** Дележи в данном случае суть

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},$$

где

(63:22) $$\alpha_1\geqq u,\quad \alpha_2\geqq 0,\quad \alpha_3\geqq 0,$$

(63:23) $$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=z.$$

Снова необходимо ввести редуцированную форму. Это достигается преобразованием

(63:24) $$\alpha'_k=\alpha_k+\alpha_k^0,$$

которое описано в п. 62.3. Определим $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0$ как там указано, так что (63:24) теперь превращается в

(63:25) $$\alpha'_1=\alpha_1-\frac{z+2u}{3},\quad \alpha'_2=\alpha_2-\frac{z-u}{3},\quad \alpha'_3=\alpha_3-\frac{z-u}{3}.$$

Соответствующие изменения в $\mathrm{v}(S)$ снова даются формулами (59:1) из п. 59.2.1; они превращают (63:4), (63:13), (63:14) соответственно в

(63:26) $$\mathrm{v}'((1)) = \mathrm{v}'((2)) = \mathrm{v}'((3)) = -\frac{z-u}{3},$$

(63:27) $$\mathrm{v}'((1, 2)) = \frac{3v-2z-u}{3}, \quad \mathrm{v}'((1, 3)) = \frac{3w-2z-u}{3}, \quad \mathrm{v}'((2, 3)) = -\frac{2(z-u)}{3},$$

(63:28) $$\mathrm{v}'((1, 2, 3)) = 0.$$

Отсюда следует, что $\gamma = \frac{z-u}{3}$, и мы опять не будем переходить к нормированию $\gamma = 1$.

Следовательно, мы снова должны вводить коэффициент пропорциональности при применении результатов пп. 60.3.1 и 60.3.2, как это было описано в п. 62.3. Этим коэффициентом теперь будет $\frac{z-u}{3}$.

Сравнение с (60:8) из п. 60.3.1 показывает, что теперь

$$a_1 = -\frac{2(z-u)}{3}, \quad a_2 = \frac{3w-2z-u}{3}, \quad a_3 = \frac{3v-2z-u}{3}.$$

Шесть прямых (60:15) из п. 60.3.2, характеризующих треугольник, из которого мы получаем наши решения, превращаются теперь в

(63:29) $$\begin{cases} \alpha'_1 = -\frac{z-u}{3}, & \alpha'_2 = -\frac{z-u}{3}, & \alpha'_3 = -\frac{z-u}{3}, \\ \alpha'_1 = \frac{2(z-u)}{3}, & \alpha'_2 = -\frac{3w-2z-u}{3}, & \alpha'_3 = -\frac{3v-2z-u}{3}. \end{cases}$$

**63.4.2.** Применяя критерий из п. 60.3.3, мы находим, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = v + w - 2z \leqq 0.$$

Следовательно, мы имеем снова (60:17:b), т. е. случай (b), и остается решить, какой из его четырех подслучаев, описываемых на рис. 70—73, имеет место.

Делая такое же графическое представление, как и в п. 62.3, мы получим рис. 79. Качественные особенности этого рисунка становятся ясными из следующего рассуждения.

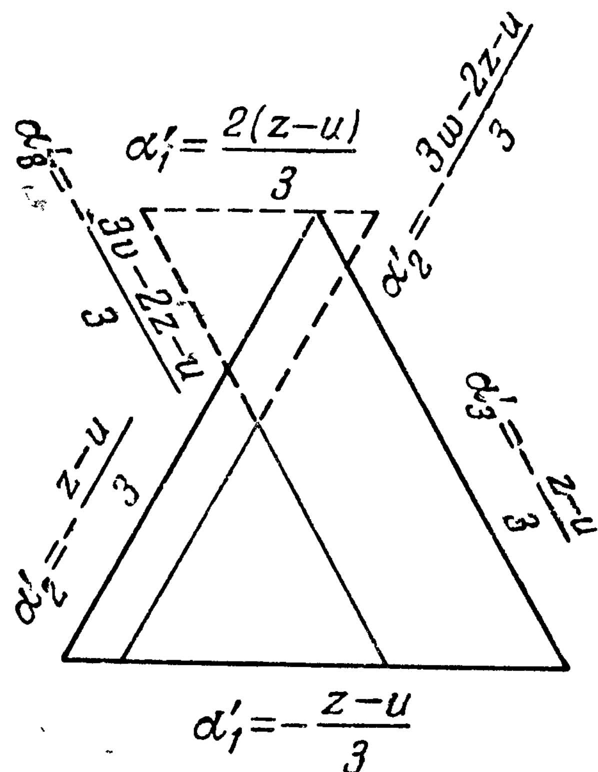


Рис. 79.

(63:C:a) Вторая $\alpha'_1$-прямая проходит через пересечение первых $\alpha'_2$- и $\alpha'_3$-прямых. В самом деле,

$$\frac{2(z-u)}{3} - \frac{z-u}{3} - \frac{z-u}{3} = 0.$$

(63:C:b) Вторая $\alpha'_2$-($\alpha'_3$-) прямая правее (левее) первой.

(63:C:c) Действительно, ей соответствует большее значение $\alpha'_2$ ($\alpha'_3$), так как

$$-\frac{3w-2z-u}{3} + \frac{z-u}{3} = z - w > 0,$$

$$-\frac{3v-2z-u}{3} + \frac{z-u}{3} = z - v > 0.$$

(63:C:d) Первая $\alpha_1'$-прямая лежит ниже, чем пересечение вторых $\alpha_2'$- и $\alpha_3'$-прямых. Действительно,

$$-\frac{z-u}{3}-\frac{3w-2z-u}{3}-\frac{3v-2z-u}{3}=z+u-v-w<0,$$

по (63:19) из п. 63.2.2.

Сравнение этого рисунка с рис. 70—73 показывает, что это опять повернутая и вырожденная форма рис. 72 (см. сноску 1 на стр. 570), хотя и менее вырожденная, чем соответствующая рис. 74 из п. 62.3: область *5* снова вырождена в точку (верхнюю вершину основного треугольника), но области *1*, *2*, *6*, *7* не вырождены (четыре области, на которые

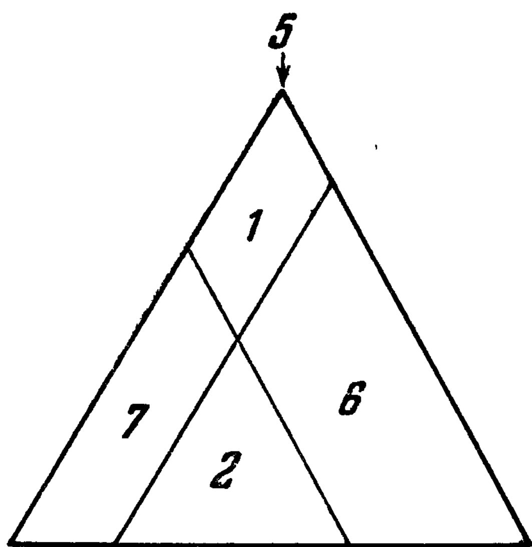
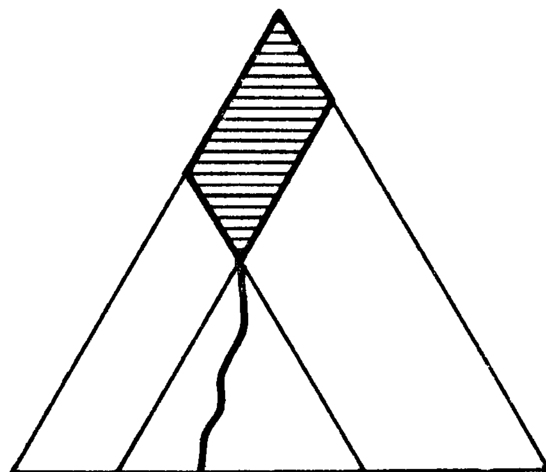


Рис. 80.


Рис. 81.

разделен фундаментальный треугольник на нашем рисунке). Это расположение основных пяти областей рис. 72 показано на рис. 80. Общее решение получается теперь, как это указано в конце п. 60.3.3, перенесением картины, изображенной на рис. 65, в ситуацию, описываемую рис. 81. На рис. 81 показан результат: **V** состоит из заштрихованной области и кривой (см. сноску 2 на стр. 570).

Итак, резюмируем:

(63:D) При предположениях (63:B:a), (63:B:b) и (63:16) общее решение **V** дается рис. 81.

Сравнение этого рисунка с рисунками из п. 62.3, 62.4 показывает, что рис. 81 представляет собой промежуточную форму между рис. 76—78, а те в свою очередь являются вырожденной формой рис. 81.

### 63.5. Алгебраическая форма результата

**63.5.** Результат, выраженный рис. 81, может быть установлен алгебраически так же, как это было сделано в случае рис. 76 в п. 62.5.1.

На рис. 81 решение **V** состоит из заштрихованной области и кривой. Первая из этих частей **V** описывается неравенствами

$$-\frac{3w-2z-u}{3}\geqq\alpha_2'\geqq-\frac{z-u}{3},\quad -\frac{3v-2z-u}{3}\geqq\alpha_3'\geqq-\frac{z-u}{3}.$$

Ввиду (63:25) из п. 63.4.1 это означает, что

$$z-w\geqq\alpha_2\geqq0,\quad z-v\geqq\alpha_3\geqq0.$$

Далее условие (63:23) из п. 63.4.1 дает $\alpha_1=z-\alpha_2-\alpha_3$,

и точными границами для $\alpha_1$ будут

$$v+w-z \leqq \alpha_1 \leqq z.$$

(Вспомним, что $v+w-z>u$ по (63:19) из п. 63.2.2.) Сформулируем эти условия вместе; результат получается несколько более сложный, чем его аналог (62:18) из п. 62.5.1. Вот он:

(63:30) $$\begin{cases} v+w-z \leqq \alpha_1 \leqq z, \quad 0 \leqq \alpha_2 \leqq z-w, \quad 0 \leqq \alpha_3 \leqq z-v, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=z. \end{cases}$$

Границы для $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ в первой строке (63:30) те же самые.

Вторая часть V (кривая) может быть описана дословно как в п. 62.5.1: $\alpha_1$ изменяется от своего минимума из (63:30), т. е. от $(v+w-z)$, до своего абсолютного минимума $(u)$, а $\alpha_2$ и $\alpha_3$ суть монотонно убывающие функции от $\alpha_1$. Таким образом, мы имеем

(63:31) $u \leqq \alpha_1 \leqq v+w-z$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ — монотонно убывающие функции от $\alpha_1$ [1, 2].

Итак, общее решение V есть объединение двух множеств, (63:30) и (63:31). Следует отметить, что роль функции (63:31) исследовалась в конце п. 62.5.1.

Резюмируем:

(63:E) В предположениях (63:B:a), (63:B:b) и (63:16) общее решение V дается выражениями (63:30) и (63:31).

### 63.6. Обсуждение

**63.6.1.** Рассмотрим теперь эквивалент п. 62.6 и применим обычный, основанный на здравом смысле, анализ к рынку с одним продавцом, двумя покупателями и $s$ неделимыми единицами конкретного товара, для того чтобы связать получаемые при этом результаты с математическими, сформулированными в (63:E).

Фактически интерпретация, которая должна быть проведена сейчас, составится из объединения идей пп. 61.5.2—61.6.3 с идеями п. 62.6: первые применяются ввиду наличия делимости товара на $s$ единиц, а последние — ввиду того, что имеется рынок трех лиц. Как было указано в п. 63.3, мы не предполагаем в данном случае вдаваться в детали.

Две части (63:30) и (63:31), из которых состоит решение, весьма напоминают части (62:18) и (62:19) (или (62:20) и (62:19), или (62:21) и (62:23)), полученные в п. 62.5. (Ср. также (63:E) из п. 63.5 с (62.C) из п. 62.5.2.) Следовательно, представляется разумным интерпретировать результаты так же, как это было сделано в соответствующей ситуации в п. 62.6.2: условия (63:30) описывают ситуацию, в которой два покупателя вступают в конкурентную борьбу за $s$ единиц, которыми обладает продавец, в то время как (63:31) описывает ситуацию, в которой они образуют коалицию и встречают продавца объединенными. Для читателя не составит трудностей проделать это подробно, параллельно с п. 62.6.2.

---

[1]) Они должны, конечно, удовлетворять соотношениям (63:22) и (63:23) из п. 63.4.1.

[2]) Как показывает рис. 81, одна из низших точек заштрихованной области совпадает с высшей точкой кривой, т. е. точки $\alpha_1 = v+w-z$ из (63:30) и (63:31) одни и те же.

Следовательно, мы можем исключить совпадающую точку $\alpha_1 = v+w-z$ из одного (но не из обоих!) выражений (63:30) и (63:31).

Если это принять, то ничего нового о (63:31), т. е. о ситуации, в которой покупатели объединяются и не вступают в конкуренцию, сказать нельзя. Однако соотношения (63:30), которые описывает их конкуренцию, еще заслуживают некоторого внимания.

Рассмотрим дележи, относящиеся к (63:30), и сформулируем их сущность в терминах обычных представлений о ценах. Это то же, что мы делали в соответствующих местах в пп. 61.6.1 и 61.6.2.

Введем снова те $t_0$ и $r_0$, на которых достигается максимум в

(63:7) $$\mathrm{v}((1,\ 2,\ 3)) = \max_{\substack{t,\ r=0,\ 1,\ \dots,\ s \\ t+r \leqq s}} (u_{s-t-r} + v_t + w_r).$$

Так как наши дележи $\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\}$, для которых $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \mathrm{v}((1, 2, 3))$, фактически распределяют сумму $\mathrm{v}((1, 2, 3))$, эти $t_0$ и $r_0$ должны представлять числа единиц, фактически переданных продавцом соответственно покупателям 2 и 3.

Анализ из пп. 61.5.2 и 61.5.3, приводящий к (61:А), можно было бы теперь повторить с соответствующими изменениями. Он показал бы, что числа $t_0$ и $r_0$ можно найти в соответствии с критерием «маргинальных пар» Бем-Баверка, так же, как это было сделано раньше для соответствующего числа передач $t_0$. Так как это исследование не принесет нам ничего нового, мы не будем на нем больше задерживаться.

**63.6.2.** Обратимся теперь к вопросу о ценах. Покупатели 2 и 3 получают, как мы уже говорили, соответственно $t_0$ и $r_0$ единиц. С другой стороны, дележ $\vec{\alpha}$ приписывает им суммы $\alpha_2$, $\alpha_3$. Эти два описания можно согласовать, если принять

(63:32) $$v_{t_0} - t_0 p = \alpha_2,$$

(63:33) $$w_{r_0} - r_0 q = \alpha_3$$

и интерпретировать $p$ и $q$ как цены, уплачиваемые за одну единицу товара соответственно покупателями 2 и 3. (63:32) и (63:33) эквивалентны (61:24) из п. 61.6.1, но следует подчеркнуть, что мы получаем две различные цены для двух покупателей!

Теперь соотношения (63:30) могут быть сформулированы в терминах $p$ и $q$ [1]) следующим образом:

(63:34) $$\frac{1}{t_0}(v_{t_0} - z + w) \leqq p \leqq \frac{1}{t_0} v_{t_0},$$

(63:35) $$\frac{1}{r_0}(w_{r_0} - z + v) \leqq q \leqq \frac{1}{r_0} w_{r_0}.$$

Эти неравенства аналогичны неравенствам (61:25) из п. 61.6.1. Мы можем трактовать их так же, как там, и сравнить их с пределами, получающимися при применении теории Бем-Баверка. Мы этого делать не будем по причинам, о которых уже говорилось в п. 63.3. Тем не менее уместно сделать несколько замечаний.

Интервалы (63:34) и (63:35) снова шире, чем в теории Бем-Баверка, так же как в п. 61.6 (ср. с (61:С) из этого пункта). Некоторые числовые примеры указывают, однако, что разница имеет тенденцию уменьшаться.

---

[1]) То есть утверждения относительно $\alpha_2$ и $\alpha_3$ с помощью (63:32), (63:33) можно переделать в утверждения о $p$ и $q$.

Условие из (63:30), касающееся $\alpha_1$, есть лишь следствие аналогичных условий, касающихся $\alpha_2$ и $\alpha_3$, если воспользоваться $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = z$. Поэтому нет необходимости его рассматривать.

Поэтому возможно, хотя в этом направлении ничего еще и не доказано, что дальнейшее увеличение числа покупателей может уничтожить это различие в той части решения, которая соответствует отсутствию коалиции между покупателями. К этому предположению, однако, стоит относиться с величайшей осторожностью, так как мы хорошо знаем, как быстро усложняются решения с ростом числа участников и сколь трудными могут оказаться интерпретации различных частей получающихся решений.

Следует отметить также, что нам пришлось ввести различные цены для двух покупателей, несмотря на наше все еще остающееся в силе предположение о полной информации. Это вполне согласуется с интерпретацией п. 61.6.3. Мы видели там, что то, что мы называли ценами, суть в действительности только средние цены для некоторых различных сделок, что продавец и покупатели должны были оперировать премиями и скидками, и все это неизбежно ведет к различию между двумя покупателями.

Наконец, мы можем сформулировать эквивалент последнему замечанию из п. 61.6.3. Все аномалии в образовании структуры цен находятся в полном соответствии с тем фактом, что рассматриваемый рынок является монополистическим, а не дуополистическим.

## § 64. ОБЩИЙ РЫНОК

### 64.1. Постановка задачи

**64.1.1.** Рынки, которые мы рассматривали до сих пор, были весьма ограниченными: они состояли из двух или трех участников. Сейчас мы сделаем следующий шаг и рассмотрим более общий рынок, состоящий из $l+m$ участников: $l$ продавцов и $m$ покупателей. Конечно, это еще не самый общий случай. Следовало бы еще допустить, среди прочего, возможность того, чтобы каждый участник мог решать, будет ли он покупать или продавать, или еще, что он может быть продавцом для одного класса товаров и покупателем для другого. Однако в данном исследовании мы ограничимся лишь указанным случаем.

Далее, мы предполагаем, что имеется $s$ единиц $A_1, \ldots, A_s$ товара только одного вида.

Удобно обозначить продавцов через $1, \ldots, l$, а их множество через

$$L=(1, \ldots, l);$$

покупателей мы обозначим через $1^*, \ldots, m^*$, а их множество через

$$M=(1^*, \ldots, m^*).$$

Множеством всех участников будет

$$I=L \cup M=(1, \ldots, l, 1^*, \ldots, m^*)\,[1].$$

Обозначим число единиц товара, которым обладает $i$-й продавец, через $s_i$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{l} s_i = s. \qquad (64{:}1)$$

Обозначим полезность $t\,(=0, 1, \ldots, s_i)$ единиц товара для продавца $i$ через $u_t^i$, а полезность $t\,(=0, 1, \ldots, s)$ единиц товара для покупателя $j^*$

[1]) Мы использовали это обозначение вместо обычного $1, \ldots, l, l+1, \ldots \ldots, l+m$.

через $v_t^{j*}$. Таким образом, числа

(64:2) $$u_0^i = 0,\ u_1^i,\ \ldots,\ u_s^i \qquad (i = 1, \ldots, l),$$

(64:3) $$v_0^{j*} = 0,\ v_1^{j*},\ \ldots,\ v_s^{j*} \qquad (j = 1^*, \ldots, m^*)$$

описывают различные полезности этих количеств для участников

Как и прежде, мы используем начальную позицию каждого покупателя в качестве нуля его полезности.

Как и в пп. 61.5.2, 61.5.3, 62.1.2 и 63.2.1, нам нет необходимости повторять рассуждения из пп. 61.2.2, 61.3.1, 61.3.2 по поводу правил игры, моделирующей эту ситуацию.

**64.1.2.** Легко определить для этой игры характеристическую функцию $\mathrm{v}(S)$.

Очевидно, $S \subseteq I = L \cup M$. Рассмотрим теперь последовательно три альтернативные возможности.

Первая: $S \subseteq L$. В этом случае $S$ состоит только из продавцов, которые не могут совершать между собой никаких сделок. Отсюда непосредственно следует, что $\mathrm{v}(S)$ попросту отражает их первоначальное положение:

(64:4) $$\mathrm{v}(S) = \sum_{i \in S} u_{s_i}^i.$$

Вторая: $S \subseteq M$. В этом случае $S$ состоит только из покупателей, и они также не способны заключать между собой сделки. Снова очевидно, что $\mathrm{v}(S)$ отражает их первоначальное положение:

(64:5) $$\mathrm{v}(S) = 0.$$

Третья: $S \nsubseteq L$, $S \nsubseteq M$, т. е. $S$ имеет общие элементы как с $L$, так и с $M$. В этом случае $S$ содержит и продавцов, и покупателей; следовательно, сделки между ними возможны. Отсюда получается следующая формула:

(64:6) $$\mathrm{v}(S) = \max_{\substack{t_i = 0, 1, \ldots, s_i\ (i \in S \cap L) \\ r_{j*} = 0, 1, \ldots, s\ (j^* \in S \cap M)] \\ \sum_{i \in S \cap L} t_i + \sum_{j^* \in S \cap M} r_{j*} = \sum_{i \in S \cap L} s_i}} \Big( \sum_{i \in S \cap L} u_{t_i}^i + \sum_{j^* \in S \cap M} v_{r_{j*}}^j \Big).$$

В этом выражении $S \cap L$ есть множество всех продавцов в $S$, $S \cap M$ — множество всех покупателей в $S$, $t_i$ — число единиц, переданных продавцом $i$ (из $S \cap L$), $r_{j*}$ — число единиц, переданных покупателю $j^*$ (из $S \cap M$)[1]). Для читателя не будет представлять трудностей проверить формулу (64:6).

### 64.2.1. Некоторые частные свойства. Монополия и монопсония

**64.2.1.** Мы далеки от возможности исчерпывающего исследования описанной игры, рынка с $l$ продавцами и $m$ покупателями. Мы располагаем лишь отрывочной информацией о частных случаях, а кроме того, лишь несколькими предположениями относительно более общих случаев. Задачи, возникающие в этой связи, по-видимому, представляют собой определенный математический интерес помимо их экономической важности. Однако нам представляется преждевременным обсуждать эти вопросы до более глубокого исследования.

---

[1]) Нет необходимости указывать, какой продавец и какому покупателю передает каждую отдельную единицу: окончательные полезности, которые только и входят в $\mathrm{v}(S)$, не зависят от этого.

Все переговоры между индивидуумами, коалиции, компенсации и т. п. должны быть автоматически учтены в приложениях нашей теории.

Вместо этого мы сделаем несколько непосредственных выводов из двух наиболее простых из наших равенств (64:4), (64:5). Они состоят в следующем:

(64:A) Все множества $S \subseteq L$ и $S \subseteq M$ являются линейными.

Доказательство. Это означает, что

$$\mathrm{v}(S) = \sum_{k \in S} \mathrm{v}((k))$$

для $S \subseteq L$ и для $S \subseteq M$, что немедленно следует из (64:4) и (64:5).

(64:B) Игра имеет постоянную сумму тогда и только тогда, когда она несущественна.

Доказательство. Достаточность. Из несущественности, очевидно, вытекает постоянство суммы.

Необходимость. Предположим, что игра имеет постоянную сумму. Так как $L$ и $M$ — дополнительные множества, должно быть

(64:7) $$\mathrm{v}(I) = \mathrm{v}(L) + \mathrm{v}(M).$$

Теперь по (64:A) (полагая последовательно $S = L$, $M$) мы имеем:

(64:8) $$\mathrm{v}(L) = \sum_{k \in L} \mathrm{v}((k)), \quad \mathrm{v}(M) = \sum_{k \in M} \mathrm{v}((k)).$$

Объединяя (64:7) и (64:8), мы получим

(64:9) $$\mathrm{v}(I) = \sum_{k \in I} \mathrm{v}((k)).$$

Теперь модификация (27:B) из п. 27.4, которая применима, согласно п. 59.3.1, в нашем случае, дает в качестве критерия несущественности как раз (64:9).

Легко убедиться, что критерий несущественности (64:9) превращается, если это точно формулировать, используя (64:4) — (64:6), в следующий: максимум в (64:6) равен $\sum_{i \in L} u^i_{s_i}$. Но это есть значение максимизируемого в (64:6) выражения при $t_i \equiv s_i$, $r_{j*} \equiv 0$. Таким образом, наше утверждение эквивалентно тому, что максимум в (64:6) достигается при $t_i \equiv s_i$, $r_{j*} \equiv 0$, т. е. когда никаких сделок не происходит.

Следовательно, (64:B) можно сформулировать также следующим образом:

(64:B*) Тот факт, что индивидуальные полезности продавцов и покупателей таковы, что никаких сделок не происходит вовсе, т. е. что максимум в (64:6) достигается при $t_i \equiv s_i$, $r_{j*} \equiv 0$, равносилен следующему: игра имеет постоянную сумму или, что (в данном случае!) то же самое, игра является несущественной.

Суть этого результата состоит в том, что наша игра, представляющая рынок, может иметь постоянную сумму только тогда, когда цены на рынке абсолютно неэффективны. Следовательно, эта задача совершенно естественным образом должна принадлежать к играм с непостоянной суммой.

**64.2.2.** Продолжим теперь рассуждения в несколько ином направлении.

(64:C) Рассмотрим два дележа:

$$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \alpha_{1*}, \ldots, \alpha_{m*}\}\},$$

$$\vec{\beta}=\{\{\beta_1, \ldots, \beta_l, \beta_{1*}, \ldots, \beta_{m*}\}\}.$$

Предположим, что

$$\vec{\alpha} \in\!\!- \vec{\beta},$$

где $S$ есть множество из п. 30.1.1, по которому происходит доминирование. Тогда ни $S \cap L$, ни $S \cap M$ не могут быть пустыми[1].

Доказательство. В противном случае было бы $S \subseteq M$ или $S \subseteq N$. Но тогда $S$ было бы линейным по (64:A) и, следовательно, заведомо не необходимым (ср. п. 59.3.2).

Мы заключаем из (64:C), что в этом случае

(64:10) $\alpha_i > \beta_i$ хотя бы для одного $i \in L$,

(64:11) $\alpha_{j*} > \beta_{j*}$ хотя бы для одного $j^* \in M$.

Формулы (64:10) и (64:11) представляют интерес, когда либо $L$, либо $M$ есть одноэлементное множество, т. е. если $l = 1$ или $m = 1$. Это означает, что имеется только один продавец или только один покупатель, т. е. что мы имеем монополию или монопсонию.

В этом случае либо $i$ в (64:10), либо $j^*$ в (64:11) определяются единственным образом: $i = 1$ или $j^* = 1$. Таким образом, мы имеем:

(64:D) из $\vec{\alpha} \in\!\!- \vec{\beta}$ следует

(64:12) $$\alpha_1 > \beta_1, \quad \text{если} \quad l = 1,$$

(64:13) $$\alpha_{1*} > \beta_{1*}, \quad \text{если} \quad m = 1.$$

Примечательно то, что как (64:12), так и (64:13) являются транзитивными отношениями, тогда как доминирование $\vec{\alpha} \in\!\!- \vec{\beta}$ нетранзитивно. В этом, конечно, нет никакого противоречия, так как (64:12) или (64:13) — всего лишь необходимые условия для $\vec{\alpha} \in\!\!- \vec{\beta}$. Но тем не менее это — первый случай, когда понятие доминирования в реальной игре оказывается столь тесно связанным с некоторым транзитивным отношением.

Эта связь представляется весьма существенной чертой монополистической (или монопсонистической) ситуации[2]. Она будет играть существенную роль в п. 65.9.1.

---

[1]) То есть $S$ должно содержать как продавцов, так и покупателей.

[2]) Словесная интерпретация утверждений (64:12) и (64:13) проста и естественна: никакое эффективное доминирование невозможно без участия монополиста (или монопсониста).

*Глава XII*

# ОБОБЩЕНИЯ ПОНЯТИЙ ДОМИНИРОВАНИЯ И РЕШЕНИЯ

## § 65. ОБОБЩЕНИЕ. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

### 65.1. Постановка задачи

**65.1.1.** Наши математические исследования игры $n$ лиц, начавшиеся с определений из п. 30.1.1, использовали понятия дележа, доминирования и решения, которые там были однозначно определены. Однако в последующем развитии теории несколько раз встречались примеры, в которых эти понятия подвергались изменениям. Эти примеры были трех видов.

Первый. Оказывалось, что в ходе наших математических рассуждений, опирающихся только на первоначальные определения, обнаруживалась важность понятий, которые, очевидно, были аналогичны первоначальным (т. е. понятиям дележей, доминирования, решения), однако полностью с ними не совпадали. В этом случае было удобно называть эти понятия теми же именами, не забывая, однако, об их отличии. Примеры этому можно найти в исследовании существенной игры трех лиц с эксцессом в пп. 47.3—47.7, где исследование фундаментального треугольника сводилось к исследованию различных более мелких треугольников внутри него. Другой пример содержится в исследовании одного частного случая простой игры $n$ лиц в пп. 55.2—55.11, где исследование первоначальной области сводилось к исследованию области $\mathbf{V}'$ в $\mathscr{A}$ (см. анализ в пп. 55.8.2 и 55.8.3).

Второй. При изучении разложимости в главе IX мы в пп. 44.4.2—44.7.4 в явном виде переопределили (обобщили) понятия дележа, доминирования и решения. Это соответствовало распространению теории со случая игр с нулевой суммой на случай игр с постоянной суммой. В последующем изложении мы подчеркивали, что мы изучаем новую теорию, которая аналогична первоначальной из п. 30.1.1, но не совпадает с ней.

Фактически эти два вида вариации наших понятий отличаются друг от друга существенно: второй может рассматриваться как частный случай первого. В самом деле, новая теория была введена для того, чтобы более эффективно справиться с проблемой разложения в первоначальной теории. Об этих мотивах говорилось в эвристических рассмотрениях, которые привели к этому обобщению. При анализе погружения в п. 46.10, в частности в (46:K) и (46:L), мы строго установили, что новая теория может быть подчинена первоначальной именно в этом смысле.

Третий. Понятия дележа, доминирования и решения были снова переопределены (обобщены) в главе XI, а именно в пп. 56.8, 56.11 и 56.12. Это соответствовало окончательному распространению теории на случай общих игр. Мы снова подчеркивали, что переходим к изучению новой теории, аналогичной предыдущим, но не совпадающей с ними.

Это распространение, однако, существенно отличалось от двух предыдущих: оно представляло действительно концептуальное обобщение теории, а не просто технически удобный прием.

**65.1.2.** Очевидно, что хотя в процессе описанных выше изменений понятия дележей, доминирования и решения и претерпевали изменения (в частности, в направлении обобщений), некоторая связь между ними оста-

валась инвариантной. Для того чтобы выработать общий взгляд на эти вариации (и другие аналогичные им, которые могут появиться в дальнейшем), необходимо найти точную формулировку для этой инвариантной связи. Когда это будет сделано, мы достигнем полной общности во всех отношениях и сможем на этой основе переформулировать всю теорию.

Если вспомнить примеры, перечисленные в п. 65.1.1, то окажется, что эта инвариантная связь есть процесс, с помощью которого понятие решения получается из понятий дележей и доминирования. Это — условия (30:5:c) (или эквивалентные им (30:5:a) и (30:3:b)) из п. 30.1.1. Следовательно, мы достигнем наибольшей общности, если освободим понятия дележей и доминирования от каких-либо ограничений, но определим решения указанным способом.

В соответствии с этой программой мы будем поступать следующим образом.

Вместо дележей мы рассмотрим элементы из некоторой произвольной, но фиксированной области (множества) $D$. Вместо доминирования мы рассмотрим некоторое произвольное, но фиксированное отношение $\mathcal{S}$ между элементами $x$ и $y$ из $D$ [1]).

Теперь *решением* (в $D$ для $\mathcal{S}$) будет множество $\mathbf{V} \subseteq D$, которое удовлетворяет условию:

(65:1) Элементы $\mathbf{V}$ суть в точности те элементы $y \in D$, для которых $x\mathcal{S}y$ не верно ни для одного элемента $x \in \mathbf{V}$ [2]).

## 65.2. Общие замечания

**65.2.** Эти определения представляют собой основу для более общей в указанном смысле теории.

Следует заметить, что имеющееся теперь понятие решения порождает то же самое отношение к понятию насыщения, исследованному в п. 30.3 и, в частности, в п. 30.3.5, что и первоначальное понятие решения из п. 30.1.1. В частности, наше определение (65:1) можно сравнить с четвертым примером из п. 30.3.3, причем рассматриваемое теперь $\mathcal{S}$ соответствует отрицанию $\mathcal{R}$ из этого примера. Особенно существенно то, что при нахождении решения снова возникают все трудности, связанные с отсутствием симметричности рассматриваемого отношения. Поэтому все замечания, сделанные по этому поводу в пп. 30.3.6 и 30.3.7, остаются в силе и здесь.

Мы увидим далее, как эти трудности могут быть разрешены, по крайней мере в некоторых конкретных случаях [3]).

Для того чтобы достигнуть лучшего понимания ситуации в целом, мы должны рассмотреть некоторые конкретизации отношения $x\mathcal{S}y$. Действительно, в данном случае $\mathcal{S}$ совершенно произвольно, и поэтому мы не можем надеяться получить сколько-нибудь глубокие результаты, если $\mathcal{S}$ остается во всей его общности. С другой стороны, первоначальное понятие решения, определенное в п. 30.1.1, остается важнейшим примером $\mathcal{S}$, и представляется очень трудным обнаружить какие-либо простые отличительные свойства этого конкретного отношения. Поэтому нет никакого очевидного способа вводить конкретизации, хотя это и было бы желательно.

---

[1]) $x\mathcal{S}y$ выражает то, что отношение имеет место между конкретными элементами $x$ и $y$. Читателю рекомендуется вспомнить начало п. 30.3.2.

[2]) Это эквивалентно (30:5:c) из п. 30.1.1, как и было обещано.

[3]) См. результаты из пп. 65.4, 65.5 и более глубокие результаты из пп. 65.6—65.7.

Тем не менее мы обсудим три часто встречающиеся схемы конкретизации отношения $x\mathscr{S}y$, а потом найдем и четвертую, которая, хотя и с некоторыми ограничениями, приложима к интересующим нас проблемам. Для того чтобы выполнить это, нам потребуются некоторые математические приготовления, к которым мы и перейдем.

### 65.3. Упорядочения, транзитивность, ацикличность

**65.3.1.** Рассмотрим сначала такое отношение $x\mathscr{S}y$ (с областью $D$), которому присущи все существенные черты понятий «больше» и «меньше». Этот круг идей детально и тщательно изучался в математической литературе, и в настоящее время имеется достаточно полное согласие о том, что список этих свойств должен выглядеть следующим образом:

(65:A:a) Для любых двух $x$, $y$ из $D$ имеет место одно и только одно из следующих отношений:

$$x = y, \quad x\mathscr{S}y, \quad y\mathscr{S}x.$$

(65:A:b) Из $x\mathscr{S}y$ и $y\mathscr{S}z$ следует $x\mathscr{S}z$ [1]).

Мы назовем отношение $\mathscr{S}$ с этими свойствами (*линейным*) *упорядочением* на $D$. Легко привести примеры линейного упорядочения и согласовать их с обычной интуицией: обычное понятие «больше» для множества всех вещественных чисел или для некоторой его части [2]), понятие «меньше» при тех же условиях. Даже точки на плоскости обладают линейной упорядоченностью, например, в следующем смысле: $x\mathscr{S}y$ означает, что $x$ должна иметь бо́льшую ординату, чем $y$, или такую же, но в последнем случае $x$ должна иметь большую абсциссу, чем $y$ [3]).

**65.3.2.** Понятие линейной упорядоченности может быть значительно ослаблено, и при этом мы еще будем иметь содержательное понятие. Этому также уделено внимание в математической литературе [4]), и такие понятия играют важную роль в теории полезности. Они получаются, если ослабить условие (65:A:a), но оставить без изменения (65:A:b). Таким образом, мы приходим к следующему определению:

(65:B:a) Для произвольных $x$ и $y$ из $D$ может выполняться не более чем одно из трех соотношений:

$$x = y, \quad x\mathscr{S}y, \quad y\mathscr{S}x.$$

(65:B:b) Из $x\mathscr{S}y$ и $y\mathscr{S}z$ следует $x\mathscr{S}z$.

Мы назовем отношение $\mathscr{S}$ с такими свойствами *частичным упорядочением* на $D$ [5]). Два элемента $x$ и $y$ из $D$, для которых ни одно из трех

---

[1]) Если читатель рассмотрит в качестве $x\mathscr{S}y$ первоначальное отношение «больше», $x > y$, то он убедится, что (65:A:a) и (65:A:b) являются действительно основными свойствами этого отношения.

[2]) Например, для целых чисел или какого-нибудь интервала и т. д.

[3]) Без этой последней оговорки такое отношение будет исследоваться в следующих параграфах.

[4]) См. книгу Г. Биркгоф, Теория структур (на которую мы уже ссылались), гл. 1. В этой книге в духе современной математики изучаются упорядочения, частичные упорядочения и аналогичные понятия. Там же приведены и обширные литературные ссылки.

[5]) Заметим, что слово «частично» употребляется здесь в нейтральном смысле, т. е. линейная упорядоченность является частным случаем частичной упорядоченности, так как из (65:A:a) следует (65:B:a).

соотношений (65:B:a) не выполняется (так как упорядочение частичное, это возможно), называются *несравнимыми* (в смысле отношения $\mathscr{S}$).

Легко привести примеры частичного упорядочения: точки на плоскости, если $x\mathscr{S}y$ означает, что ордината $x$ больше, чем $y$ (см. сноску 3 на стр. 589). Мы можем определить $x\mathscr{S}y$ как отношение, состоящее в том, что обе координаты $x$ больше соответствующих координат $y$ [1]. Другой хороший пример получается в области положительных целых чисел, если в качестве $x\mathscr{S}y$ рассматривать отношение делимости $x$ на $y$, исключая равенство.

**65.3.3.** Для обоих введенных понятий упорядочения сохраняется (65:A:b), в то время как (65:A:a) превращается (ослабляясь) в (65:B:a). Это подчеркивает важность (65:A:b), называемого свойством *транзитивности* [2]. Предпримем теперь дальнейшее ослабление комбинации (65:B:a) и (65:A:b) так, чтобы (65:A:b) было тоже существенно изменено.

Заметим сначала, что (65:B:a) эквивалентно следующим двум условиям:

(65:C:a) Никогда $x\mathscr{S}x$.

(65:C:b) Никогда одновременно $x\mathscr{S}y$ и $y\mathscr{S}x$.

В самом деле, (65:B:a) исключает три комбинации $x = y$, $x\mathscr{S}y$; $x = y$, $y\mathscr{S}x$; $x\mathscr{S}y$, $y\mathscr{S}x$. Первая и вторая из них — это всего лишь два способа написания (65:C:a), а третья — это в точности (65:C:b).

Докажем теперь следующее.

(65:D) Рассмотрим утверждение:

($A_m$) Неверно $x_1\mathscr{S}x_0$, $x_2\mathscr{S}x_1$, . . ., $x_m\mathscr{S}x_{m-1}$, где $x_0 = x_m$ и $x_0$, $x_1$, . . ., $x_{m-1}$ принадлежат $D$.

Тогда мы имеем:

(65:D:a) (65:B:a) эквивалентно ($A_1$) и ($A_2$).

(65:D:b) Из (65:B:a) и (65:A:b) следуют все ($A_1$), ($A_2$), ($A_3$), . . .

Доказательство. (65:D:a). Ясно, что ($A_1$) есть (65:C:a), а $A_2$ есть (65:C:b).

Запись отношения ($A_m$) в обратном порядке и применение (65:A:b) $m - 1$ раз дает $x_m\mathscr{S}x_0$. Так как $x_m = x_0$, это означает $x_0\mathscr{S}x_0$, что противоречит (65:B:a).

Эти результаты наводят на мысль рассматривать совокупность всех условий ($A_1$), ($A_2$), ($A_3$), . . . Они следуют из (65:B:a) и (65:A:b), т. е. из частичного упорядочения, и представляют, как окажется, дальнейшее ослабление этого свойства.

Введем в соответствии с этим следующее определение:

(65:D:c) Отношение $\mathscr{S}$ *ациклично*, если оно удовлетворяет всем условиям ($A_1$), ($A_2$), ($A_3$), . . .

Читатель поймет, почему мы называем это свойство отношения ацикличностью: если какое-либо ($A_m$) неверно, то имеется цепочка отношений $x_1\mathscr{S}x_0$, $x_2\mathscr{S}x_1$, . . ., $x_m\mathscr{S}x_{m-1}$, которая является циклом, так как ее последний элемент $x_m$ совпадает с первым $x_0$.

---

[1]) Заметим, что это близко к правдоподобному типу частичной упорядоченности полезностей в смысле последнего замечания из п. 3.7.2. Каждое мыслимое событие может зависеть от двух числовых характеристик, которые обе надо увеличить для того, чтобы породить ясное и воспроизводимое предпочтение.

[2]) Некоторые другие важные отношения, совсем иной природы, чем упорядочение, также обладают этим свойством: например, равенство $x = y$.

Мы уже отмечали, что ацикличность следует из частичной упорядоченности (это, очевидно, и является содержанием (65:D:b), а значит, тем более и из линейной упорядоченности. Остается показать, что фактически ацикличность является более широким понятием, чем частичное упорядочение, т. е. что отношение может быть ациклическим, не будучи упорядочивающим (частично или линейно).

Вот примеры указанного явления. Пусть $D$ есть множество всех целых положительных чисел, а $x\mathscr{S}y$ — отношение непосредственного следования, т. е. $x = y + 1$. Или же пусть $D$ — множество всех вещественных чисел, а $x\mathscr{S}y$ есть отношение быть больше, но не намного, скажем не более чем на 1, т. е. отношение $y + 1 \geqq x > y$.

Мы закончим этот пункт замечанием, что примеры линейных или частичных упорядочений и ацикличных отношений могут быть легко умножены. Недостаток места не позволяет нам сделать это, но мы бы могли предложить это читателю в качестве полезного упражнения. Полезно также обратиться к ссылкам на литературу, указанным в сноске 1 на стр. 88 и в сноске 4 на стр. 589.

### 65.4. Решения для симметричного отношения и для линейного упорядочения

**65.4.1.** Изучим теперь схемы, о которых говорилось в конце п. 65.2.

Первая схема. Пусть отношение $\mathscr{S}$ симметрично в смысле п. 30.3.2. В этом случае целесообразно вернуться назад к связи с насыщением, о котором говорилось в начале п. 65.2. Симметричность $\mathscr{S}$ дает нам всю нужную информацию о решении.

Вторая схема. Пусть отношение $\mathscr{S}$ линейно упорядочивающее. В этом случае мы введем обычное определение: $x$ есть *максимум* в $D$, если не существует такого $y$, что $y\mathscr{S}x$. Иногда бывает удобно подчеркнуть связь с линейным упорядочением, называя этот $x$ *абсолютным максимумом* в $D$. (Сравните это с соответствующим местом в описании следующей схемы.) Ясно, что $D$ либо не имеет максимума, либо он единственный[1]).

Теперь мы имеем следующее утверждение:

(65:E) Множество **V** является решением тогда и только тогда, когда оно является одноэлементным множеством, состоящим из максимума в $D$.

Доказательство. Необходимость. Пусть **V** — решение. Так как $D$ непусто, **V** также непусто.

Рассмотрим $y \in$ **V**. Если $x\mathscr{S}y$, то $x$ не может принадлежать **V**, а значит, существует такое $u \in$ **V**, что и $u\mathscr{S}x$. По транзитивности должно быть $u\mathscr{S}y$, что невозможно, так как и $u$, и $y$ принадлежат **V**. Следовательно, не существует таких $x$ (в $D$!), что $x\mathscr{S}y$[2]), и $y$ должен быть максимумом в $D$.

Таким образом, в $D$ имеется максимум, который должен быть единственным (см. выше). Следовательно, **V** есть одноэлементное множество, из него состоящее.

Достаточность. Пусть $x_0$ есть максимум в $D$ и **V** $= (x_0)$. Возьмем произвольное $y$ (из $D$!); то, что $x\mathscr{S}y$ не верно ни для какого $x \in$ **V**, означает отрицание $x_0\mathscr{S}y$. А так как не может быть и $y\mathscr{S}x_0$, мы получаем $y = x_0$.

---

[1]) Доказательство. Если $x$ и $y$ оба являются максимумами в $D$, то $y\mathscr{S}x$ и $x\mathscr{S}y$ исключаются и, по (65:A:a), должно быть $x = y$.

[2]) Подобная ситуация уже обсуждалась в п. 4.6.2.

Значит, такие $y$ образуют множество **V**. Следовательно, **V** является решением.

**65.4.2.** Таким образом, в $D$ нет решения **V**, если в нем нет максимума, в то время как решение существует и единственно, если в $D$ максимум имеется.

Если $D$ конечно, то, очевидно, имеет место последнее. Это интуитивно вполне правдоподобно и может быть также легко доказано. В целях завершенности, а также для того, чтобы сделать еще более очевидной параллель с соответствующими частями следующего замечания, мы тем не менее дадим его полное доказательство.

(65:F) Если множество $D$ конечно, то в нем есть максимум.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что в $D$ максимума нет. Выберем произвольно $x_1 \in D$, затем $x_2$, для которого $x_2 \mathscr{S} x_1$, далее $x_3$, для которого $x_3 \mathscr{S} x_2$, и т. д. По (65:A:b) $x_m \mathscr{S} x_n$ для $m > n$; следовательно, по (65:A:a) $x_m \neq x_n$. Это значит, что все $x_1$, $x_2$, $x_3$, ... различны и $D$ бесконечно.

Эти результаты показывают, что существование и единственность **V** равносильны существованию и единственности максимума в $D$.

## 65.5. Решения для частичного упорядочения

**65.5.1.** Третья схема. Отношение $\mathscr{S}$ является частичным упорядочением. Мы перенесем буквально на этот случай определение максимума в $D$ из предыдущей схемы. Иногда бывает удобно указать на связь с частичным упорядочением, называя его *относительным* максимумом в $D$. (Сравните с соответствующим местом в предыдущем пункте. Это сравнение очень полезно, несмотря на следующую сноску 1.) В $D$ может не существовать максимума, а может быть один или несколько максимумов [1]). Итак, относительный максимум в отличие от абсолютного не обязательно единственный [2]).

Вопрос о существовании играет различную роль для относительного и абсолютного максимумов. Окажется, что важнейшим свойством теперь является следующее:

(65:G) Если $y \in D$ не является максимумом, то существует такой максимум $x$, что $x \mathscr{S} y$.

Для абсолютного максимума, т. е. когда $\mathfrak{S}$ является линейным упорядочением, утверждение (65:G) выражает существование максимума [3]). Для относительного максимума это не так, т. е. для частичного упорядочения из одного лишь существования (относительного) максимума не обяза-

[1]) Аргументы сноски 1 на стр. 591 здесь неверны, так как они зависят от (65:A:a), которое теперь ослаблено до (65:B:a).

Например, рассмотрим в качестве $D$ единичный квадрат на плоскости и определим на нем частичное упорядочение одним из двух способов, данных в двух первых примерах в конце п. 65.3.2. Тогда максимумы в $D$ образуют соответственно либо его верхнюю сторону, либо верхнюю и правую вместе.

[2]) Мы предостерегаем читателя от смешения нашего понятия относительного максимума с одноименным понятием, встречающимся в математическом анализе. Там относительным максимумом часто называется локальный максимум. Так как встречающиеся там величины численные и, следовательно, линейно упорядоченные, это не имеет ничего общего с нашей теорией.

[3]) Доказательство. Так как $D$ непусто, из (65:G) следует существование максимума. Предположим противное: пусть $x_0$ есть максимум $D$. Тогда для любого $y$, не являющегося максимумом, т. е. для $y \neq x_0$, исключено $y \mathscr{S} x_0$ и справедливость (65:A:a) (линейное упорядочение!) дает $x_0 \mathscr{S} y$.

тельно вытекает (65:G). Легко привести соответствующие примеры, но это не входит в наши планы. Достаточно сказать, что (65:G) окажется подлинным обобщением условия существования абсолютного максимума (см. предыдущую схему) на случай относительного максимума (см. ниже).

Теперь мы имеем следующее:

(65:H) **V** есть решение тогда и только тогда, когда (65:G) выполнено (для $D$ и $\mathscr{S}$ !), а **V** — множество всех (относительных) максимумов.

Доказательство. Необходимость. Пусть **V** — решение.

Если $y \notin \mathbf{V}$, то существует такое $x \in \mathbf{V}$, что $x \mathscr{S} y$; следовательно, $y$ не есть максимум. Поэтому все максимумы принадлежат **V**.

Если $y \in \mathbf{V}$, то аргументы, приведенные в ходе доказательства (65:E) из п. 65.4.1, могут быть повторены буквально, и они доказывают, что $y$ есть максимум.

Таким образом, **V** есть в точности множество всех максимумов.

Если $y$ не есть максимум, т. е. не принадлежит **V**, то существует некоторое $x \in \mathbf{V}$, т. е. максимум, для которого $x \mathscr{S} y$; поэтому (65:G) выполняется (для $D$ и $\mathscr{S}$).

Достаточность. Предположим, что (65:G) выполняется, и пусть **V** — множество всех максимумов.

Для $x, y \in \mathbf{V}$ невозможно $x \mathscr{S} y$, так как $y$ — максимум. Если $y \notin \mathbf{V}$, т. е. не максимум, то по (65:G) существует такой $x$, являющийся максимумом, т. е. принадлежащий **V**, что $x \mathscr{S} y$. Значит, **V** есть решение по (65:1).

Читатель может проверить, что этот результат (65:H) превращается в (65:E) из п. 65.4.1, если упорядочение полное.

Утверждение (65:H) показывает, что не существует решения **V**, если $D$ и $\mathscr{S}$ не удовлетворяют условиям (65:G); решение существует и единственно, если это условие выполнено.

**65.5.2.** Если $D$ конечно, то, очевидно, имеет место последнее. Приведем полное доказательство.

(65:I) Если $D$ конечно, то условие (65:G) выполняется.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $D$ не удовлетворяет (65:G). Назовем элемент $y$ *исключительным*, если он не максимум и $x \mathscr{S} y$ не имеет места ни для какого максимума $x$. Невыполнение (65:G) означает, что исключительные $y$ существуют.

Рассмотрим некоторый исключительный $y$. Так как он не максимум, существует такой $x$, что $x \mathscr{S} y$. Так как $y$ исключительный, $x$ не максимум. Если существует такой максимум $u$, что $u \mathscr{S} x$, то по (65:B:b) мы получаем $u \mathscr{S} y$, что противоречит исключительности $y$! Следовательно, такого $u$ не существует, т. е. элемент $x$ тоже исключительный. Таким образом, мы получаем:

(65:J) Если элемент $y$ исключительный, то существует такой исключительный $x$, что $x \mathscr{S} y$.

Выберем теперь исключительные $x_1$ и $x_2$ так, чтобы было $x_2 \mathscr{S} x_1$, затем исключительный $x_3$ так, чтобы было $x_3 \mathscr{S} x_2$, и т. д. По (65:B:b) для $m > n$ будет $x_m \mathscr{S} x_n$; следовательно, по (65:B:a) $x_m \neq x_n$, т. е. все $x_1, x_2, x_3, \ldots$ различны, а значит, множество $D$ бесконечно.

(Сравним последнюю часть этого вывода с доказательством (65:F) из предыдущего пункта. Заметим, что можно заменить там (65:A:a) на более слабое (65:B:a).)

Эти результаты показывают, что существование решения соответствует теперь не существованию максимума, а выполнению условия (65:G). Весьма важно обратить внимание на заключительную часть п. 65.4.2. Она согласуется с нашим прежним наблюдением, что в данном случае частичного упорядочения (65:G) есть просто замена существования максимума.

Единственность решения является еще более примечательной. В свете последней части предыдущей схемы представлялось естественным, что эта единственность связана с единственностью максимума. Но теперь мы увидим, что решение единственно, в то время как относительный максимум, как уже было сказано [1]), может единственным и не быть.

### 65.6. Ацикличность и строгая ацикличность

**65.6.1.** Четвертая схема. Пусть $\mathscr{S}$ является ацикличным отношением. Мы знаем, что этот случай включает и два предыдущих, т. е. является более общим, чем они оба.

В этих двух случаях мы установили необходимые и достаточные условия существования решения, а также нашли, когда из них вытекает его единственность. (См. (65:E) и (65:H).) Далее, мы видели, что, когда $D$ конечно, эти условия, очевидно, выполнены (см. (65:F) и (65:I)).

В случае ацикличности мы найдем условия, во многих отношениях сходные с этими, и получим более глубокие в некотором смысле результаты, чем прежде. Будет необходимо, однако, в ходе исследования несколько изменить нашу точку зрения, так что полученные результаты будут подчинены некоторым ограничениям. Случай конечного $D$ снова получит полное и исчерпывающее исследование.

Снова удобно ввести понятия максимумов [2]), и не только для самого $D$, но и для его подмножеств. Итак, мы назовем $x$ *максимумом* в $E$ ($\subseteq D$), если $x \in E$ и если не существует такого $y$, что $y\mathscr{S}x$. Обозначим множество всех максимумов в $E$ через $E^m$ ($\subseteq E$).

Наши рассуждения покажут, что решающую роль играет то, обладают ли $D$ и $\mathscr{S}$ следующим свойством:

(65:K) Из $E \neq \varnothing$ (для $E \subseteq D$) следует $E^m \neq \varnothing$,

т. е. любое непустое подмножество $D$ имеет максимумы.

Замечание. Даже если $\mathscr{S}$ является линейным упорядочением, это свойство (65:K) имеет большое значение в теории множеств. Читатели, знакомые с этой теорией, заметят, что это свойство совпадает с понятием *линейной упорядоченности*. (В этом случае $\mathscr{S}$ должно интерпретироваться как отношение «предшествования», а не как отношение «больше».) См. следующую литературу: А. Френкель, ук. соч, стр. 195 и след., а также 299 и след., Ф. Хаусдорф, ук. соч., стр. 55 и след. (литература указана в сноске 1 на стр. 87); см. также Э. Цермело в сноске на стр. 289. Замечательно, что то же самое свойство играет роль и в связи с нашим понятием решения для произвольных отношений. Основная доля исследований, которые будут проведены в этой главе, касается именно этого свойства и его следствия.

В действительности эта тема и ее ответвления представляются заслуживающими дальнейшего исследования и с математической точки зрения.

На первый взгляд (65:K) не представляется связанным каким-либо образом с ацикличностью; однако, в действительности здесь существует,

---

[1]) (65:H) показывает, что решение V не связано с каким-либо конкретным (не единственным) максимумом, а с (единственным) множеством всех максимумов.

[2]) Так как мы использовали термин «абсолютный» во второй схеме, а термин «относительный»— в третьей, мы должны были бы теперь найти термин, еще более ослабляющий это понятие. Однако нам не представляется необходимым вводить по данному поводу подобные терминологические новшества.

и притом очень тесная, связь. Прежде чем мы займемся нашей целью, изучением решений в данном случае, мы исследуем эту связь.

**65.6.2.** С этой целью мы отбросим все ограничения, касающиеся $D$ и $\mathscr{S}$, и в том числе ацикличность.

Удобно ввести свойство, которое является модификацией $(A_m)$ из (65:D) в п. 65.3.3 и которое окажется внутренне связанным с ним.

$(A_\infty)$ Не существует такой последовательности принадлежащих $D$ [1]) элементов $x_0, x_1, x_2, \ldots$, что $x_1 \mathscr{S} x_0, x_2 \mathscr{S} x_1, x_3 \mathscr{S} x_2, \ldots$

По причине, которая скоро станет ясной, назовем отношение $\mathscr{S}$ *строго ацикличным*, если оно удовлетворяет условию $(A_\infty)$.

Выясним связь строгой ацикличности, т. е. $(A_\infty)$, с (65:K) и с ацикличностью, доказав для этого пять следующих лемм. Наиболее существенными результатами из них являются (65:O) и (65:P); результаты (65:L) и (65:N) — предварительные для (65:O).

(65:L) Из строгой ацикличности следует ацикличность.

Доказательство. Предположим, что $\mathscr{S}$ не ациклично. Тогда существуют такие $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ с $x_m = x_0$ в $D$, что $x_1 \mathscr{S} x_0$, $x_2 \mathscr{S} x_1, \ldots, x_m \mathscr{S} x_{m-1}$. Дополним эту последовательность до бесконечной $x_0, x_1, x_2, \ldots$, положив,

$$x_0 = x_m = x_{2m} = \ldots,$$
$$x_1 = x_{m+1} = x_{2m+1} = \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{m-1} = x_{2m-1} = x_{3m-1} = \ldots$$

Тогда ясно, что $x_1 \mathscr{S} x_0, x_2 \mathscr{S} x_1, x_3 \mathscr{S} x_2, \ldots$ и т. д., что противоречит строгой ацикличности.

(65:M) Ацикличность, без строгой ацикличности влечет следующее:

$(B^*_\infty)$ В $D$ существует последовательность $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ [2]), обладающая следующим свойством:

Для того чтобы $x_p \mathscr{S} x_q$, достаточно, чтобы $p = q + 1$, и необходимо, чтобы $p > q$ [3]).

Из $(B^*_\infty)$ следует, что элементы $x_0, x_1, x_2, \ldots$ попарно различны и, следовательно, множество $D$ должно быть в данном случае бесконечным.

Доказательство. Так как $\mathscr{S}$ не строго ациклично, в $D$ существуют такие $x_0, x_1, x_2, \ldots$, что $x_1 \mathscr{S} x_0$, $x_2 \mathscr{S} x_1$, $x_3 \mathscr{S} x_2, \ldots$ Значит, для $x_p \mathscr{S} x_q$ достаточно, чтобы $p = q + 1$.

Теперь предположим, что $x_p \mathscr{S} x_q$. Мы хотим доказать, что при этом должно быть $p > q$. Предположим противное, именно, что $p \leqq q$. Тогда $x_{p+1} \mathscr{S} x_p$, $x_{p+2} \mathscr{S} x_{p+1}, \ldots, x_q \mathscr{S} x_{q-1}$ [4]), $x_p \mathscr{S} x_q$, что противоречит $(A_m)$ для $m = q - p + 1$: действительно, достаточно подставить вместо $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ и $x_m = x_0$ элементы нашей последовательности $x_p$, $x_{p+1}, \ldots, x_q$ и $x_p$. Таким образом, мы получили противоречие с условием ацикличности $\mathscr{S}$.

---

[1]) Последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ должна быть бесконечной в том смысле, что индексы должны составлять бесконечную последовательность, но сами элементы $x_i$ не обязательно должны быть все различными.

[2]) Сравнить с предыдущей сноской и с последней частью этой леммы.

[3]) В связи с этим результатом см. также п. 65.8.3.

[4]) Здесь имеется ровно $q - p$ соотношений; следовательно, их не будет вовсе, если $p = q$.

Итак, обе части ($B^*_\infty$) доказаны.

Теперь рассмотрим следствия из ($B^*_\infty$). Если элементы $x_0$, $x_1$, $x_2$, ... не являются попарно различными, то $x_p = x_q$ для некоторых $p > q$. Согласно ($B^*_\infty$) должно быть $x_{q+1}\mathscr{S}x_q$, и потому $x_{q+1}\mathscr{S}x_p$; ввиду ($B^*_\infty$) из этого следует, что $q+1>p$, т. е. $q \geqq p$; однако $q < p$, т. е. $x_0$, $x_1$, $x_2$, ... попарно различны и, следовательно, $D$ должно быть бесконечным.

(65:N) Из неацикличности вытекает следующее:
Для некоторого $m$ (= 1, 2, ...) мы имеем:

($B^*_m$) Существуют в $D$ такие $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ и $x_m = x_0$, что для $x_p\mathscr{S}x_q$ необходимо и достаточно, чтобы $p = q + 1$ [1]).

Доказательство. Так как отношение $\mathscr{S}$ неациклично, в $D$ существуют такие $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ и $x_m = x_0$, что $x_1\mathscr{S}x_0$, $x_2\mathscr{S}x_1$, ... ..., $x_m\mathscr{S}x_{m-1}$. Возьмем такую последовательность с наименьшим возможным $m$ (= 1, 2, ...).

Ясно, что равенство $p = q + 1$ достаточно для того, чтобы было $x_p\mathscr{S}x_q$. Докажем, что оно и необходимо. Предположим для этого, что $x_p\mathscr{S}x_q$, но $p \neq q + 1$.

Далее, циклическая подстановка последовательности $x_0$, $x_1$, ... ..., $x_{m-1}$, $x_m = x_0$ не повлияет на её свойства; поэтому мы можем сделать $x_p$ последним элементом, т. е. перевести $p$ в $m$. Итак, не ограничивая общности, мы можем считать, что $p = m$. Мы имеем $p \neq q + 1$, т. е. $q \neq m - 1$. Мы можем также предполагать, что $q \neq m$, так как $q = m$ можно заменить на $q = 0$. Таким образом, $q \leqq m - 2$. После этой подготовки мы можем заменить $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$, $x_m = x_0$ на $x_0$, $x_1$, ... ..., $x_q$, $x_m = x_0$ [2]), не изменив свойств последовательности. Это заменяет $m$ на $q + 1$, что $< m$, а это противоречит минимальности $m$.

Итак, обе части ($B^*_m$) доказаны.

**65.6.3.** Резюмируем доказанное.

(65:O)

(65:O:a) Ацикличность равносильна отрицанию всех ($B^*_1$), ($B^*_2$), ...

(65:O:b) Строгая ацикличность равносильна отрицанию всех ($B^*_1$), ($B^*_2$), ... и ($B^*_\infty$).

(65:O:c) Из строгой ацикличности следует ацикличность для любого $D$, а для конечного $D$ они равносильны.

Доказательство. (65:O:a). Условие необходимо, так как ($B^*_m$) противоречит ($A_m$) и, следовательно, ацикличности. Достаточность следует из (65:N).

(65:O:b) Условия необходимы, так как неацикличность противоречит строгой ацикличности по (65:L), а ($B^*_\infty$) также противоречит ($A_\infty$), т. е. строгой ацикличности. Эти условия достаточны, так как отрицание строгой ацикличности позволяет применить (65:M) в случае ацикличности и (65:O:a) в случае неацикличности.

(65:O:c) Первая импликация была установлена в (65:L). Если $D$ конечно, то обратная импликация, а значит, и равносильность, следует из последнего замечания в (65:M).

---

[1]) Заметим, что соотношения между $x_0$, $x_1$, $x_2$, ... характеризуются полностью ($B^*_m$), но не ($B^*_\infty$). Это будет важно в дальнейшем.

[2]) То есть опустить $x_{q+1}, \ldots, x_{1-m}$.

Установим, наконец, связь с (65:K).

(65:P) (65:K) эквивалентно строгой ацикличности.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что отношение $\mathscr{S}$ не является строго ацикличным. Найдем в $D$ такую последовательность $x_0$, $x_1$, $x_2$, ..., что $x_1 \mathscr{S} x_0$, $x_2 \mathscr{S} x_1$, $x_3 \mathscr{S} x_2$, ... Тогда $E = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \subseteq D$ и $E \neq \emptyset$ и, очевидно, не имеет максимума. Это значит, что (65:K) неверно.

Достаточность. Предположим, что (65:K) не выполняется. Выберем непустое $E \subset D$, не имеющее максимума [1]). Выберем $x_0 \in E$, элемент $x_0$ не является максимумом в $E$; поэтому найдется такой $x_1 \in E$, что $x_1 \mathscr{S} x_0$. Элемент $x_1$ не максимум в $E$; поэтому найдется такой $x_2$, что $x_2 \mathscr{S} x_1$, и. т. д. Таким образом, для последовательности $x_0$, $x_1$, $x_2$, ... из $E$, а следовательно, и из $D$, мы получаем $x_1 \mathscr{S} x_0$, $x_2 \mathscr{S} x_1$, $x_3 \mathscr{S} x_2$, ... Это противоречит строгой ацикличности.

Итак, мы видим, что строгая ацикличность эквивалентна условию (65:K); мы вправе ожидать, что оно играет фундаментальную роль. Ацикличность и строгая ацикличность тесно связаны друг с другом. Особая роль конечности $D$ проявляется в том, что для конечного $D$ оба эти понятия эквивалентны.

### 65.7. Решения для ациклического отношения

**65.7.1.** Обратимся теперь к нашей основной цели: исследованию решений в $D$ для $\mathscr{S}$. Именно здесь станет ясно, почему мы приписывали свойству (65:K) такую фундаментальную важность: (65:K) оказывается связанным с существованием ровно одного решения.

Мы начнем с доказательства того, что существует единственное решение (в $D$ для $\mathscr{S}$), если выполняется (65:K). Для доказательства мы ограничимся конечным множеством $D$; в этом случае решение может быть даже получено в виде явной конструкции. Это делается с помощью конечной индукции. Конечность $D$ в действительности не необходима, но для бесконечного $D$ эта конструкция была бы более сложной [2]).

Так как мы должны принять (65:K), это означает ввиду (65:P), что $D$ должно быть строго ацикличным. Так как $D$ конечно, согласно(65:O:c), это не отличается от обычной ацикличности. Поэтому в данный момент безразлично, требуем мы ацикличности или строгой ацикличности $D$. Тем не менее стоит помнить, что мы пользуемся (65:K), т. е. строгой ацикличностью, и что предположение конечности, которое стирает различие, может быть отброшено.

Мы повторяем: в оставшейся части этого параграфа мы принимаем как конечность $D$, так и свойство (65:K), т. е. строгую ацикличность.

Перейдем теперь к индуктивному построению, о котором было сказано. Сначала оно будет сделано, а затем будут доказаны обещанные свойства.

Определим для каждого $i = 1, 2, 3, \ldots$ три множества $A_i$, $B_i$, $C_i$ (все $\subseteq D$) следующим образом. Возьмем $A_1 = D$. Если для $i\,(= 1, 2, 3, \ldots)$

---

[1]) Читателю рекомендуется сравнить это доказательство с доказательством (65:F) из п. 65.4.2.

[2]) Было бы необходимо использовать более тонкие теоретико-множественные понятия (см. сноску 3 на стр. 288 и замечание на стр. 594), в частности, *трансфинитную индукцию* или некоторую эквивалентную ей технику.

Эти вопросы будут рассмотрены в другом месте.

множество $A_i$ уже известно, то $B_i$, $C_i$ и $A_{i+1}$ получаются следующим образом: $B_i = A_i^m$, т. е. $B_i$ есть множество тех $y \in A_i$, для которых не существует таких $x \in A_i$, что $x\mathscr{S}y$. $C_i$ есть множество тех $y \in A_i$, для которых $x\mathscr{S}y$ для некоторого $x \in B_i$. Наконец,

$$A_{i+1} = A_i - B_i - C_i.$$

Теперь мы докажем следующее:

(65:Q) Множества $B_i$ и $C_i$ не пересекаются.

Доказательство следует непосредственно из определения.

(65:R) Из $A_i \neq \emptyset$ следует $A_{i+1} \subset A_i$ [1]).

Доказательство. Из $A_i \neq \emptyset$ следует $B_i = A_i^m \neq \emptyset$. Поэтому ввиду (65:K) [2]) должно быть

$$A_{i+1} = A_i - B_i - C_i \subset A_i.$$

(65:S) Существует такое $i$, что $A_i = \emptyset$.

Доказательство. В противном случае по (65:R) должно быть $D = A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, что противоречит конечности $D$.

(65:T) Пусть $i_0$ — наименьшее $i$, удовлетворяющее (65:S); тогда $D = A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_{i_0-1} \supset A_{i_0} = \emptyset$.

Доказательство. Это — переформулировка (65:R) и (65:S).

(65:U) $B_1, \ldots, B_{i_0-1}, C_1, \ldots, C_{i_0-1}$ суть не пересекающиеся множества с объединением $D$.

Доказательство. По определению $A_{i+1}$ мы имеем $B_i \cup C_i = A_i - A_{i+1}$. Следовательно, $B_1 \cup C_1, \ldots, B_{i_0-1} \cup C_{i_0-1}$ попарно не пересекаются и их объединение равно

$$A_1 - A_{i_0} = D - \emptyset = D.$$

Сравнение этого с (65:Q) показывает, что множества $B_1, C_1, \ldots$ $\ldots, B_{i_0-1}, C_{i_0-1}$, т. е. множества $B_1, \ldots, B_{i_0-1}, C_1, \ldots, C_{i_0-1}$ попарно не пересекаются, и их объединение также равно $D$.

**65.7.2.** Положим теперь

(65:2) $$\mathbf{V}_0 = B_1 \cup \ldots \cup B_{i_0-1}.$$

Тогда (65:U) дает нам

(65:3) $$D - \mathbf{V}_0 = C_1 \cup \ldots \cup C_{i_0-1}.$$

Докажем теперь следующее.

(65:V) Если $\mathbf{V}$ есть решение (в $D$ для $\mathscr{S}$), то $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$.

Доказательство. Сначала покажем, что $B_i \subseteq \mathbf{V}$ для всех $i = 1, \ldots, i_0 - 1$.

Предположим противное и рассмотрим то наименьшее $i$, для которого включение $B_i \subseteq \mathbf{V}$ не имеет места. Пусть $z$ — элемент этого $B_i$, не принадлежащий $\mathbf{V}$. Тогда для некоторого $y \in \mathbf{V}$ должно быть $y\mathscr{S}z$. $z$ есть максимум в $A_i$; следовательно, $y$ не принадлежит $A_i$. Рассмотрим то наи-

[1]) Все дело в том, что мы имеем $\subset$, а не просто $\subseteq$!

[2]) Это единственное (но имеющее решающее значение!) использование свойства 65:K).

меньшее $k$, для которого $y$ не принадлежит $A_k$. Тогда $k \leqq i$, а так как $y \in D = A_1$, должно быть $k \neq 1$. Положим $j = k - 1$; тогда $1 \leqq j < i$, $y$ лежит в $A_j$, но не в $A_{j+1} = A_k$; следовательно, $y$ принадлежит $B_j \cup C_j = A_j - A_{j+1}$.

$z \in B_i \subseteq A_i \subset A_j$. Таким образом, если $y \in B_j$, то из $y\mathscr{S}z$ должно следовать, что $z \in C_j$. Это неверно, так как $z \in B_i$. Следовательно, $y \in C_j$.

Далее, в $B_j$ должен существовать такой $x$, что $x\mathscr{S}y$. Так как $y \in \mathbf{V}$, должно быть $x \notin \mathbf{V}$. Итак, не может быть $B_j \subseteq \mathbf{V}$. А так как $j < i$, это противоречит предположенной минимальности $i$.

Итак, мы видим, что

(65:4) $$B_i \subseteq \mathbf{V} \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, i_0 - 1.$$

Если $y \in C_i$, то существует такой $x \in B_i$, что $x\mathscr{S}y$. Так как $x \in \mathbf{V}$ по (65:4), $y$ не может принадлежать $\mathbf{V}$.

Таким образом, мы имеем:

(65:5) $$C_i \subseteq -\mathbf{V} \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, i_0 - 1.$$

Сравнивая (65:4) и (65:5) с (65:2) и (65:3), мы получаем, что $\mathbf{V}$ должно совпадать с $\mathbf{V}_0$, а это и требовалось доказать.

(65:W) $\mathbf{V}_0$ является решением (в $D$ для $\mathscr{S}$).

Доказательство. Разобьем доказательство на две части.

Если $x, y \in \mathbf{V}_0$, то соотношение $x\mathscr{S}y$ исключается. Для доказательства предположим противное: $x, y \in \mathbf{V}_0$ и $x\mathscr{S}y$.

Итак, $x, y \in \mathbf{V}_0$; пусть для определенности $x \in B_i$ и $y \in B_j$. Если $i \leqq j$, то $y \in B_j \subseteq A_j \subseteq A_i$. Но $x \in B_i$; поэтому из $x\mathscr{S}y$ следует, что $y \in C_i$. Однако этого не может быть, так как $y \in B_i$. Если $i > j$, то $x \in B_i \subseteq A_i \subset A_j$. $y$ максимально в $A_j$; следовательно, $x\mathscr{S}y$ невозможно. Итак, во всех случаях мы получаем противоречие.

Если $y \notin \mathbf{V}_0$, то должно быть $x\mathscr{S}y$ для некоторого $x \in \mathbf{V}_0$. Но $y$ принадлежит $-\mathbf{V}_0$. Следовательно, $y$ принадлежит некоторому $C_i$. Итак, $x\mathscr{S}y$ для $x \in B_i$, а значит, $x \in \mathbf{V}_0$.

Это завершает доказательство.

Объединяя (65:V) и (65:W), можно утверждать следующее:

(65:X) Существует единственное решение $\mathbf{V}_0$ (в $D$ для $\mathscr{S}$), имеющее вид (65:2).

## 65.8. Единственность решений, ацикличность и строгая ацикличность

**65.8.1.** Рассмотрим снова последние три схемы, сохраняя на время предположение о конечности для избежания дальнейших осложнений. Бросается в глаза то, что все они приводят к одинаковым результатам, хотя и при различных предположениях. В каждом случае мы доказали единственность решения, но предполагали мы при этом сначала линейное упорядочение, затем частичное и, наконец (простую или строгую) ацикличность, т. е. условия ослаблялись с каждым шагом.

Раз это так, естественно задать вопрос, является ли последний случай пределом ослабления условий или же ацикличность может быть заменена еще более слабым условием без потери существования единственного решения.

Следует отметить, что это направление исследования уводит нас от теории игр. Действительно, в этой теории первостепенную важность имело существование решения, а о единственности, как мы убедились, не возникало вопроса.

Тем не менее, так как мы теперь располагаем некоторыми результатами о существовании с единственностью, мы продолжим изучение этого случая. Мы увидим далее, что полученные результаты уже имеют некоторое косвенное значение для теории игр (см. § 67).

В этом направлении нам следует задать вопрос: какие свойства отношения $\mathscr{S}$ необходимы и достаточны для того, чтобы существовало единственное решение? Легко увидеть, однако, что едва ли этот вопрос имеет простой и удовлетворительный ответ. Действительно, в решении (в $D$ для $\mathscr{S}$) содержится очень мало информации о структуре $D$ (вместе с $\mathscr{S}$). Ациклический случай менее удобен для того, чтобы судить об этом, так как он несколько сложен, но случай линейного или частичного упорядочения хорошо поясняет это. В этих случаях решение связано только с максимумами $D$ и совсем не выражает свойств других элементов $D$.

Это возражение устранить нетрудно. Рассмотрим множество $E \subseteq D$ вместо $D$. Отношение $\mathscr{S}$ в $D$ является также отношением в $E$ и, если это линейное или частичное упорядочение или (простая или строгая) ацикличность в $D$, то это же будет и в $E$ [1]). Поэтому из нашего результата (65:X) следует, что в каждом $E \subseteq D$ существует единственное решение (для $\mathscr{S}$). Теперь эти решения, построенные для всех $E \subseteq D$, говорят уже много больше о структуре $D$. Удобно ограничиться снова случаями линейного или частичного упорядочения. Ясно, что знание максимума для любого $E \subseteq D$ дает достаточно полную информацию о структуре $D$ (вместе с $\mathscr{S}$).

**65.8.2.** Итак, мы подошли к следующему вопросу: какие свойства отношения $\mathscr{S}$ необходимы и достаточны для того, чтобы для каждого $E \subseteq D$ существовало единственное решение (в $E$ для $\mathscr{S}$)? Мы можем показать, что ацикличность и строгая ацикличность являются существенными понятиями, хотя и не приведут к исчерпывающему решению вопроса. Две следующие леммы содержат все, что мы можем утверждать по этому поводу.

(65:Y) Для того чтобы существовало единственное решение для любого $E \subseteq D$ (в $E$ для $\mathscr{S}$), достаточно строгой ацикличности.

Для конечного $D$ это следует из (65:X), и ввиду (65:O:c) строгая ацикличность может быть заменена ацикличностью.

Для бесконечного $D$ это зависит от возможности распространения (65:X) на бесконечный случай (см. начало п. 65.7.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если отношение в $D$ (просто или строго) ациклично, то это же верно и для $E \subseteq D$ (см. выше). Теперь все утверждения леммы становятся очевидными.

(65:Z) Для того чтобы для каждого $E \subseteq D$ существовало единственное решение (в $E$ для $\mathscr{S}$), ацикличность необходима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если отношение $D$ неациклично, то из (65:O:a) следует ($B^*_m$) из (65:N) для $m = 1, 2, \ldots$ Возьмем соответствующие $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ и $x_m = x_0$ и положим $E = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$.

[1]) То есть по крайней мере то же самое; может оказаться, что частичное упорядочение на $D$ превращается в линейное на $E$ или ацикличность в $D$ — в упорядочение на $E$.

Тогда $E \subseteq D$ и $(B_m^*)$ описывает $\mathcal{S}$ в $E$ полностью. Рассмотрим решение **V** в $E$ (для $\mathcal{S}$).

Рассмотрим такое решение **V**: если $x_i \in \mathbf{V}$, то $x_{i+1}$ не принадлежит **V**, так как $x_{i+1}\mathcal{S}x_i$. Если $x_i$ не принадлежит **V**, то существует такой элемент $y$ в **V**, что $y\mathcal{S}x_i$, т. е. $y = x_j$ и $x_j\mathcal{S}x_i$. Это означает, что $j = i + 1$ [1]), т. е. $y = x_{i+1}$ и, следовательно, $x_{i+1} \in \mathbf{V}$. Итак, мы видим:

(65:6) $x_i$ принадлежит **V** тогда и только тогда, когда $x_{i+1}$ не принадлежит **V**.

Повторное применение (65:6) дает следующее:

(65:7) Если число $k$ четное, то $x_0$ принадлежит **V** тогда и только тогда, когда $x_k$ принадлежит **V**. Если $k$ нечетное, то $x_0$ принадлежит **V** тогда и только тогда, когда $x_k$ не принадлежит **V**.

Так как $x_0 = x_m$, (65:7) при нечетном $m$ содержит противоречие. Следовательно, если $m$ нечетное, то решения в $E$ (для $\mathcal{S}$) не существует. Если $m$ четно, то из (65:7) следует, что **V** есть либо множество всех $x_k$ с четными $k$, либо множество всех $x_k$ с нечетными $k$. Легко проверить, что оба эти множества действительно являются решениями в $E$ (для $\mathcal{S}$).

Итак, мы имеем:

(65:8) Число решений в $E = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$ для $\mathcal{S}$ (с $x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_{m-1}$ из $(B_m^*)$) есть либо 2, либо 0, в зависимости от того, будет $m$ четным или нечетным.

Следовательно, для такого $E$ ($\subseteq D$) единственного решения нет ни в одном из случаев.

Объединяя (65:Y) и (65:Z), мы видим, что существование единственного решения (в $E$ для $\mathcal{S}$) для всех $E \subseteq D$ в случае конечных множеств полностью описывается: для этих $D$ оно эквивалентно ацикличности или строгой ацикличности, что в данном случае одно и то же. Для бесконечных $D$ мы можем сказать только, что ацикличность есть необходимое условие, а строгая ацикличность — достаточное.

**65.8.3.** Пробел, который здесь образовался, может быть заполнен за счет изучения ациклических, но не строго ациклических (бесконечных) множеств $D$ и их подмножеств $E$. Сравнивая (65:O:a) и (65:O:b), мы видим, что такие $D$ удовлетворяют условию $(B_\infty^*)$. Образуем соответствующее множество $x_0, x_1, x_2, \ldots$ и положим $D^* = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Оно также ациклично, но не строго ациклично; поэтому мы можем изучать его вместо $D$.

Таким образом, наш вопрос превратился в следующий:

(65:9) Предположим, что $D^* = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ удовлетворяет условию $(B_\infty^*)$. Будет ли тогда любое $E \subseteq D^*$ иметь единственное решение (в $E$ для $\mathcal{S}$)?

Ответ на (65:9) не может быть дан немедленно, так как условие $(B_\infty^*)$ описывает отношение $x\mathcal{S}y$ в $D^*$ (т. е. $x_p\mathcal{S}x_q$) лишь не полностью. На соответствующий вопрос для $(B_m^*)$ ($m = 1, 2, \ldots$) в доказательстве (65:Z) был получен отрицательный ответ, но $(B_m^*)$ описывает отношение $x\mathcal{S}y$ на этом множестве (т. е. $x_p\mathcal{S}x_q$) полностью. Итак, ответ на (65:9) требует полного исследования всех возможных форм отношения $x_p\mathcal{S}x_q$, которое удовлетворяет $(B_\infty^*)$. Эта задача оказывается достаточно трудной [2]).

---

[1]) Если $i = m$, заменим его на $i = 0$.

[2]) Она лежит на границе комбинаторики и теории множеств и представляется заслуживающей внимания.

### 65.9. Применение к играм. Дискретность и непрерывность

**65.9.1.** Полученные выше результаты, касающиеся ацикличности и строгой ацикличности, как уже было сказано, не имеют прямого отношения к теории игр.

Что касается строгой ацикличности, то достаточно обратить внимание на ее эквивалентность условию (65:K) (согласно (65:P)) и вспомнить, что в теории игр даже само $D$ (множество всех дележей) не имеет максимумов (т. е. недоминируемых элементов) [1]).

Простая ацикличность тоже исключается, например, уже для существенных игр трех лиц [2]).

Тем не менее существуют ситуации, возникающие при математическом исследовании некоторых игр, когда можно воспользоваться понятием ацикличности. Эти ситуации можно рассматривать в духе первого примера из п. 65.1.1, и, в частности, они обнаруживаются среди примеров, о которых там говорилось.

Так в треугольниках $T$, исследованных в п. 47.5.1, мы имеем ациклическое доминирование, как показывает изучение рис. 55 и 56 [3]). Далее, в множестве $\mathcal{A}$, описанном в п. 55.8.2, имеется ациклическое доминирование, как это видно из критерия (55:Z) [4]).

Наконец, в модели рынка, рассмотренной в § 64, доминирование является ациклическим для случаев монополии и монопсонии, как показывает обсуждение в конце п. 64.2.2 и, в частности, утверждения (64:12), (64:13) [5]). Мы можем усилить впечатление от сделанного там заключительного замечания тем наблюдением, что можно предположить наличие внутренней связи между монополистическими ситуациями в экономике и математическим понятием ацикличности доминирования.

Весьма примечательно поэтому, что во всех этих случаях были обнаружены особенно многочисленные семейства решений. Действительно, в эти решения входят не только числовые параметры, но даже достаточно произвольные кривые или функции. По этому поводу см. п. 47.5.5 и рис. 60 для первого примера и пятое замечание в п. 55.12 — для второго. В третьем примере мы можем только сослаться на математическое исследование частного случая: рынок трех лиц — монополия против дуополии, который мы анализировали в пп. 62.3, 62.4 и 63.4.

**65.9.2.** Упомянутая выше многочисленность решений в ациклических ситуациях представляется естественной, если принять во внимание бесконечность соответствующих $D$ (множества всех рассматриваемых дележей). Наконец, из ацикличности следует единственность решения только для конечных множеств $D$; для бесконечных множеств решающим становится понятие строгой ацикличности (см. последнюю часть п. 65.8, в частности п. 65.8.2). Во всех этих случаях, как легко убедиться, нет строгой ацикличности.

---

[1]) Это выполняется для всех существенных игр. См. (31:M) из п. 31.2.3.

[2]) Читателю предлагается проверить это, например, на диаграмме рис. 33. Легко убедиться, что ($B^*_m$) выполняется (а ($A_m$) — нет) для всех $m \geqq 3$.

[3]) Здесь из доминирования следует обладание большей ординатой.

[4]) Здесь из доминирования следует обладание большей $n$-й компонентой, из чего очевидным образом следует ацикличность.

[5]) Здесь из доминирования следует обладание большей 1-й (или 1*-й) компонентой, откуда ацикличность, очевидно, следует.

Если нет ни монополии, ни монопсонии, т. е. если в обозначениях этой книги $l, m > 1$, то вместо (64:12) и (64:13) применяются (64:10) и (64:11). Легко проверить, что в этом случае ацикличности нет.

Ситуация тем не менее является парадоксальной по следующей причине: модификация понятия полезности, которая будет рассматриваться в п. 67.1.2, может быть применена так, чтобы сделать рассматриваемое множество конечным. Тогда упомянутые ациклические игры должны иметь единственные решения. Далее, эти конечные модификации могут быть сделаны сколь угодно близкими к первоначальным играм. Следовательно, первоначальные ациклические игры со многими решениями (бесконечное $D$!) можно сколько угодно близко аппроксимировать модифицированными ациклическими играми с единственными решениями (конечное $D$!). Как могут при этом единственные решения быть «сколь угодно близкими» к неединственным?

Эта парадоксальная ситуация будет подробно описана в § 67. Анализ, который мы предполагаем там провести, прояснит это отсутствие непрерывности и даст возможность сделать несколько интересных интерпретаций.

## § 66. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

### 66.1. Обобщение. Два этапа теоретического исследования

**66.1.1.** В предыдущих пунктах мы наиболее широко обобщили понятие решения, основанное на отношении $\mathscr{S}$, которое играло роль доминирования. Эти обобщения будут использованы в нашей теории следующим образом: наши понятия дележа, доминирования и решений опираются на первичное понятие полезности. Теперь, если мы хотим изменить формализацию, использованную для описания вторичных понятий, то мы можем попытаться адекватно описать эти изменения при помощи соответствующих обобщений первичных понятий.

Конечно, мы не хотим заниматься обобщениями ради них самих, но имеются некоторые модификации, которые делают нашу теорию более реалистической. Конкретно: мы трактовали понятие полезности довольно узким и догматическим способом. Мы не только предполагали, что она выражается численно (для этого случая еще можно построить приемлемую теорию (см. пп. 3.3 и 3.5)), но что она также заменяема и неограниченно трансферабельна между различными игроками (см. п. 2.1.1). Мы поступали так по техническим причинам: числовые полезности были необходимы для теории игр двух лиц с нулевой суммой — в частности, благодаря той роли, которую должны играть там ожидаемые значения. Заменяемость и трансферабельность были необходимы в теории игр $n$ лиц с нулевой суммой для того, чтобы ввести дележи как векторы с числовыми компонентами и характеристическую функцию с числовыми значениями. Все эти необходимости встречаются в неявном виде и во всех последующих конструкциях, а поэтому, в конце концов и в общей теории игр $n$ лиц.

Таким образом, представляется желательной модификация понятия полезности в направлении ее обобщения; но в то же время ясно, что для осуществления этой программы придется преодолеть определенные трудности.

**66.1.2.** Построение нашей теории игр очевидным образом разбивается на два различных этапа: первый, состоящий из исследования игр двух лиц с нулевой суммой и ведущий к определению их значения, и второй, касающийся игр $n$ лиц с нулевой суммой и основанный на характеристической функции, определенной с помощью значений игр двух лиц. Ранее мы подчеркивали, каким образом на каждом из этих этапов

используются специфические свойства понятия полезности. Поэтому если обобщить, изменить или отбросить некоторые из этих свойств, то нам придется изучать эффект таких изменений на каждом этапе. Это указывает, следовательно, на необходимость раздельного анализа каждого из этих этапов.

### 66.2. Обсуждение первого этапа

**66.2.1.** Трудности обобщения на первом этапе очень серьезны. Теория игр двух лиц с нулевой суммой, изложенная в главе III, широко пользуется численным характером полезности.

Скажем более конкретно. Трудно понять, как может быть приписано игре определенное значение, если для каждого игрока нет возможности во всех случаях определить, какая из различных ситуаций, которые могут возникнуть, предпочтительнее с его точки зрения. Это означает, что индивидуальные предпочтения должны определять на полезностях линейное упорядочение.

Далее, нельзя обойтись и без операции смешивания полезностей с помощью числовых вероятностей. Мы видели, что правила игры могут в явном виде требовать подобных операций, если в них предусмотрены ходы случая. Но даже когда их нет, теория главы III приводит, вообще говоря, к применению смешанных стратегий с теми же последствиями (см. § 17).

Теперь хорошо известно, что из линейной упорядоченности полезностей не следует их числового характера. Однако в п. 3.5 мы видели, что из линейной упорядоченности полезностей вместе с возможностью их смешиваний уже вытекает числовой характер полезности.

Таким образом, в данный момент мы не сможем приписать значения играм двух лиц с нулевой суммой, если мы не располагаем численной полезностью.

В игре $n$ лиц характеристическая функция определяется с помощью значений различных (вспомогательных) игр двух лиц с нулевой суммой. Наше сведение общих игр $n$ лиц к играм с нулевой суммой вдобавок еще использует трансферабельность полезности от одного игрока к другому. Действительно, конструкциям, подобным $\mathcal{K}_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k$ из п. 56.2.2, едва ли можно придать какой-либо иной смысл. Итак, мы в настоящий момент не можем избежать чисто аппаратной связи определения характеристической функции в игре $n$ лиц с численным характером полезности.

Значения $\mathrm{v}(S)$ характеристической функции такой игры — значения для соответствующих множеств (коалиций) игроков $S$. Следовательно, наше заключение можно сформулировать следующим образом: наш общий метод приписывания некоторого значения $\mathrm{v}(S)$ каждой возможной коалиции игроков существенно зависит от числовой природы полезности, и мы в настоящее время не в состоянии это изменить.

Мы уже отмечали раньше, что предположение о числовой природе полезности не так конкретно, как обычно принято считать (см. рассуждения в § 3). Кроме того, мы можем избежать всех концептуальных трудностей, относя наши рассмотрения к строго денежной экономике. Тем не менее предпочтительнее было бы освободить нашу теорию от этих ограничений; однако мы должны признать, что пока не располагаем возможностью сделать это.

**66.2.2.** Несмотря на указанный общий недостаток, имеется много игр, где трудности в определении характеристической функции не являют-

ся серьезными. Так, примеры из пп. 26.1 и 57.3 таковы, что характеристические функции можно определить непосредственно, без реальной необходимости обращения к теории игр двух лиц с нулевой суммой. Конечно, эти примеры сконструированы так, чтобы получить известные, заранее предписанные характеристические функции,— следовательно, легкость, с которой они могут быть получены, едва ли удивительна. Однако существуют и другие, более важные, примеры того же самого явления: так, определение характеристических функций не вызывает трудностей в теории простых игр из главы X [1]). Далее, различные модели рынков, рассмотренные в пп. 61.2—64.2, все имеют характеристические функции, которые вычисляются легко и непосредственно.

В этих случаях можно легко заменить числовые полезности более общими понятиями. Мы предполагаем сделать это по другому поводу.

### 66.3. Обсуждение второго этапа

**66.3.1.** Если характеристическая функция принимается как заданная, то мы можем перейти ко второму этапу.

Здесь необходимость численной полезности может быть полностью обойдена. Мы не предполагаем описывать это во всех деталях, так как предмет в целом еще недостаточно созрел для полной математической формализации. Действительно, первый этап осложнен неразрешенными трудностями, которые описаны выше. Однако имеется некоторая надежда на то, что унифицированная форма теории, контуры которой мы в данный момент видим, сможет привести нас к желаемой цели.

Поэтому мы дадим лишь некоторые общие указания, касающиеся исследования второго этапа.

Начнем с того, что отказ от трансферабельности полезности, так же как и отказ от ее числового характера, приводит к невозможности непосредственного определения таких понятий, как игры с нулевой суммой или игры с постоянной суммой. Следовательно, лучше всего иметь дело сразу с общими играми.

Рассмотрим поэтому общую игру $n$ лиц. Так как мы располагаем теорией главы XI, мы можем забыть о ее возникновении из теории игр с нулевой суммой и попытаемся непосредственно распространить ее на более общий случай нечисловых и нетрансферабельных полезностей.

Дележи

$$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\}$$

по-прежнему останутся векторами, но их компоненты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ могут уже не быть числами. Надо отметить, что если мы откажемся от числового характера полезности, то лучше всего будет предположить, что каждый участник $i$ $(= 1, \ldots, n)$ имеет свою собственную область индивидуальных полезностей $\mathcal{U}_i$, т. е. $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$, вообще говоря, будут различными. В этой модели каждая компонента $\alpha_i$ должна принадлежать $\mathcal{U}_i$.

Следует отметить, что, даже если все полезности числовые, т. е. если $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ совпадают друг с другом и с множеством всех вещественных чисел, мы тем не менее можем опустить предположение о трансферабельности. Можно также рассматривать случай, когда трансферабельность имеет место, но подчинена некоторым ограничениям. Соответствующий пример будет разобран в § 67.

[1]) Эти игры определяются указанием выигрывающих коалиций, и в этом уже содержится неявное определение характеристической функции.

**66.3.2.** Теперь надо рассмотреть ограничения, налагаемые на компоненты $\alpha_i$. Они будут двух видов. Во-первых, область всех дележей была определена в п. 56.8.2 посредством

$$\alpha_i \geqq \mathrm{v}((i)) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{66:1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq \mathrm{v}((1, \ldots, n))\text{ [1]}. \tag{66:2}$$

Во-вторых, мы определяли доминирование с помощью понятия эффективности, основанной на неравенстве

$$\sum_{i \in S} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(S), \tag{66:3}$$

которое есть (30:3) из п. 30.1.1.

Все эти неравенства принадлежат некоторому общему типу: дано некоторое множество $T$ ($T = (i)$ в (66:1), $T = (1, \ldots, n) = I$ в (66:2) и $T = S$ в (66:3)) и требуется, чтобы в дележе $\vec{\alpha}$ это множество (коалиция) $T$ находилось бы не в лучшем положении (в (66:1)) или не в худшем (в (66:2) и (66:3)), чем при получении $\mathrm{v}(T)$.

Положение коалиции $T$, т. е. синтез положений всех ее участников, характеризуется во всех этих неравенствах суммой компонент дележа $\sum_{k \in T} \alpha_k$. Для нечисловых полезностей области $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ могут отличаться друг от друга и, кроме того, для них может не существовать понятия сложения, так что образование, подобное $\sum_{k \in T} \alpha_k$, может оказаться бессмысленным. Но, даже если полезности числовые, использование $\sum_{k \in T} \alpha_k$ в таком контексте, очевидно, равносильно предположению их неограниченной трансферабельности. В самом деле, положение коалиции можно описать при помощи суммы выплат ее членам без ссылки на индивидуальные полезности только в том случае, если эти члены в состоянии распределить между собой эту сумму любым способом, с которым все они согласны, т. е. если нет никаких физических препятствий к передаче.

Поэтому, вообще говоря, мы должны будем воздержаться от использования $\sum_{k \in T} \alpha_k$. Вместо этого мы должны ввести область полезностей для составного игрока, состоящего из всех членов данной коалиции $T$. Обозначим эту область через $\mathcal{U}(T)$. Ясно, что $\mathcal{U}((k))$ есть просто $\mathcal{U}_k$. Область $\mathcal{U}(T)$ должна получиться в результате некоторого синтеза областей $\mathcal{U}_k$ для всех $k \in T$. Совсем нетрудно построить для этого процесса соответствующий математический алгоритм, однако мы предполагаем обсудить этот вопрос в другой раз.

Набор чисел $\alpha_k$, где $k \in T$, так же как и значение $\mathrm{v}(T)$ характеристической функции, должны быть элементами этой системы. Неравенства (66:1), (66:2) и (66:3) будут относиться тогда к предпочтениям в такой системе полезностей.

[1] Мы предпочитаем пользоваться здесь (56:10) вместо альтернативно возможного (56:25) из (56:I:b) в п. 56.12.

### 66.4. Желательность унификации двух этапов

**66.4.** Надеясь, что читатель не сочтет анализ в п. 66.3 слишком схематичным, мы покажем теперь, как можно получить желательную унификацию двух наших этапов. Наша теория игр двух лиц с нулевой суммой фактически опирается на те же общие принципы, что и последующая система дележей, доминирования и решений для игр $n$ лиц с нулевой суммой и даже для общих игр $n$ лиц. В частности, решающее обсуждение взаимной связи различных стратегий в игре двух лиц с нулевой суммой, проведенное в пп. 14.5, 17.8 и 17.9 (т. е. анализ понятия оптимальной стратегии), во многих отношениях аналогично анализу понятия доминирования дележей.

Нам представляется, что слабость построенной нами теории лежит в необходимости проходить через две стадии: сначала получить решение для игр двух лиц с нулевой суммой, а затем, используя это решение, определить характеристическую функцию, чтобы иметь возможность построить на ее основе решение общей игры $n$ лиц. Общий опыт математических и физических наук показывает, что такой двухшаговый процесс с промежуточным звеном, представленным в данном случае характеристической функцией, имеет два существенных аспекта. На ранних ступенях исследования он может оказаться успешным, так как расчленяет трудности. На дальнейших ступенях, однако, где желательна полная концептуальная общность, могут встретиться затруднения. Требование получения строго определенных количеств в середине нашей процедуры (в нашем случае — для характеристических функций) может оказаться ненужной формальностью, вносящей в главную задачу чисто внешние трудности.

Применим это к нашему опыту с играми. Мы должны расчленить трудности для их преодоления и рассмотреть последовательно вполне определенные в узком смысле игры двух лиц с нулевой суммой, вполне определенные в широком смысле игры двух лиц с нулевой суммой, игры $n$ лиц с нулевой суммой, общие игры $n$ лиц. Однако все эти шаги, кроме двух, в конце концов, сливаются в общей теории: остаются только игры двух лиц с нулевой суммой и общие игры $n$ лиц. Настаивание на характеристических функциях заставляет получать по поводу игр двух лиц с нулевой суммой промежуточные результаты более сильные, чем это необходимо для игр $n$ лиц [1]). Конечно, мы были способны удовлетворить этим требованиям в случае числовой, неограниченно трансферабельной полезности. Однако все это изменяется, когда мы отказываемся от таких предположений о полезности. Представляется более правдоподобным, что наши трудности с играми $n$ лиц можно приписать тому, что мы продолжаем настаивать на этой частной модели для игр двух лиц с нулевой суммой. Имеющаяся у нас техническая процедура заставляет нас настаивать на этом, но такая настойчивость может тем не менее оказаться неуместной.

Единое исследование всей теории игр $n$ лиц — без искусственного (как это теперь оказывается) звена, состоящего из игр с нулевой суммой и характеристических функций,— может, следовательно, в конце концов, помочь избавиться от этих трудностей.

---

[1]) Для игр двух лиц с нулевой суммой мы получаем единственное значение, т. е. дележ. Для общих игр $n$ лиц (так же как и для игр с нулевой суммой) мы имеем только (обычно не единственное) решение, и даже отдельное решение есть множество дележей!

## § 67. ОБСУЖДЕНИЕ ПРИМЕРА

### 67.1. Описание примера

**67.1.1.** Мы сейчас рассмотрим пример, в котором понятия полезности и трансферабельности модифицированы. Эти модификации не представляют собой значительного расширения нашей точки зрения на эти понятия. Наш пример представляет интерес скорее потому, что он допускает применение результатов, касающихся ацикличности, и приводит к выводам, которые проливают новый свет на вопросы, затронутые в конце п. 65.9. В частности, можно надеяться, что подобные процедуры позволят построить более адекватную математическую модель для таких явлений, как торговое соглашение.

**67.1.2.** Модификация, которую мы рассматриваем, состоит в следующем. Предположим, что полезность (или ее денежный эквивалент) состоит из неделимых единиц. Таким образом, мы не оспариваем ее числового характера, но требуем, чтобы ее значение, выраженное в надлежащих единицах, было целым. Тем самым передаваемые количества также необходимо ограничиваются целыми числами, но дальнейших ограничений не делается. Мы предполагаем, как и прежде, пользоваться характеристической функцией, но тоже с целыми значениями. Понятия доминирования и решения остаются без изменений.

Если такую точку зрения применить к общим играм одного и двух лиц, то никаких существенных изменений не произойдет, т. е. все остается, по существу, таким же, как и в нашей старой теории. Поэтому нет необходимости подробно останавливаться на этих случаях. С другой стороны, игры трех лиц приобретут некоторые новые черты, даже в своей старой, нулевой форме. При этом возникнут некоторые весьма специфические трудности, которые, как окажется, представляют значительный интерес, но еще недостаточно изучены. Поэтому мы предпочтем отложить их анализ до другого случая.

Это исключает исчерпывающее исследование общей игры трех лиц в новой модели. Мы, однако, проанализируем некоторый частный случай, который имеет прямое отношение к природе торговых соглашений. Это — рынок трех лиц, состоящий из одного продавца и двух покупателей.

**67.1.3.** При предварительном анализе этого случая мы получили различные решения, зависящие от того, может ли происходить только одна (индивидуальная) сделка или несколько, а также от относительной силы двух наших покупателей. Эти решения описаны в (62:C) из п. 62.5.2 и в (63:E) из п. 63.5. Во всех этих случаях оказалось, что общее решение состоит из двух частей: (62:18) (или (62:20), (62:21) и (63:30)) и (62:19) (или (62:23) и (63:31)). Наше исследование этого случая показало, что части типа (62:18) соответствуют ситуации, в которой оба покупателя конкурируют друг с другом, в то время как части типа (62:19) соответствуют ситуации, когда они образуют коалицию против продавца. Часть типа (62:18) определена однозначно и, по существу, находится в согласии с обычными, основанными на здравом смысле экономическими представлениями об этом предмете. Часть типа (62:19), с другой стороны, определяется с помощью весьма произвольных функций. Как мы видели в п. 62.6.2, эти функции соответствуют различным возможным правилам разделения полученного выигрыша между объединенными игроками. Тем самым они утверждают нормы их поведения внутри коалиции. Наше настоящее исследование имеет целью получить некоторую дополнитель-

ную информацию, касающуюся функционирования этой части социального механизма.

Для того чтобы сделать это эффективно, целесообразно исключить из рассмотрения все те элементы, которые в этом отношении несущественны. Таким образом, мы хотим избавиться от части нашего решения типа (62:18). Мы знаем из пп. 62.5.2 и 62.6.1, что эта часть имеет наименьший объем и может быть фактически вовсе опущена (см. сноску 3 на стр. 572)), если в принятых обозначениях $v = w$. Это означает, что может произойти только одна (неделимая) сделка и что оба покупателя имеют равные силы. Решение тогда описывается соотношениями (62:20) и (62:19) из п. 62.5 (соотношение (62:20) становится излишним, см. выше) или рис. 77.

Итак, мы предположим в схеме п. 66.1.2 $v = w$. Мы можем сделать дальнейшее упрощение, без каких-либо значительных потерь, положив «полезность альтернативного использования товара для продавца» $u = 0$. Таким образом, равенства (62:2) — (62:4) из п. 62.1.2, определяющие характеристическую функцию, упростятся до

(67:1) $$\begin{cases} \mathrm{v}((1)) = \mathrm{v}((2)) = \mathrm{v}((3)) = 0, \\ \mathrm{v}((1,\ 2)) = \mathrm{v}((1,\ 3)) = w,\ \mathrm{v}((2,\ 3)) = 0, \\ \mathrm{v}((1,\ 2,\ 3)) = w. \end{cases}$$

Дележи теперь определяются как $\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}\}$, где

(67:2:a) $$\alpha_1 \geqq 0, \quad \alpha_2 \geqq 0, \quad \alpha_3 \geqq 0.$$

(67:2:b) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leqq w.$$

Замечание. Заметим, что мы используем (67:2:b) с $\leqq$, а не с $=$. Эта точка зрения принята при анализе (66:2) из п. 66.3.2. В терминологии (56:I:b) из п. 56.12 это означает, что используется (56:10) и не используется (56:25). Это делается по той причине, что первое условие является первоначальным (см., например, п. 56.8.2), а эквивалентность, использованная в п. 56.12, в данной модели не имеет места.

Мы увидим в первом замечании в п. 67.2.3, что $\leqq$ и $=$ из (67:2:b) должны привести к различным результатам; однако эта разница сгладится в общей картине. Кроме того, использование $=$ вместо $\leqq$ в (67:2:b) привело бы к результатам, отличающимся лишь второстепенными деталями от тех, которые мы собираемся получить.

**67.1.4.** Предположим теперь, что все эти величины, т. е. данное $w$ и все допустимые $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ из (67:2:a) и (67:2:b), являются целыми.

Доминирование определим, как и прежде, т. е. посредством п. 56.11.1; это означает, что мы повторяем определения из 30.1.1 дословно.

Поэтому необходимо определить характер множеств $S \subseteq I = (1,\ 2,\ 3)$ в связи с их ролью в определении доминирования. Легко показать, что множества

$$S = (1,\ 2), \quad (1,\ 3)$$

являются заведомо необходимыми, а все остальные — заведомо не необходимыми [1]). Таким образом, мы можем воспользоваться опреде-

[1]) Условия заведомой необходимости и заведомой ненеобходимости были введены в п. 31.1 и снова рассматривались в п. 59.3.2. Так как наша точка зрения опять изменилась (см. выше, особенно замечание), необходимо вернуться к рассмотрению этих понятий. Проще всего определить их заново.

На основании (67:2:a) и условия (30:3) из п. 30.1.1 каждое $S$, для которого $\mathrm{v}(S) = 0$, является заведомо не необходимым. Это распространяется на $S = (1),\ (2),\ (3),\ (2,\ 3)$. Обращение к (67:1), (67:2:a), (67:2:b) дает нам $\alpha_1 + \alpha_2 \leqq w = \mathrm{v}((1,\ 2))$, $\alpha_1 + \alpha_3 \leqq w = \mathrm{v}((1,\ 3))$; следовательно, множества $S = (1,\ 2),\ (1,\ 3)$ заведомо необходимы. Так как (31:C) из п. 31.1.3, очевидно, остается в силе, это делает множество $S = (1,\ 2,\ 3)$ заведомо не необходимым.

лением доминирования относительно $S = (1, 2), (1,3)$. Следовательно, $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ означает, что

(67:3:a) $$\alpha_1 > \beta_1$$

и

(67:3:b) $$\alpha_2 > \beta_2 \quad \text{или} \quad \alpha_3 > \beta_3.$$

Итак, из доминирования следует (67:3:a); поэтому отношение доминирования ациклично. (См. соответствующее обсуждение в п. 65.9.) Кроме того, определяемая неравенствами (67:2:a), (67:2:b) область дележей $\vec{\alpha}$ конечна, так как компоненты $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ должны быть целыми [1].

Теперь мы можем применить (65:X) из п. 65.7.2. Мы получаем, что существует единственное решение $\mathbf{V}_0$, которое описывается формулами (65:2) и (65:3) из этого пункта.

## 67.2. Решение и его интерпретация

**67.2.1.** Для того чтобы применить формулы (65:2) и (65:3) из п. 65.7.2, мы должны определить множества $B_i$, $C_i$, определенные в начале п. 65.7.1. Сделаем это для $B_1$, $C_1$.

$B_1$ есть множество тех $\vec{\alpha}$, которые не могут быть доминируемыми. Для того чтобы доминировать $\vec{\alpha}$, мы должны увеличить $\alpha_1$, а также и $\alpha_2$ или $\alpha_3$, не нарушая (67:2:a) и (67:2:b) из п. 67.1.3. Эти числа можно увеличить не меньше чем на 1, в то время как оставшаяся компонента $\alpha_2$ или $\alpha_3$ может быть уменьшена до 0. Следовательно, $\vec{\alpha}$ может быть доминировано, если

$$\text{либо } (\alpha_1+1)+(\alpha_2+1) \leqq w, \qquad \text{либо } (\alpha_1+1)+(\alpha_3+1) \leqq w.$$

Итак, $B_1$ определяется неравенствами

(67:4) $$(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1) > w, \qquad (\alpha_1+1)+(\alpha_3+1) > w.$$

С помощью (67:2:a) и (67:2:b) мы получаем $\alpha_3 < 2$, $\alpha_2 < 2$, т. е. $\alpha_2, \alpha_3 = 0, 1$. Теперь (67:4) в соединении с (67:2:a) и (67:2:b) дает следующие возможности:

67:A) $$\alpha_2 = \alpha_3 = 0, \qquad \alpha_1 = w, \quad w-1;$$

(67:B) $$\left\{\begin{matrix} \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0 \\ \text{или} \\ \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1 \end{matrix}\right\}, \quad \alpha_1 = w-1;$$

(67:C) $$\alpha_2 = \alpha_3 = 1, \qquad \alpha_1 = w-2.$$

$C_1$ есть множество тех дележей $\vec{\alpha}$, которые доминируются элементами из $B_1$, т. е дележами из (67:A)—(67:C). Легко проверить, что они характеризуются посредством

(67:D) $$\left\{\begin{matrix} \alpha_2 = 0 \\ \text{или} \\ \alpha_3 = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \alpha_1 \leqq w-2.$$

---

[1]) Это, конечно, не имело места в первоначальной непрерывной модели.

**67.2.2.** Теперь лучше отклониться от схемы (65:2), (65:3) из п. 65.7.2, т. е. не продолжать определения $B_2$, $C_2$, $B_3$, $C_3$, . . ., а воспользоваться индуктивным процессом, который больше подходит в данном конкретном случае.

Рассмотрим $\vec{\alpha}$, для которых

(67:E) $$\alpha_2=0 \quad \text{или} \quad \alpha_3=0.$$

Это соответствует случаям (67:A), (67:B), (67:D). Мы знаем, что из этих дележей $\mathbf{V}_0$ содержит в точности те, которые удовлетворяют (67:A), (67:B). Остаются те $\vec{\alpha}$, для которых

(67:F) $$\alpha_2,\ \alpha_3 \geqq 1.$$

Следовательно, они не доминируются дележами (67:A), (67:B). Итак, мы образуем $\mathbf{V}_0$, беря (67:A) и (67:B) вне области (67:F) и повторяя процесс нахождения решения в (67:F).

Сравним (67:F) с (67:2:a) и (67:2:b) из п. 67.1.3. Разница состоит здесь только в том, что $\alpha_2$ и $\alpha_3$ возрастают на 1. Следовательно, $w$ можно заменить на $w-2$. Поэтому $\mathbf{V}_0$ содержит еще

(67:G) $$\alpha_2=\alpha_3=1, \quad \alpha_1=w-2,\ w-3;$$

(67:H) $$\left\{\begin{matrix}\alpha_2=2, & \alpha_3=1\\ & \text{или} & \\ \alpha_2=1, & \alpha_3=2\end{matrix}\right\}, \quad \alpha_1=w-3,$$

и мы должны повторить этот процесс нахождения решения при

(67:I) $$\alpha_2,\ \alpha_3 \geqq 2.$$

Повторение процесса присоединяет к $\mathbf{V}_0$ дележи

(67:J) $$\alpha_2=\alpha_3=2, \quad \alpha_1=w-4,\ w-5;$$

(67:K) $$\left\{\begin{matrix}\alpha_2=3, & \alpha_3=2\\ & \text{или} & \\ \alpha_2=2, & \alpha_3=3\end{matrix}\right\}, \quad \alpha_1=w-5$$

и требует повторения процесса нахождения решения при

(67:L) $$\alpha_2,\ \alpha_3 \geqq 3,$$

и т. д. и т. д.

Итак, $\mathbf{V}_0$ состоит из (67:A), (67:B), (67:G), (67:H), (67:J), (67:K). Эти множества можно охарактеризовать следующим образом:

(67:M) $$\alpha_1=0,\ \ldots,\ w;$$

(67:N) $$\alpha_2=\alpha_3=\frac{w-\alpha_1}{2}, \text{ если } w-\alpha_1 \text{ четно;}$$

(67:O) $$\left\{\begin{matrix}\alpha_2=\alpha_3=\dfrac{w-1-\alpha_1}{2}, & \\ \alpha_2=\dfrac{w+1-\alpha_1}{2}, & \alpha_3=\dfrac{w-1-\alpha_1}{2}, \\ \alpha_2=\dfrac{w-1-\alpha_1}{2}, & \alpha_3=\dfrac{w+1-\alpha_1}{2},\end{matrix}\right\} \text{ если } w-\alpha_1 \text{ нечетно.}$$

**67.2.3.** Результаты, содержащиеся в (67:M) — (67:O), позволяют сделать следующие замечания.

Первое. Значениями $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ в этом решении будут $w$ и $w-1$. Следовательно, мы не можем заменить $\leqq$ в (67:2:b) из п. 67.1.3 на $=$, и результаты, установленные в (56:I:b) из п. 56:12, здесь неверны. Максимум социальной выгоды не обязательно достигается, и это оказывается прямым следствием существования неделимых единиц полезности [1]).

Второе. Такая «дискретная» шкала полезности сходится к обычной непрерывной, если $w \to \infty$. (См. соответствующие рассуждения в п. 19.12, касающиеся дискретных и непрерывных раскладов в покере.) Разница между $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ и упомянутым выше $w$ не может превосходить 1. Следовательно, когда $w \to \infty$, она становится все более и более незначительной, и в этом смысле ситуация приближается к той, которая имеет место в непрерывном случае.

Третье. $\alpha_2$ и $\alpha_3$ отличаются друг от друга не более чем на 1. Следовательно, разница между ними становится несущественной при $w \to \infty$. Значит, когда мы приближаемся к непрерывному случаю, решение принимает такой вид:

(67:P) $$0 \leqq \alpha_1 \leqq w;$$

(67:Q) $$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{w-\alpha_1}{2}.$$

Как отмечалось в первой части п. 67.1.3, это решение надо сравнить с (62:19) из п. 62.5.1 при значениях $u = 0$, $v = w$. Эти два решения действительно похожи, но наше решение покрывает лишь один частный случай (62:19): монотонно убывающие функции $\alpha_1$, фигурирующие там, совпадают друг с другом и с $\frac{w-\alpha_1}{2}$.

Эти функции описывают, как было рассмотрено в п. 62.6.2, правила дележа, выработанные в результате соглашения двух покупателей, когда они образуют коалицию (эти правила даются условиями (62:19)). В непрерывном случае эти правила в высшей степени произвольны, но сейчас, в дискретном случае, они оказались вполне определенными: оба покупателя должны рассматриваться совершенно одинаково.

Каков смысл этой симметрии? Являются ли другие правила распределения, т. е. другие выборы функций в (62:19), в «дискретном» случае фактически невозможными?

## 67.3. Обобщение. Различные дискретные шкалы полезностей

**67.3.1.** Для того чтобы ответить на поставленные выше вопросы, мы должны попытаться уничтожить симметрию (между двумя покупателями), но сохранить «дискретность».

Это будет сделано в результате изменения модели п. 67.1, при котором покупателю 2 приписывается значение неделимой единицы полезности, отличное от значения, приписываемого покупателю 3. Именно, мы будем считать, что числа $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — целые, а число $\alpha_3$ — целое четное. Все остальное из п. 67.1 мы оставим без изменения.

Теперь проведем рассуждения, аналогичные проведенным в п. 67.2. В соответствии с этим начнем с определения множеств $B_1$, $C_1$ из п. 65.7.

---

[1]) Ср. со сноской 2 на стр. 519.

$B_1$ есть множество тех $\vec{\alpha}$, которые не могут быть доминируемы. Для того чтобы доминировать $\vec{\alpha}$, надо увеличить $\alpha_1$, а также $\alpha_2$ или $\alpha_3$, не нарушая (67:2:a) и (67:2:b) из п. 67.1.3. Это увеличение равно 1 (для $\alpha_1$, $\alpha_2$) или 2 (для $\alpha_3$), в то время как одна из оставшихся компонент $\alpha_2$, $\alpha_3$ может быть уменьшена до 0. Следовательно, $\vec{\alpha}$ может быть доминируемо, если либо $(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)\leqq w$, либо $(\alpha_1+1)+(\alpha_3+2)\leqq w$. Итак, $B_1$ определяется следующим образом:

(67:5) $$(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)>w,\quad (\alpha_1+1)+(\alpha_3+2)>w.$$

Ввиду (67:2:a) и (67:2:b) отсюда следует, что $\alpha_3<2$, $\alpha_2<3$, т. е. $\alpha_2=0, 1, 2$, $\alpha_3=0$. Теперь (67:5) вместе с (67:2:a) и (67:2:b) даст следующие возможности:

(67:R) $$\alpha_2=0,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w,\ w-1;$$

(67:S) $$\alpha_2=1,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w-1,\ w-2;$$

(67:T) $$\alpha_2=2,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w-2.$$

$C_1$ есть множество тех $\vec{\alpha}$, которые доминируются элементами из $B_1$, т. е. теми, которые удовлетворяют условиям (67:R) — (67:T). Легко проверить, что они характеризуются соотношениями

(67:U) $$\alpha_2=0,\quad \alpha_1\leqq w-2;$$

(67:V) $$\alpha_2=1,\quad \alpha_1\leqq w-3.$$

**67.3.2.** Воспроизведем теперь вариант п. 67.2.2. Вместо определения $B_2$, $C_2$, $B_3$, $C_3$, ... мы используем иной индуктивный процесс.

Рассмотрим те $\vec{\alpha}$, для которых

(67:W) $$\alpha_2=0,\ 1.$$

Эти дележи как раз составляют множества (67:R), (67:S), (67:U) и (67:V)[1]. Мы знаем, что $\mathbf{V}_0$ содержит из них (67:R) и (67:S). Остаются те $\vec{\alpha}$, для которых

(67:X) $$\alpha_2\geqq 2$$

и которые поэтому не доминируются дележами (67:R), (67:S). Так мы составляем $\mathbf{V}_0$, беря (67:R) и (67:S) вне (67:X) и повторяя процесс нахождения решения в (67:X).

Сравним (67:X) с (67:2:a) и (67:2:b) из п. 67.1.3. Единственная разница состоит здесь в том, что $\alpha_2$ увеличилось на 2. Следовательно, с $w$ можно обращаться так, как будто это есть $w-2$[2]. Итак, $\mathbf{V}_0$ содержит теперь еще

(67:Y) $$\alpha_2=2,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w-2,\ w-3;$$

(67:Z) $$\alpha_2=3,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w-3,\ w-4,$$

и мы должны повторить процесс нахождения решения в

(67:A′) $$\alpha_2\geqq 4.$$

---

[1] Заметим, что $\alpha_3$ не может равняться 1, так как это число должно быть четным.

[2] Заметим, что есть различие между этим и соответствующим ему шагом в п. 67.2.2, следующим за (67:F).

Повторение этого процесса присоединяет к $\mathbf{V}_0$ дележи

(67:B′) $\alpha_2=4,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w-4,\ w-5;$

(67:C′) $\alpha_2=5,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w-5,\ w-6$

и требует продолжения процесса нахождения решения в области

(67:D′) $\alpha_2\geqq 6,$

и т. д. и т. д.

Итак, $\mathbf{V}_0$ состоит из (67:R), (67:S), (67:Y), (67:Z), (67:B′), (67:C′), ... Эти множества можно охарактеризовать следующим образом:

(67:E′) $\alpha_1=0,\ 1,\ \ldots,\ w;$

(67:F′) $\alpha_2=w-\alpha_1,\ w-1-\alpha_1$ (второе исключается, если $\alpha_1=w$);

(67:G′) $\alpha_3=0.$

**67.3.3.** Результаты (67:E′) — (67:G′) позволяют сделать следующие замечания.

Первое и второе. По поводу суммы $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ и ее связи с $w$ мы можем дословно повторить соответствующие замечания из п. 67.2.3.

Третье. Здесь положение коренным образом отличается от случая из п. 67.2.3. Мы имеем тождественно $\alpha_3=0$. При приближении к непрерывному случаю, т. е. при $w\to\infty$, решение стремится к следующему виду:

(67:H′) $0\leqq\alpha_1\leqq w;$

(67:I′) $\alpha_1=w-\alpha_1;$

(67:J′) $\alpha_3=0.$

Повторяя сравнение с (62:19) из п. 62.5.1, как это было сделано в соответствующей части п. 67.2.3, мы видим, что теперь ситуация такова: монотонные функции (62:19), которые описывают правила распределения между объединившимися покупателями, сейчас снова полностью определены, но в то же время мы обнаруживаем (вместо одинакового положения, которое эти игроки занимали в п. 67.2.3), что преимущество перешло полностью покупателю 2!

Мы теперь должны сравнить эти результаты с соответствующими результатами из п. 67.2.3 и интерпретировать явление в целом.

## 67.4. Выводы о соглашении

**67.4.** Выводы из результатов пп. 67.2.3, 67.3.3 очевидны. В первом случае оба покупателя имеют одинаковые возможности различения, т. е. равные единицы полезности, и правило распределения трактовало их одинаково. Во втором случае покупатель 2 имеет бóльшие возможности различения, чем покупатель 3, именно, единица полезности 2 составляет половину единицы для 3, и в правилах распределения преимущество полностью перешло к покупателю 2. Ясно, что если они поменяются возможностями, то и с правилами произойдет то же самое. Мы можем сказать: в правиле распределения преимущество объединившихся покупателей делится между ними поровну, если они имеют одинаково тонкие шкалы полезностей, в противном случае это преимущество целиком переходит к тому покупателю, у которого шкала полезностей тоньше.

Замечание. Можно рассмотреть и более тонкий вариант: мы можем приписать $\alpha_2$ и $\alpha_3$ шкалы переменной плотности. В этом случае мы будем все еще иметь единственное решение по тем же причинам, что и раньше. Связь между $\alpha_2$ и $\alpha_3$, если ее изображать на плоскости $\alpha_2$, $\alpha_3$, есть комбинация трех типов, о которых было сказано выше: симметричного для $\alpha_2$, $\alpha_3$, т. е. изображаемого прямой, параллельной биссектрисе координатного угла; параллельного оси $\alpha_3$; параллельного оси $\alpha_2$.

Фактически можно построить любую желательную комбинацию этих элементов, выбирая соответствующим образом шкалы $\alpha_2$ и $\alpha_3$. При этом любая кривая может быть сколь угодно хорошо аппроксимирована. Таким образом, восстанавливается первоначальная общность непрерывного случая.

Мы, однако, не предполагаем рассматривать здесь этот вопрос и родственные ему.

Это верно в дискретном случае, когда каждый участник имеет определенную шкалу полезности, и правило распределения (т. е. решение) определено однозначно. В непрерывном случае тонкость шкалы полезности не определена, и правила распределения, как мы уже видели, могут быть выбраны многими различными способами.

Итак, здесь мы впервые видим, как способность игрока к различению (именно, тонкость его шкалы полезности) оказывает определенное влияние на его положение при соглашении с союзником [1]). Следовательно, можно ожидать, что проблемы такого типа могут быть решены полностью, когда можно будет должным образом и систематически учесть связанные с ними психологические условия. Рассуждения в последнем параграфе можно считать первой попыткой соответствующего математического подхода.

---

[1]) Это происходит, конечно, только в тех случаях, когда теория с непрерывными полезностями допускает несколько различных правил распределения между союзниками, что в свою очередь бывает, очевидно, в том случае, когда допускаются соглашения.

*Приложение*

# АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ПОЛЕЗНОСТИ

## А.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

**А.1.1.** Мы докажем в этом приложении, что аксиомы о полезности, перечисленные в п. 3.6.1, определяют полезность как число с точностью до линейного преобразования [1]. Более точно: мы докажем, что эти аксиомы обеспечивают существование хотя бы одного отображения (в действительности их бесконечно много) полезностей на вещественные числа в смысле п. 3.5.1, со свойствами (3:1:а) и (3:1:b); мы докажем также, что любые два таких отображения получаются друг из друга линейным преобразованием, т. е. связаны соотношением (3 : 6).

Предварительно мы предпримем анализ аксиом (3:А) — (3:С) из п. 3.6.1; два следующих замечания об этих аксиомах могут быть полезными во избежание возможного неправильного понимания.

**А.1.2.** Первое замечание состоит в следующем. Эти аксиомы, именно группа (3:А), характеризуют понятие *линейного упорядочения*, основанного на отношениях $>$, $<$. Мы не аксиоматизируем отношение $=$, но интерпретируем его как *полную индентичность*. Альтернативная процедура — аксиоматизировать равенство тоже — была бы математически вполне законной; но таковой является и наша процедура. Эти две процедуры математически эквивалентны, и выбор той или иной из них является делом вкуса. Практика в соответствующей математической и логической литературе не является единообразной, и мы поэтому будем придерживаться простейшей из них.

Второе замечание следующее. Как указывалось в начале п. 3.5.1, мы пользуемся символом $>$ как для обозначения «естественного» отношения $u > v$ полезностей $u$ и $v$, так и для отношения $\rho > \sigma$ чисел $\rho$ и $\sigma$; точно так же мы пользуемся записью $\alpha\ \ldots + (1 - \alpha)\ \ldots$ как для «естественной» операции $\alpha u + (1 - \alpha) v$ над полезностями $u$ и $v$, так и для операции $\alpha\rho + (1 - \alpha)\sigma$ над числами $\rho$, $\sigma$ ($\alpha$ в обоих случаях является числом). Можно возразить, что такая практика может вести к путанице, однако этого не случится, так как всегда будет ясно, являются входящие в соответствующее выражение величины полезностями ($u$, $v$, $w$) или числами ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$, . . ., $\rho$, $\sigma$). Эта идентификация обозначений для отношений и операций в двух случаях («естественном» и числовом) проста и облегчает прослеживание аналогии между «естественным» и числовым. По этой причине такие обозначения приняты почти всюду для подобных ситуаций в математической литературе; мы также будем ими пользоваться.

**А.1.3.** Выводы, которые будут сделаны в п. А.2, несколько громоздки и могут показаться довольно утомительными для математически неподготовленного читателя. С чисто математической точки зрения имеется еще и то возражение, что они не могут быть достаточно глубокими — идеи, ведущие к этим выводам, слишком просты, но технические выкладки, к сожалению, должны быть достаточно объемистыми для того, чтобы

[1]) То есть без фиксации нуля или единицы полезности.

быть полными. Возможно, что впоследствии будет найдено и более короткое изложение.

Во всяком случае, мы теперь собираемся использовать в п. А.2 эстетически не вполне удовлетворительный способ изложения.

## А.2. ВЫВОДЫ ИЗ АКСИОМ

**А.2.1.** Переходим к выводам из аксиом (3:А) — (3:С) из п. 3.6.1. Весь вывод будет расчленен на несколько последовательных шагов и будет выполнен в этом и в четырех следующих пунктах. Окончательный результат будет сформулирован в (A:V) и (A:W).

(А:А) Если $u < v$, то из $\alpha < \beta$ следует

$$(1-\alpha)u + \alpha v < (1-\beta)u + \beta v.$$

Доказательство. Ясно, что $\alpha = \gamma\beta$ для некоторого $0 < \gamma < 1$. Из (3:B:a) (примененного к $u$, $v$, $1-\beta$ соответственно в качестве $u$, $v$, $\alpha$) мы имеем $u < (1-\beta)u + \beta v$ и, следовательно, из (3:B:b) (примененного к $(1-\beta)u + \beta v$, $u$, $\gamma$ соответственно в качестве $u$, $v$, $\alpha$) получим $(1-\beta)u + \beta v > \gamma((1-\beta)u + \beta v) + (1-\gamma)u$. По (3:C:a) это может быть записано как

$$(1-\beta)u + \beta v > \gamma(\beta v + (1-\beta)u) + (1-\gamma)u.$$

Теперь по (3:C:b) (примененному к $v$, $u$, $\gamma$, $\beta$, $\alpha = \gamma\beta$ соответственно в качестве $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma = \alpha\beta$) правая часть есть $\alpha v + (1-\alpha)u$ и, следовательно, по (3:C:a) $(1-\alpha)u + \alpha v$. Итак, $(1-\alpha)u + \alpha v < (1-\beta)u + \beta v$, что и требовалось.

(А:В) Пусть даны фиксированные $u_0$ и $v_0$, для которых $u_0 < v_0$; рассмотрим отображение

$$\alpha \to w = (1-\alpha)u_0 + \alpha v_0.$$

Это — взаимно однозначное монотонное отображение интервала $0 < \alpha < 1$ на часть интервала $u_0 < w < v_0$ [1]).

Доказательство. Это отображение на часть $u_0 < w$ интервала $u_0 < w < v_0$ совпадает с (3:B:a) (примененным к $u_0$, $v_0$, $1-\alpha$ в качестве $u$, $v$, $\alpha$), а на часть $w < v_0$ — с (3:B:b) (примененным к $v_0$, $u_0$, $\alpha$ соответственно в качестве $u$, $v$, $\alpha$).

Взаимная однозначность следует из монотонности, которую установим далее.

Монотонность совпадает с (А:А).

(А:С) Отображение из (А:В) фактически отображает $0 < \alpha < 1$ на все множество $u_0 < w < v_0$.

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. что некоторое $w_0$: $u_0 < w_0 < v_0$ не имеет прообраза. Тогда для всех $\alpha$ из $0 < \alpha < 1$ должно быть $(1-\alpha)u_0 + \alpha v_0 \neq w_0$, т. е. $(1-\alpha)u_0 + \alpha v_0 \lesseqgtr w_0$.

В соответствии с тем, имеем мы $<$ или $>$, будем говорить, что $\alpha$ принадлежит классу I или классу II. Таким образом, классы I и II, которые, очевидно, не пересекаются, составляют вместе интервал $0 < \alpha < 1$. Теперь мы замечаем следующее.

[1]) В (А:С) будет показано, что эта часть в действительности есть весь интервал $u_0 < w < v_0$.

Первое. Класс I непуст. Это немедленно следует из (3:B:c) (примененного к $u_0$, $w_0$, $v_0$, $1-\alpha$ соответственно в качестве $u$, $w$, $v$, $\alpha$).

Вторoе. Класс II непуст. Это немедленно следует из (3:B:d) (примененного к $v_0$, $w_0$, $u_0$, $\alpha$ соответственно в качестве $u$, $w$, $v$, $\alpha$).

Третье. Если $\alpha$ из класса I, а $\beta$ из класса II, то $\alpha < \beta$. Действительно, так как I и II не пересекаются, должно быть $\alpha \neq \beta$. Следовательно, единственной к $\alpha < \beta$ альтернативой является $\alpha > \beta$. Но тогда по монотонности отображения из (A:B), так как $\alpha$ принадлежит I, $\beta$ тоже должно принадлежать I, но $\beta$ принадлежит II. Следовательно, остается $\alpha < \beta$.

Из этих трех свойств классов I и II следует, что должно существовать некоторое $\alpha_0$, $0 < \alpha_0 < 1$, разделяющее эти классы, т. е. такое число, что для всех $\alpha$ из I будет $\alpha \leqq \alpha_0$, а для всех $\alpha$ из II будет $\alpha \geqq \alpha_0$ [1].

Далее, само число $\alpha_0$ должно принадлежать либо классу I, либо II. Будем различать соответственно два случая.

Первый. $\alpha_0$ из класса I. Тогда $(1-\alpha_0)u_0 + \alpha_0 v_0 < w_0$, а также $w_0 < v_0$. Применяя (3:B:c) (с $(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0$, $w_0$, $v_0$, $\gamma$ соответственно в качестве $u$, $w$, $v$, $\gamma$), мы найдем некоторое $\gamma$, для которого $0<\gamma<1$, и $\gamma((1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0)+(1-\gamma)v_0 < w_0$. Поэтому по (3:C:b) (с $u_0$, $v_0$, $\gamma$, $1-\alpha_0$, $1-\alpha=\gamma(1-\alpha_0)$ соответственно в качестве $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma = \alpha\beta$) должно быть $(1-\alpha)u_0+\alpha v_0 < w_0$. Значит, $\alpha = 1-\gamma(1-\alpha_0)$ принадлежит I. Однако $\alpha > 1-(1-\alpha_0) = \alpha_0$, хотя мы должны были бы иметь $\alpha \leqq \alpha_0$.

Второй. $\alpha_0$ из класса II. Тогда $(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0 > w_0$, а также $u_0 < w_0$. Применяя (3:B:d) (с $(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0$, $w_0$, $u_0$, $\gamma$ соответственно в качестве $u$, $w$, $v$, $\alpha$), мы найдем некоторое $\gamma$, для которого $0<\gamma<1$, и $\gamma((1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0)+(1-\gamma)u_0 > w_0$. Поэтому по (3:C:a), $\gamma(\alpha_0 v_0+(1-\alpha_0)u_0)+(1-\gamma)u_0 > w_0$; значит, по (3:C:b) (с $v_0$, $u_0$, $\gamma$, $\alpha_0$, $\alpha=\gamma\alpha_0$ соответственно в качестве $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma=\alpha\beta$) должно быть $\alpha v_0+(1-\alpha)u_0 > w_0$, т. е. по (3:C:a) $(1-\alpha)u_0+\alpha v_0 > w_0$. Следовательно, $\alpha = \gamma\alpha_0$ принадлежит II. Однако $\alpha < \alpha_0$, хотя мы должны были бы иметь $\alpha \geqq \alpha_0$.

Таким образом, мы получаем противоречие в каждом случае. Следовательно, первоначальное предположение невозможно, и нужное свойство установлено.

A.2.2. На этом месте стоит остановиться. (A:B) и (A:C) осуществляют взаимно однозначное отображение интервала полезностей $u_0 < w < v_0$ (здесь $u_0$ и $v_0$ фиксированы и $u_0 < v_0$, а в остальном $u_0$ и $v_0$ произвольны!) на числовой интервал $0 < \alpha < 1$. Ясно, что это есть первый шаг для получения числового представления полезностей. Однако этот результат в некоторых отношениях далеко не полон. Основная его ограниченность состоит в следующем.

Первое. Числовое представление получено только для интервала полезностей $u_0 < w < v_0$, а не для всех полезностей $w$ одновременно. Неясно и то, как отображения, полученные для различных пар $u_0$, $v_0$, соответствуют друг другу.

---

[1] Интуитивно это вполне правдоподобно. Кроме того, возможен и строгий вывод. Фактически он совпадает с одной из классических теорем, в которой вводятся иррациональные числа, теоремы о дедекиндовом сечении. Подробности можно найти в курсах теории функций вещественной переменной или основ анализа. См., например, Каратеодори (сноска 1 на стр. 356), стр. 11, Аксиома VII. Вместо упомянутого там множества $\{a\}$ следует взять наш класс I; тогда множество $\{A\}$ будет содержать наш класс II.

Второе. Числовое представление, определяемое (А:В) и (А:С), еще не согласовано с нашими требованиями (3:1:а), (3:1:b). Очевидно, что (3:1:а) выполняется: это лишь другой способ выражения монотонности, обеспечиваемой (А:В). Однако остается еще проверить справедливость (3:1:b).

Мы выполним все эти требования одновременно. Ход рассуждений будет сначала идти по пути, соответствующему первому замечанию, однако в процессе этого будут установлены положения второго замечания и надлежащая единственность результата.

Мы начнем с доказательства группы лемм, которые более в духе второго замечания и требования единственности, однако на их основе мы сможем ответить на вопрос, поставленный в первом замечании.

(А:D) Пусть $u_0$ и $v_0$ такие, как указано выше: $u_0$, $v_0$ фиксированы и $u_0 < v_0$. Для всех $w$ в интервале $u_0 < w < v_0$ определим числовую функцию $f(w) = f_{u_0, v_0}(w)$ следующим образом:

(I) $f(u_0) = 0$;

(II) $f(v_0) = 1$;

(III) $f(w)$ для $w \neq u_0$, $v_0$, т. е. для $u_0 < w < v_0$, есть то число $\alpha$ из интервала $0 < \alpha < 1$, которое соответствует $w$ в смысле (А:В) и (А:С).

(А:Е) Отображение $w \to f(w)$ обладает следующими свойствами:

(I′) оно монотонно;

(II′) для $0 < \beta < 1$ и $w \neq u_0$

$$f((1-\beta)u_0 + \beta w) = \beta f(w);$$

(III′) для $0 < \beta < 1$ и $w \neq v_0$

$$f((1-\beta)v_0 + \beta w) = 1 - \beta + \beta f(w).$$

(А:F) Отображение всех $w$ из $u_0 < w < v_0$ на любое множество чисел, обладающее свойствами (I), (II) и либо (II′), либо (III′), совпадает с отображением (А:D).

Доказательство. (А:D) является определением; мы должны доказать (А:Е) и (А:F).

(А:Е). (I′) Для $u_0 < w < v_0$ отображение монотонно согласно (А:В). Все $w$ из этого интервала отображаются на числа $> 0$ и $< 1$, т. е. на числа бо́льшие, чем образ $u_0$, и меньшие, чем образ $v_0$. Поэтому мы имеем монотонность на $u_0 \leqq w \leqq v_0$.

(II′) Для $w = v_0$ это утверждение превращается в $f((1-\beta)u_0 + \beta v_0) = \beta$, что совпадает с определением (А:В) (с $\beta$ в качестве $\alpha$).

Для случая $w \neq v_0$, т. е. $u_0 < w < v_0$, положим $f(w) = \alpha$. Отсюда по (А:В)

$$w = (1-\alpha)u_0 + \alpha v_0.$$

Тогда по (3:С:b) (с $v_0$, $u_0$, $\beta$, $\alpha$ соответственно в качестве $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$ и с использованием (3:С:а)) мы имеем $(1-\beta)u_0 + \beta w = (1-\beta)u_0 + \beta((1-\alpha)u_0 + \alpha v_0) = (1-\beta\alpha)u_0 + \beta\alpha v_0$. Следовательно, по (А:В) должно быть $f((1-\beta)u_0 + \beta w) = \beta\alpha = \beta f(w)$, что и требовалось получить.

(III′) Для $w = u_0$ утверждение состоит в том, что $f((1-\beta)v_0 + \beta u_0) = 1 - \beta$, а это совпадает с определением (А:В) (с $1-\beta$ в качестве $\alpha$ и с использованием (3:С:а)).

Для $w \neq u_0$, т. е. при $u_0 < w < v_0$, положим $f(w) = \alpha$, т. е. по (A:B) $w = (1-\alpha)u_0 + \alpha v_0$. Тогда по (3:C:b) (с $u_0$, $v_0$, $\beta$, $1-\alpha$ соответственно в качестве $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$ и с использованием (3:C:a)) мы получаем

$$(1-\beta)v_0 + \beta w = (1-\beta)v_0 + \beta((1-\alpha)u_0 + \alpha v_0) = \beta(1-\alpha)u_0 + (1-\beta(1-\alpha))v_0.$$

Следовательно, на основании (A:B)

$$f((1-\beta)v_0 + \beta w) = 1 - \beta(1-\alpha) = 1 - \beta + \beta\alpha = 1 - \beta + \beta f(w),$$

что и требовалось доказать.

(A:F). Рассмотрим отображение

(A:1) $$w \to f_1(w),$$

удовлетворяющее (I), (II) и либо (II′), либо (III′). Отображение

(A:2) $$w \to f(w)$$

есть взаимно однозначное отображение $u_0 \leqq w \leqq v_0$ на $0 \leqq \alpha \leqq 1$; следовательно, для него существует обратное:

(A:3) $$\alpha \to \psi(\alpha).$$

Объединяя теперь (A:1) с (A:3), т. е. с обращением к (A:2), мы получим

(A:4) $$\alpha \to f_1(\psi(\alpha)) = \varphi(\alpha).$$

Так как оба отображения (A:1) и (A:2) удовлетворяют (I) и (II), мы получим для (A:4)

(A:5) $$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1.$$

Если (A:1) удовлетворяет (II′) или (III′) то, поскольку (A:2) удовлетворяет и (II′), и (III′), мы получим для (A:4)

(A:6) $$\varphi(\beta\alpha) = \beta\varphi(\alpha),$$

или

(A:7) $$\varphi(1-\beta+\beta\alpha) = 1-\beta+\beta\varphi(\alpha).$$

Теперь, положив в (A:7) $\alpha = 1$ и воспользовавшись (A:5), мы получим

(A:8) $$\varphi(\beta) = \beta,$$

а положив в (A:7) $\alpha = 0$ и снова воспользовавшись (A:5), мы получим $\varphi(1-\beta) = 1-\beta$. Замена $\beta$ на $1-\beta$ дает снова (A:8).

Таким образом, (A:8) справедливо во всех случаях. (II′), (III′) ограничивают его теми $\beta$, для которых $0 < \beta < 1$. Однако (A:5) распространяет его также на $\beta = 0, 1$, т. е. делает верным для всех $\beta$ из сегмента $0 \leqq \beta \leqq 1$. Принимая во внимание определение $\varphi(\alpha)$ посредством (A:3) и (A:4), мы получаем, что справедливость (A:8) означает совпадение (A:1) и (A:2), а это и требовалось доказать.

(A:G) Пусть $u_0$, $v_0$ заданы, как и выше: $u_0$, $v_0$ фиксированы и $u_0 < v_0$. Пусть даны также два фиксированных числа $\alpha_0$, $\beta_0$ таких, что $\alpha_0 < \beta_0$. Для всех $w$ из интервала $u_0 \leqq w \leqq v_0$ определим числовую функцию $g(w) = g^{\alpha_0, \beta_0}_{u_0, v_0}(w)$ следующим образом:

$$g(w) = (\beta_0 - \alpha_0) f(w) + \alpha_0$$

($f(w) = f_{u_0, v_0}(w)$ в соответствии с (A:D)).

Заметим, что

(I) $g(u_0)=\alpha_0$;

(II) $g(v_0)=\beta_0$.

(A:H) Это отображение $w\to g(w)$ имеет следующие свойства:

(I′) оно монотонно;

(II′) для $0<\beta<1$ и $w\neq u_0$

$$g((1-\beta)u_0+\beta w)=(1-\beta)\alpha_0+\beta g(w);$$

(III′) для $0<\beta<1$ и $w\neq v_0$

$$g((1-\beta)v_0+\beta w)=(1-\beta)\beta_0+\beta g(w).$$

(A:I) Отображение всех $w$ из сегмента $u_0\leqq w\leqq v_0$ на любое множество чисел, обладающее свойством (I), (II) и либо (II′), либо (III′), совпадает с отображением из (A:G).

Доказательство. Используя соответствие между функциями

$$g_1(w)=(\beta_0-\alpha_0)f_1(w)+\alpha_0,$$

или, что то же самое

$$f_1(w)=\frac{g_1(w)-\alpha_0}{\beta_0-\alpha_0}$$

(для $f_1(w)$, $g_1(w)$, а также для $f(w)$, $g(w)$), мы видим, что утверждения (A:G) — (A:I) переходят в (A:D) — (A:F). Следовательно, (A:G) — (A:I) следуют из (A:D) — (A:F).

(A:J) Беря (I) и (II) из (A:G), мы получаем, что уравнение

$$g((1-\beta)u+\beta v)=(1-\beta)g(u)+\beta g(v)$$

$(u_0\leqq u<v\leqq v_0)$, где $u=u_0$ и $v\neq u_0$, эквивалентно (II′) из (A:H) и с $u\neq v_0$, $v=v_0$ эквивалентно (III′) из (A:H).

Доказательство. (II′). Подставим $u_0$, $w$, $\beta$ вместо $u$, $v$, $\beta$.

(III′). Подставим $w$, $v_0$, $1-\beta$ вместо $u$, $v$, $\beta$.

**A.2.3.** В (A:G) — (A:I) отображение интервала полезностей $u_0\leqq w\leqq v_0$ на числовой интервал $\alpha_0\leqq\alpha\leqq\beta_0$ было дано в удобной форме, заключающей в себе соответствующее свойство единственности. Теперь мы приступим к согласованию отображений

$$w\to g(w)=g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w).$$

(A:K) Рассмотрим $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}$ и $w_0$, для которого $u_0\leqq w_0\leqq v_0$. Положим

$$\gamma_0=g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w_0).$$

Тогда $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$ совпадает с $g^{\alpha_0,\gamma_0}_{u_0,w_0}(w)$ в области $u_0\leqq w\leqq w_0$ (если $w_0\neq u_0$, т. е. если $u_0<w_0$) и $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$ совпадает с $g^{\gamma_0,\beta_0}_{w_0,v_0}$ в области $w_0\leqq w\leqq v_0$ (если $w_0\neq v_0$, т. е. если $w_0<v_0$).

Доказательство. Для $g^{\alpha_0,\gamma_0}_{u_0,w_0}(w)$. Функция $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$ обладает свойствами (I), (II′) (из (A:G) и (A:H)) для $\alpha_0$, $\gamma_0$, $u_0$, $w_0$, так как они те же, что и для $\alpha_0$, $\beta_0$, $u_0$, $v_0$ (они содержат лишь нижние границы $\alpha_0$, $u_0$). Эта функция обладает также и свойством (II) (из (A:G)) для $\alpha_0$, $\gamma_0$, $u_0$, $w_0$,

потому что $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(w_0) = \gamma_0$. Значит, из (A:I) следует, что $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}$ удовлетворяет внутри $u_0 \leqq w \leqq v_0$ условию единственности $g_{u_0, w_0}^{\alpha_0, \gamma_0}$.

Для $g_{w_0, v_0}^{\gamma_0, \beta_0}$. Функция $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}$ обладает свойствами (II), (III′) (из (A:G), (A:H)) для $\gamma_0$, $\beta_0$, $w_0$, $v_0$, так как они те же, что и для $\alpha_0$, $\beta_0$, $w_0$, $v_0$ (они содержат лишь верхние границы $\beta_0$, $v_0$). Эта функция также удовлетворяет (I) (из (A:G)) для $\gamma_0$, $\beta_0$, $w_0$, $v_0$, так как $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(w_0) = \gamma_0$. Значит, из (A:I) следует, что $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}$ для $w_0 \leqq w \leqq v_0$ удовлетворяет условиям, определяющим единственную $g_{w_0, v_0}^{\gamma_0, \beta_0}$.

(A:L) Рассмотрим $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}$ и $u_1$, $v_1$, для которых $u_0 \leqq u_1 < v_1 \leqq v_0$. Положим $\alpha_1 = g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(u_1)$ и $\beta_1 = g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(v_1)$. Тогда $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(w)$ совпадает с $g_{u_1, v_1}^{\alpha_1, \beta_1}(w)$ в области изменения последней функции $u_1 \leqq w \leqq v_1$.

Доказательство. Применим сначала (A:K) к $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}$ и к $g_{u_0, v_1}^{\alpha_0, \beta_1}$ (т. е. с $u_0$, $v_0$, $\alpha_0$, $\beta_0$, $v_1$, $\beta_1$ соответственно в качестве $u_0$, $v_0$, $\alpha_0$, $\beta_0$, $w_0$, $\gamma_0$; заметим, что $\beta_1 = g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(v_1)$). Это показывает, что $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(w)$ в области $u_0 \leqq w \leqq v_1$ совпадает с $g_{u_0, v_1}^{\alpha_0, \beta_1}(w)$. Применим затем (A:K) к $g_{u_0, v_1}^{\alpha_0, \beta_1}$ и к $g_{u_1, v_1}^{\alpha_1, \beta_1}$ (т. е. с $u_0$, $v_1$, $\alpha_0$, $\beta_1$, $u_1$ соответственно в качестве $u_0$, $v_0$, $\alpha_0$, $\beta_0$, $w_0$, $\gamma_0$; заметим, что $\alpha_1 = g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(u_1) = g_{u_0, v_1}^{\alpha_0, \beta_0}(u_1)$). Мы получим, что $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(w)$, а следовательно, и $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(w)$, в области $u_1 \leqq w \leqq v_1$ совпадает с $g_{u_1, v_1}^{\alpha_1, \beta_1}(w)$.

(A:L) следует объединить со второй линией рассуждений. Здесь мы также предположим, что выбраны $u^*$ и $v^*$, для которых $u^* < v^*$; мы будем считать их фиксированными до тех пор, пока не перейдем к (A:V) и (A:W).

Теперь докажем следующее:

(A:M) Если $u_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_0$, то существует единственная функция $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(w)$, для которой

(I) $$g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(u^*) = 0;$$

(II) $$g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(v^*) = 1.$$

Мы будем обозначать эту функцию $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(w)$ через $h_{u_0, v_0}(w)$.

Доказательство. Построим $f(w) = f_{u_0, v_0}(w)$ из (A:D). Так как $u^* < v^*$, должно быть $f(u^*) < f(v^*)$. Для переменных $\alpha_0$ и $\beta_0$ (A:G) дает $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(w) = (\beta_0 - \alpha_0) f(w) + \alpha_0$. Следовательно, условия (I) и (II) означают, что $(\beta_0 - \alpha_0) f(u^*) + \alpha_0 = 0$, $(\beta_0 - \alpha_0) f(v^*) + \alpha_0 = 1$, и эти два уравнения определяют единственные $\alpha_0$ и $\beta_0$ [1]). Итак, искомая функция $g_{u_0, v_0}^{\alpha_0, \beta_0}(w)$ существует и единственна.

(A:N) Если $u_0 \leqq v_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_1 \leqq v_0$, то $h_{u_0, v_0}(w)$ совпадает с $h_{u_1, v_1}(w)$ в области $u_1 \leqq w \leqq v_1$.

Доказательство. Положим $\alpha_1 = h_{u_0, v_0}(u_1)$ и $\beta_1 = h_{u_0, v_0}(v_1)$. Тогда, по (A:L), $h_{u_0, v_0}(w)$ совпадает с $g_{u_1, v_1}^{\alpha_1, \beta_1}(w)$ в ее области $u_1 \leqq w \leqq v_1$. Применение этого к $w = u^*$ и $w = v^*$ дает нам $g_{u_1, v_1}^{\alpha_1, \beta_1}(w) = h_{u_0, v_0}(u^*) = 0$ и $g_{u_1, v_1}^{\alpha_1, \beta_1}(v^*) = h_{u_0, v_0}(v^*) = 1$. Значит, по (A:M) должно быть

---

1) Именно,

$$\alpha_0 = -\frac{f(u^*)}{f(v^*) - f(u^*)}, \qquad \beta_0 = \frac{1 - f(u^*)}{f(v^*) - f(u^*)}.$$

$g^{\alpha_1,\,\beta_1}_{u_1,\,v_1}(w) = h_{u_1,\,v_1}(w)$. Следовательно, $h_{u_0,\,v_0}(w)$ совпадает с функцией $h_{u_1,\,v_1}(w)$ в ее области $u_1 \leqq w \leqq v_1$.

Теперь мы можем установить желаемый факт: все $h_{u_0,\,v_0}(w)$ совпадают с одной и той же функцией. Конкретно, мы докажем следующее:

(A:O) Пусть дано произвольное $w$; тогда можно найти такие $u_0$ и $v_0$, что $u_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_0$ и $u_0 \leqq w \leqq v_0$. Для всех таких $u_0$, $v_0$ функция $h_{u_0,\,v_0}(w)$ имеет одно и то же значение. Таким образом, $h_{u_0,\,v_0}(w)$ зависит только от $w$. Эту величину мы будем обозначать поэтому через $h(w)$.

Доказательство. Существование $u_0$, $v_0$. Экстремумы $u_0 = \min(u^*, w)$ и $v_0 = \max(v^*, w)$, очевидно, обладают требуемыми свойствами.

Переходим к доказательству того, что $h_{u_0,\,v_0}(w)$ зависит только от $w$. Выберем для этого две пары $u_0$, $v_0$ и $u_0'$, $v_0'$, для которых $u_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_0$, $u_0 \leqq w \leqq v_0$ и $u_0' \leqq u^* < v^* \leqq v_0'$, $u_0' \leqq w \leqq v'$. Положим $u_1 = \max(u_0, u_0')$ и $v_1 = \min(v_0, v_0')$. Тогда $u_0 \leqq u_1 \leqq u^* < v^* \leqq v_1 \leqq v_0$, $u_1 \leqq w \leqq v_1$ и $u_0' \leqq u_1 \leqq u^* < v^* \leqq v_1 \leqq v_0'$, $u_1 \leqq w \leqq v_1$. Теперь, применяя дважды (A:N) (сначала с $u_0$, $v_0$, $u_1$, $v_1$, $w$, а затем с $u_0'$, $v_0'$, $u_1$, $v_1$, $w$), мы получим

$$h_{u_0,\,v_0}(w) = h_{u_1,\,v_1}(w) \quad \text{и} \quad h_{u_0',\,v_0'}(w) = h_{u_1,\,v_1}(w).$$

Следовательно,

$$h_{u_0,\,v_0}(w) = h_{u_0',\,v_0'}(w),$$

что и требовалось доказать.

**А.2.4.** Функция $h(w)$ из (A:O) определена для всех полезностей и принимает числовые значения. Мы можем теперь без особого труда показать, что она обладает всеми требуемыми свойствами.

Легче всего это сделать с помощью двух вспомогательных лемм.

(A:P) Пусть даны любые $u$, $v$, для которых $u < v$; тогда существуют такие $u_0$, $v_0$, что $u_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_0$, $u_0 \leqq u < v \leqq v_0$.

Доказательство. Положим $u_0 = \min(u^*, u)$ и $v_0 = \max(v^*, v)$.

(A:Q) Пусть даны любые $u$, $v$, причем $u < v$. Положим $h(u) = \alpha$, $h(v) = \beta$. Тогда $\alpha < \beta$ и функция $h(w)$ в области $u \leqq w \leqq v$ совпадает с $g^{\alpha,\,\beta}_{u,\,v}(w)$.

Доказательство. Выберем $u_0$, $v_0$, как это указано в (A:P). По (A:M) функция $h_{u_0,\,v_0}(w)$ принадлежит к числу $g^{\alpha_0,\,\beta_0}_{u_0,\,v_0}(w)$ с соответствующими $\alpha_0$ и $\beta_0$. По (A:O) $h(w)$ совпадает с $h_{u_0,\,v_0}(w)$, т. е. с $g^{\alpha_0,\,\beta_0}_{u_0,\,v_0}(w)$ в области $u_0 \leqq w \leqq v_0$. Для $w = u$ и $w = v$ это дает нам соответственно $g^{\alpha_0,\,\beta_0}_{u_0,\,v_0}(u) = h(u) = \alpha$ и $g^{\alpha_0,\,\beta_0}_{u_0,\,v_0}(v) = h(v) = \beta$. Так как функция $g^{\alpha_0,\,\beta_0}_{u_0,\,v_0}(w)$ монотонна, должно быть $\alpha < \beta$. Далее, по (A:L) (с $u_0$, $v_0$, $\alpha_0$, $\beta_0$, $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$ соответственно в качестве $u_0$, $v_0$, $\alpha_0$, $\beta_0$, $u_1$, $v_1$, $\alpha_1$, $\beta_1$) функция $g^{\alpha_0,\,\beta_0}_{u_0,\,v_0}(w)$ совпадает с функцией $g^{\alpha,\,\beta}_{u,\,v}(w)$ в области $u \leqq w \leqq v$. Следовательно, то же самое верно и для $h(w)$.

После этой подготовки мы установим интересующие нас свойства $h(w)$

(A:R) Отображение $w \to h(w)$ всех $w$ на множество чисел обладает следующими свойствами:

(I) $h(u^*) = 0$;

(II) $h(v^*)=1$;

(III) $h(w)$ монотонно;

(IV) для $0<\gamma<1$ и $u<v$

$$h((1-\gamma)u+\gamma v)=(1-\gamma)h(u)+\gamma h(v).$$

(A:S) Отображение всех $w$ на некоторое множество чисел, обладающее свойствами (I), (II) и (IV), совпадает с отображением (A:R).

Доказательство. (A:R). Свойства (I), (II) следуют немедленно из (A:O) и (A:M).

Свойство (III) вытекает из (A:Q).

Свойство (IV). Выберем $u$ и $v$ в соответствии с (A:P), а затем $\alpha$, $\beta$ и $g_{u,v}^{\alpha,\beta}(w)$ в соответствии с (A:Q). Далее согласно (II') из (A:H) (с $u$, $v$, $v_1$ $\gamma$ соответственно в качестве $u_0$, $v_0$, $w$, $\gamma$) следует

$$g_{u,v}^{\alpha,\beta}((1-\gamma)u+\gamma v)=(1-\gamma)g_{u,v}^{\alpha,\beta}(u)+\gamma g_{u,v}^{\alpha,\beta}(v).$$

Значит, по (A:Q) должно быть

$$h((1-\gamma)u+\gamma v)=(1-\gamma)h(u)+\gamma h(v),$$

что и требовалось доказать.

(A:S). Рассмотрим отображение

$$w\to h_1(w)$$

всех полезностей $w$ на множество чисел, и пусть оно удовлетворяет (I), (II) и (IV). Выберем $u_0$ и $v_0$, для которых $u_0\leqq u^*<v^*\leqq v_0$, и положим $\alpha_0=h_1(u^*)$, $\beta_1=h_1(v^*)$. Тогда, по (A:I), $h_1(w)$ совпадает с $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ в области $u_0\leqq w\leqq v_0$. Положив $w=u^*$ и $w=v^*$, мы получим $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(u^*)=h_1(u^*)=0$ и $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(v^*)=h_1(v^*)=1$. Следовательно, по (A.H), $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}$ есть $h_{u_0,v_0}$. Итак, $h_1(w)$ совпадает с $h_{u_0,v_0}(w)$, т. е. с $h(w)$ на $u_0\leqq w\leqq v_0$. По (A:O) это означает, что $h_1(w)$ и $h(w)$ совпадают везде.

**A.2.5.** (A:R) и (A:S) описывают отображение всех полезностей в множество вещественных чисел. Это отображение обладает некоторыми правдоподобными свойствами и однозначно ими определяется; следовательно, мы могли бы на этом остановиться. Однако мы еще не вполне удовлетворены по следующим причинам: описание в (A:R) не совпадает с описанием, данным в (3:1:a) и (3:1:b); именно, (A:R) требует несколько меньшего в (IV) (в (3:1:b) утверждение касается всех $u$ и $v$, а (IV) лишь тех $u$ и $v$, для которых $u<v$); кроме того, в (I) и (II) вводится произвольное нормирование (с помощью произвольных $u^*$ и $v^*$). Теперь мы займемся ликвидацией этих несоответствий. Это делается совсем просто.

Сначала распространим (IV) из (A:R).

(A:T) Всегда $(1-\gamma)u+\gamma u=u$.

Доказательство. Смотря по знаку в соотношении $u\lesseqgtr(1-\gamma)u+\gamma u$, будем говорить, что $\gamma$ принадлежит классу I (верхний класс) или классу II (нижний класс). Если $\gamma$ принадлежит классу I или II и если $0<\beta<1$, то

$$u\lesseqgtr(1-\beta)u+\beta((1-\gamma)u+\gamma u)\lesseqgtr(1-\gamma)u+\gamma u$$

на основании (3:B:a) и (3:B:b). (Для $\gamma$ соответственно из I или II класса. Сначала возьмем $u$, $(1-\gamma)u+\gamma u$, $1-\beta$ соответственно в качестве $u$, $v$, $\alpha$ в (3:B:a) или в (3:B:b). Затем возьмем $(1-\gamma)u+\gamma u$, $u$, $\beta$ соответ-

ственно в качестве $u$, $v$, $\alpha$ в (3:B:b) или в (3:B:a).) По (3:C:a) и (3:C:b) (с $u$, $u$, $\beta$, $\gamma$ соответственно в качестве $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$) мы получаем

$$(1-\beta)\,u+\beta\,((1-\gamma)\,u+\gamma u)=(1-\beta\gamma)\,u+\beta\gamma u.$$

Значит, $u \lessgtr (1-\beta\gamma)\,u+\beta\gamma u \lessgtr (1-\gamma)\,u+\gamma u$. Положим $\delta=\beta\gamma$. Так как $\beta$ выбирается свободно из $0<\beta<1$, число $\delta$ может быть любым из $0<\delta<\gamma$. Принимая $0<\gamma<1$ и $0<\delta<1$, мы имеем поэтому следующее:

(A:9) Если $\gamma$ принадлежит классу I или II, то каждое $\delta<\gamma$ принадлежит тому же классу, I или II.

(A:10) В условиях (A:9) соответственно должно быть

$$(1-\delta)\,u+\delta u \lessgtr (1-\gamma)\,u+\gamma u.$$

Выражение $(1-\gamma)\,u+\gamma u$ не изменится, если мы заменим $\gamma$ на $1-\gamma$. Так как $1-\gamma<1-\delta$ равносильно $\gamma>\delta$, мы можем в (A:9) заменить $\gamma$ и $\delta$ соответственно на $1-\gamma$ и $1-\delta$. Тогда (A:9) и (A:10) соответственно приобретают вид

(A:11) Если $\gamma$ принадлежит классу I или II, то любое $\delta>\gamma$ принадлежит тому же классу, I или II.

(A:12) В условиях (A:11) соответственно должно быть

$$(1-\delta)\,u+\delta u \lessgtr (1-\gamma)\,u+\gamma u.$$

Теперь (A:9) и (A:11) показывают, что если $\gamma$ из класса I или II, то каждое $\delta$ ($<\gamma$ или $=\gamma$, или $>\gamma$) из того же класса, I и II. Следовательно, если один из классов I или II непуст, то он содержит все $\delta$, для которых $0<\delta<1$. Предположим, что это имеет место (для класса I или II), и рассмотрим $\gamma$ и $\delta$, для которых $\gamma<\delta$. Тогда по (A:10) должно быть $(1-\delta)\,u+\delta u \lessgtr (1-\gamma)\,u+\gamma u$, а по (A:12) (с $\delta$, $\gamma$ соответственно в качестве $\gamma$, $\delta$) $(1-\delta)\,u+\delta u \gtrless (1-\gamma)\,u+\gamma u$. Значит, в обоих случаях в $(1-\delta)\,u+\delta u \gtrless (1-\gamma)\,u+\gamma u$ имеют место оба знака $<$ и $>$. Получили противоречие. Поэтому оба класса, I и II, должны быть пустыми.

Следовательно, никогда не может быть $u \lessgtr (1-\gamma)\,u+\gamma u$; значит, всегда $(1-\gamma)\,u+\gamma u=u$, что и требовалось доказать.

(A:U) Всегда

$$h\,((1-\gamma)\,u+\gamma v)=(1-\gamma)\,h\,(u)+\gamma h\,(v)$$

($0<\gamma<1$, а $u$ и $v$ любые).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $u<v$ — это (A:R), (IV). Для $u>v$ это получается из только что установленного заменой $u$, $v$, $\gamma$ на $v$, $u$, $1-\gamma$. Для $u=v$ это следует из (A:T).

Теперь мы сможем доказать теорему существования и единственности в требуемой форме, т. е. в соответствии с (3:1:a) и (3:1:b). Начиная с этого места мы опустим предположение о фиксированном выборе $u^*$ и $v^*$, введенных ранее в (A:M).

(A:V) Существует отображение

$$w \to \mathrm{v}\,(w)$$

всех $w$ на некоторое множество чисел, обладающее следующими свойствами:

(I) монотонность;

(II) для $0 < \gamma < 1$ и любых $u$ и $v$

$$\mathrm{v}((1-\gamma)u+\gamma v)=(1-\gamma)\mathrm{v}(u)+\gamma\mathrm{v}(v).$$

(A:W) Для любых двух отображений $\mathrm{v}(w)$ и $\mathrm{v}'(w)$, обладающих свойствами (I), (II), должно быть

$$\mathrm{v}'(w)=\omega_0\mathrm{v}(w)+\omega_1$$

при некоторых подходящих, но фиксированных $\omega_0$ и $\omega_1$, причем $\omega_0 > 0$.

Доказательство. Пусть $u^*$ и $v^*$ — две различных полезности [1]), $u^* \gtrless v^*$.

Если $u^* > v^*$, то поменяем $u^*$, $v^*$ ролями. Таким образом, в любом случае мы можем считать, что $u^* < v^*$. Используем эти $u^*$ и $v^*$ для построения $h(w)$, т. е. для (A:L) — (A:U). Теперь мы докажем

(A:V). Отображение

$$w \longrightarrow h(w)$$

удовлетворяет (I) ввиду (A:R), а (III) и (II) ввиду (A:U).

(A:W). Рассмотрим сначала $\mathrm{v}(w)$. По (I) должно быть $\mathrm{v}(u^*) < \mathrm{v}(v^*)$. Положим

$$h_1(w)=\frac{\mathrm{v}(w)-\mathrm{v}(u^*)}{\mathrm{v}(v^*)-\mathrm{v}(u^*)}.$$

Тогда $h_1(w)$ удовлетворяет (I) и (II) из (A:R) автоматически, а (III), (IV) из (A:R) по установленным (I) и (II). Следовательно, ввиду (A:S) должно быть $h_1(w) = h(w)$, т. е.

(A:13) $$\mathrm{v}(w)=\alpha_0 h(w)+\alpha_1,$$

где $\alpha_0$ и $\alpha_1$ — фиксированные числа: $\alpha_0=\mathrm{v}(v^*)-\mathrm{v}(u^*)>0$ и $\alpha_1=\mathrm{v}(u^*)$. Аналогично для $\mathrm{v}'(w)$ мы имеем

(A:14) $$\mathrm{v}'(w)=\alpha_0' h(w)+\alpha_1',$$

где $\alpha_0'$ и $\alpha_1'$ — фиксированные числа: $\alpha_0'=\mathrm{v}'(v^*)-\mathrm{v}'(u^*)>0$ и $\alpha_1'=\mathrm{v}'(u^*)$. Теперь (A:13) и (A:14) дают вместе

(A:15) $$\mathrm{v}'(w)=\omega_0\mathrm{v}(w)+\omega_1,$$

где $\omega_0$ и $\omega_1$ — фиксированные числа: $\omega_0 = \frac{\alpha_0'}{\alpha_0} > 0$, $\omega_1 = \frac{\alpha_0\alpha_1'-\alpha_1\alpha_0'}{\alpha_0}$. Это и есть нужный результат.

## А.3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

**А.3.1.** (A:V) и (A:W), очевидно, образуют теорему существования и единственности, сформулированную в п. 3.5.1. Следовательно, утверждения из пп. 3.5—3.6 установлены во всей их полноте.

---

[1]) Говоря более точно, аксиомы допускают случай несуществования двух различных полезностей. Такая возможность едва ли представляет интерес, однако мы можем с ней легко справиться. Если двух различных полезностей нет, то их число должно быть либо нуль, либо один. В первом случае наши утверждения выполняются тривиально. Предположим поэтому, что имеет место второй случай: существует одна и только одна полезность $w_0$. Функция на ней обязана быть константой: $\mathrm{v}(w_0) = \alpha_0$. Любая такая функция обладает свойствами (I) и (II) из (A:V). Тогда в (A:W), с $\mathrm{v}(w)=\alpha_0$, $\mathrm{v}'(w) = \alpha_0'$, мы выбираем $\omega_0 = 1$ и $\omega_1 = \alpha_0' - \alpha_0$.

Здесь мы советуем читателю вернуться к анализу понятия полезности и ее числового выражения, проведенному в пп. 3.3 и 3.8. Имеется два вопроса, которые там рассмотрены или, во всяком случае, упомянуты, но которые представляются достойными повторения.

**А.3.2.** Первый из этих вопросов касается связи между нашей процедурой и понятием дополнительности. Аддитивная формула, подобная (3:1:b), представляется выражением того, что мы предполагаем отсутствие какой бы то ни было дополнительности предметов, полезности которых смешиваются. Важно отдать себе отчет в том, что мы делаем это лишь в такой ситуации, где действительно не может быть никакой дополнительности. Как отмечалось в первой части п. 3.3.2, наши $u$ и $v$ являются полезностями не каких-то определенных (и возможно сосуществующих) благ или услуг, но воображаемых событий. Эти $u$ и $v$ из (3:1:b) фактически относятся к мыслимым альтернативно событиям $u$ и $v$, из которых только одно, может быть, и станет реальным. Это значит, что (3:1:b) имеет дело либо с обладанием $u$ (с вероятностью $\alpha$), либо с обладанием $v$ (с вероятностью $1-\alpha$), но так как ни в каком случае нельзя представить, что они имеют место одновременно, они никогда не могут дополнять друг друга в обычном смысле.

Следует заметить, что теория игр дает и некоторый адекватный путь к обращению с дополнительностью, когда это понятие применимо. Так, при вычислении значения v $(S)$ для коалиции $S$ (в игре $n$ лиц), как это описано в § 25, должны быть учтены все возможные формы дополнительности между благами и между услугами. Кроме того, формула (25:3:c) выражает тот факт, что коалиция $S \cup T$ может быть оценена выше, чем сумма значений двух составляющих ее коалиций $S$ и $T$. Следовательно, она выражает возможную дополнительность между действиями членов коалиции $S$ и членов коалиции $T$ (см. также п. 27.4.3).

**А.3.3.** Второе замечание касается вопроса, дает ли наш подход возможность приписать такое же значение для потери, как и для равного ей (денежного) выигрыша; позволяет ли он применить понятие полезности или вредности (disutility) к азартным играм (даже когда ожидаемые значения сбалансированы), и т. д. Мы уже касались этих вопросов в последней части п. 3.7.1 (см. также сноски 1 и 2 на стр. 54). Однако несколько дополнительных, более конкретных замечаний могут оказаться полезными.

Рассмотрим следующий пример. Даниил Бернулли предполагал (см. сноску 1 на стр. 54), что полезность для игрока денежного выигрыша $dx$ должна быть не только пропорциональна выигрышу $dx$, но также (считая выигрыш бесконечно малым, т. е. асимптотически для весьма малых выигрышей $dx$) обратно пропорциональна выраженной в деньгах общей сумме $x$, которой этот игрок обладает. Следовательно (при выборе надлежащих единиц числовой полезности), полезность этого выигрыша есть $\frac{dx}{x}$. Прирост полезности от обладания суммой $x_1$ по сравнению с $x_2$, таким образом, равен $\int\limits_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x} = \ln \frac{x_1}{x_2}$. Превышение полезности от выигрыша (конечной) суммы $\eta$ по сравнению с потерей той же суммы, есть $\ln \frac{x+\eta}{x} - \ln \frac{x}{x-\eta} = \ln \left(1 - \frac{\eta^2}{x^2}\right)$. Эта избыточность $< 0$, т. е. при одинаковых выигрышах и потерях последние более ощутимы, чем первые. Азартная игра 50% — 50% с равным риском является явно невыгодной.

Тем не менее бернуллиевская полезность удовлетворяет нашим аксиомам и подчиняется нашим выводам. Однако полезность от обладания $x$ денежных единиц пропорциональна $\ln x$, а не $x$! [1, 2]).

Таким образом, подходящее определение полезности (которая в такой ситуации определяется из наших аксиом, по существу, единственным образом) исключает в этом случае ту конкретную полезность или вредность азартной игры, которая, на первый взгляд, ей присуща.

Мы остановились на бернуллиевской полезности не потому, что считаем ее особенно важной или более близкой к действительности, чем многие другие более или менее подобные ей конструкции. Единственной нашей целью было показать, что использование числовой полезности не обязательно содержит предположение о том, что 50%—50% азартную игру с равными денежными рисками следует рассматривать как индиферентную [3]).

Более глубокой проблемой является формулировка системы аксиом, в которой азартная игра имеет при всех условиях определенную полезность или вредность и где, однако, числовые полезности, удовлетворяющие исчислению математических ожиданий, не могут быть определены каким-либо процессом, прямым или косвенным. В такой системе некоторые из наших аксиом заведомо не должны выполняться. В настоящее время трудно предсказать, какие аксиомы или группы аксиом больше всего подойдут для такой модификации.

**А.3.4.** Тем не менее имеются некоторые соображения по этому поводу.

Первое. Аксиома (3:А), или, конкретнее, (3:А:а), выражает линейность упорядочения всех полезностей, т. е. полноту индивидуальной системы предпочтений. Весьма сомнительно, что идеализация реальности, в которой верен этот постулат, является адекватной, или хотя бы удобной. Это значит, что можно стремиться допускать для двух полезностей $u$ и $v$ отношение *несравнимости*, обозначаемое через $u \| v$, которое означает, что не имеет места ни $u = v$, ни $u > v$, ни $u < v$. Следует отметить, что употребительный метод кривых безразличия не вполне соответствует этой возможности. Действительно, в этом случае конъюнкция «ни $u > v$, ни $u < v$», соответствующая дизъюнкции «либо $u = v$, либо $u \| v$» и обозначаемая через $u \approx v$, может рассматриваться как простое расширение понятия равенства (полезностей; см. также замечание по поводу истинного равенства в п. А.1.2).

Таким образом, если $u \| u'$ и $v \| v'$, то $u$ и $v$ можно заменить в любом отношении на $u'$ и $v'$; например, в этом случае из $u < v$ следует $u' < v'$. Значит, в частности, это следствие можно получить из $u \| u'$ и $v = v'$, а также из $u = u'$ и $v \| v'$. Именно, беря $v$, $w$, $u$ соответственно в качестве $u$, $v$, $u'$ и $u$, $v$, $w$ в качестве $u$, $v$, $v'$, мы получим:

(А:16) Из $u \| v$ и $v < w$ следует $u < w$.

(А:17) Из $u < v$ и $v \| w$ следует $u < w$.

---

[1]) В упомянутой выше игре 50% — 50% был равный риск, выраженный в $x$, но не в $\ln x$.

[2]) На тот факт, что полезность $x$ денежных единиц может быть выражена через $x$, но не быть пропорциональной $x$, было обращено внимание в сноске 3 на стр. 44.

[3]) Как указывалось в замечании (1) в п. 3.7.3, мы не предполагали передач полезностей между различными лицами. Более строгая точка зрения, излагавшаяся в другом месте этой книги и обрисованная в п. 2.1.1, допускала передачу полезностей между игроками; она заставляет предполагать пропорциональность полезности и ее денежного измерения. Однако на данной стадии исследования это не имеет значения.

Однако для действительно интересных случаев частично упорядоченных систем ни одно из утверждений (A:16) или (A:17) не верно. (См., в частности, второй пример в конце п. 65.3.2, с которым мы встречаемся также в сноске 1 на стр. 590, где указывается на его связь с понятием полезности. Это — упорядочение на плоскости, при котором $u > v$ означает, что $u$ имеет бóльшие, чем у $v$, ординату и абсциссу).

Второе. В группе аксиом (3:B) аксиомы (3:B:a) и (3:B:b) выражают свойство монотонности, без которого было бы трудно обойтись. С другой стороны, аксиомы (3:B:c) и (3:B:d) выражают то, что известно в аксиоматике геометрии как аксиома Архимеда: сколь бы много полезность $v$ ни превосходила (или была бы меньше, чем) полезность $u$ и сколь бы мало полезность $w$ ни превосходила (соответственно была бы меньше, чем) полезность $u$, если $v$ примешать к $u$ с численно достаточной малой вероятностью, то эта смесь будет отличаться от $u$ меньше, чем $w$. Быть может, желательно требовать сохранения этого свойства при всех условиях, так как отказ от него был бы равносилен введению бесконечных разностей между полезностями.

Замечание. По поводу аксиомы Архимеда в геометрической аксиоматике, где она возникла, см., например, книгу Д. Гильберта, упомянутую в сноске 1 на стр. 100. Ср. с аксиомой V.I в этой книге. Аксиома Архимеда широко использовалась в аксиоматике числовых систем и алгебр.

Имеется небольшое различие между трактовкой аксиомы Архимеда здесь и в цитируемой литературе. Мы свободно пользуемся понятием вещественного числа, в то время как обычно в соответствующей литературе этого избегают. Поэтому принятый подход состоит в возможности «мажорировать» «большее» количество соответствующим прибавлением «меньшего» (ср., например, гильбертову процедуру из указанной книги), в то время как мы «минорируем» «меньшее» количество (в нашем случае разницу между полезностями $w$ и $u$) умножением на соответственный малый множитель (в нашем случае коэффициент $\alpha$) «большего» количества (в нашем случае разницы между $v$ и $u$).

Это различие чисто техническое и не влияет на концептуальную сторону вопроса. Читатель может заметить также, что мы говорим о таких количествах, как «превышение $v$ над $u$» или «превышение $u$ над $v$» или (объединяя обе эти возможности) «разница между $u$ и $v$» ($u$, $v$ — полезности), лишь для облегчения словесных выражений. Эти обороты не являются частью строгой, аксиоматической системы.

В этой связи стоит также сделать следующее замечание. Пусть дана произвольная линейно упорядоченная система полезностей $\mathcal{U}$, в которой не допускаются вероятностные комбинации событий и не дано числовой интерпретации полезностей. (Например, система, построенная на обычном упорядочении при помощи кривых безразличия. Линейность этого отношения, как было указано в первом замечании, следует из того, что его можно рассматривать как обобщение понятия равенства, т. е. трактовать введенное там отношение $u \approx v$ как равенство. В этом случае $u \approx v$ означает, конечно, что $u$ и $v$ лежат на одной и той же кривой безразличия.) Введем теперь события, происходящие с некоторыми вероятностями. Это означает, что мы вводим комбинации, скажем, $n$ $(= 1, 2, \ldots)$ событий с соответствующими вероятностями

$$\alpha_1 \ \ldots, \alpha_n \quad \left(\alpha_1 \ \ldots, \alpha_n \geqq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\right).$$

Это требует введения соответствующих (символических) комбинаций полезностей $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ $(u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{U})$. Эти комбинации $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ (при любых $n = 1, 2, \ldots$ и любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $u_1, \ldots, u_n$, подчиненных указанным выше условиям) можно линейно упорядочить и не делая их числовыми—если допускать не-архимедовы упо-

рядочения. Действительно, сравнивая, скажем, $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ с $\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m$, мы можем принять, что $n = m$ и что $u_1, \ldots, u_n$ и $v_1, \ldots, v_m$ совпадают (запишем $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + 0v_1 + \ldots + 0v_m$ и $0u_1 + \ldots + 0u_n + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m$ соответственно вместо $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ и $\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m$ и заменим затем $n + m$; $u_1, \ldots, u_n$; $v_1, \ldots, v_m$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $0, \ldots, 0$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ соответственно на $n$; $u_1, \ldots, u_n$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \ldots, \beta_n$). Таким образом, достаточно сравнивать $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ и $\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n$. Далее, при помощи надлежащей перестановки индексов $1, \ldots, n$ сделаем так, чтобы было $u_1 > \ldots > u_n$. После этой предварительной подготовки положим $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n > \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n$, если для наименьшего $i$ $(= 1, \ldots, n)$, для которого $\alpha_i \neq \beta_i$ (скажем, $i = i_0$), будет $\alpha_{i_0} > \beta_{i_0}$.

Ясно, что эти полезности не числовые. Их не-архимедов характер становится ясным, если заметить, что сколь угодно малое превышение вероятностей $\beta_{i_0} - \alpha_{i_0}$, соответствующих $u_{i_0}$, перевешивает любое возможное противоположное превышение $\beta_i - \alpha_i$ оставшихся $u_i$, $i = i_0 + 1, \ldots$ $\ldots, n$, т. е. полезностей $< u_{i_0}$. (Это, следовательно, исключает возможность применения критериев, подобных упомянутому в сноске 1 на стр. 44.) Очевидно, что здесь нарушаются наши аксиомы (3:B:c) и (3:B:d).

Ясно, что такое не-архимедово упорядочение противоречит нашим обычным представлениям о природе полезности и предпочтения. Если, с другой стороны, желательно определить для вероятностных систем полезности (и их упорядочение), удовлетворяющие аксиомам (3:A)—(3:C) и, следовательно, обладающие архимедовым свойством, то полезности должны быть числовыми, так как в этом случае применимы наши рассуждения из п. А.2.

Третье. Представляется вероятным, что действительно уязвимой для критики группой аксиом является (3:C) или, более конкретно, аксиома (3:C:b). Эта аксиома выражает правило комбинирования сложных случайных альтернатив, и представляется правдоподобным, что специфическая полезность или вредность азартной игры может иметь место лишь при отказе от этого простого правила комбинирования.

Некоторое изменение системы (3:A)—(3:C), включающее во всяком случае отказ от (3:C:b) или хотя бы радикальное изменение этой аксиомы, возможно, приведет к математически полному и удовлетворительному исчислению полезностей, которое будет охватывать и возможности специфической полезности или вредности азартной игры. Можно надеяться, что будет найден способ сделать это, однако математические трудности при этом представляются значительными. Конечно, это заставляет считать осуществление надежд на успешный подход при помощи чисто словесных средств еще более далеким.

Из сделанных выше замечаний ясно, что употребительный метод использования кривых безразличия не в силах преодолеть эти трудности. Он просто расширяет понятие равенства (см. первое замечание выше), но он не дает никаких полезных указаний, и тем более никаких конкретных предписаний, как трактовать ситуации, в которых участвуют вероятности, неизбежно связанные с ожидаемыми полезностями.

*ДОБАВЛЕНИЕ*

# РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ИГР

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

Наступит день, когда, благодаря длившемуся несколько столетий изучению, вещи, ныне скрытые, явятся со всею своею очевидностью; и потомки наши изумятся, что столь очевидные истины ускользнули от нас.

*Сенека*

# ВВЕДЕНИЕ

Обычно «генеалогическое дерево» представляется в виде дерева в смысле теории графов, в которых разветвление происходит от некоторого единого «корня». Родословная теории игр скорее напоминает дерево в первоначальном, ботаническом значении этого слова. Она имеет многочисленные разветвленные корни, уходящие в глубь веков, вырастающий из них ствол — книгу Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна — и мощную крону, в которой переплелись современные работы по теории игр. Плодоносить это дерево только начинает, и практические урожаи еще впереди.

Поэтому исторический ход развития теории игр, сначала как математизированной, а затем как математической дисциплины, естественным образом расчленяется на три этапа. Первый этап — до выхода в свет монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна. Его можно назвать «домонографическим». На этом этапе игра выступает пока еще как конкретное состязание, описываемое своими правилами в содержательных терминах. Лишь в конце его Дж. фон Нейман вырабатывает представление об игре как об общей модели абстрактного конфликта. Итогом этого этапа явилось накопление ряда конкретных математических результатов и даже отдельных принципов будущей теории игр.

Второй этап составляет сама монография Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна, объединившая в себе большинство ранее полученных (впрочем, по современным математическим масштабам довольно немногочисленных) результатов. Она впервые представила математический подход к играм (как в конкретном, так и в абстрактном понимании этого слова) в виде систематической теории. Немного можно указать таких книг в истории математики, которые подобно монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна создавали, фактически «на пустом месте», сложную, важную и притом весьма нетрадиционную математическую дисциплину.

Наконец, на третьем этапе теория игр в своем подходе к изучаемым объектам мало чем отличается от других разделов математики и развивается в значительной мере по общим с ними закономерностям. При этом, разумеется, существенное влияние на формирование направлений теории игр оказывает специфика ее практических приложенний, как фактических, так и возможных.

Сказанное определяет и общее построение данной обзорной статьи. Ее главы соответствуют указанным этапам истории теории игр. Разумеется, данная статья не может претендовать на исчерпывающее изложение всех фактов, важных для истории теории игр. Последняя должна стать предметом специальных исследований.

*Глава I*

# ДО МОНОГРАФИИ

## § 1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ИСХОДА ИГРЫ И ЕЕ ИСТОЧНИКИ

1. Для большинства конфликтов, а потому и для игр типа состязаний, являющихся моделями или имитациями конфликтов, характерна неопределенность исхода. Именно это обстоятельство побуждает к сознательному вступлению в конфликт тех его участников, которые объективными причинами в действительности с самого начала обречены на поражение. Именно оно привлекает к состязаниям их участников и свидетелей. Наконец, именно благодаря ему всякое принятое игроком в процессе игры решение оказывается решением в условиях неопределенности.

Количественные характеристики неопределенности, рассматриваемые в теории информации (или в теории сложности), несомненно, влияют на принятие решений в условиях этой неопределенности. Однако это влияние еще недостаточно изучается в рамках теории игр, и ему посвящены лишь отдельные, эпизодические работы теоретико-игрового характера.

С чисто качественной точки зрения причины неопределенности результата игры можно разбить на три группы.

2. Начнем с того, что правила игры могут допускать такое разнообразие партий, что априорное предсказание исхода каждой партии практически невозможно, хотя с принципиальной точки зрения, если отвлечься от различия между потенциальной осуществимостью и реальной осуществимостью, никаких препятствий для такого предсказания нет.

Источники неопределенности этого типа можно назвать *комбинаторными*, а игры, для непредсказуемости исхода которых комбинаторные причины оказываются решающими,— *комбинаторными играми*. Явно выраженной комбинаторной игрой являются шахматы.

Ясно, что комбинаторная сложность игры носит исторически преходящий характер. Разработка отдельных приемов «правильной» игры, обобщаемой иногда в виде надлежащего математического аппарата, делает множество вариантов игры все более обозримым, а использование вычислительной техники расширяет само понятие «обозримости».

Различные игры находятся в настоящее время в разных фазах этого исторического процесса. Те игры, для которых этот процесс дошел до конца, практически утрачивают черты состязания и превращаются в развлечение, не лишенное, впрочем, известной педагогической, а иногда и научной ценности. Так случилось, например, с известными играми типа «ним», состоящими в поочередном взятии игроками предметов из нескольких куч в соответствии с предписанными правилами. Эти игры поддаются полной формализации, и нахождение выигрывающих комбинаций (разумеется, в тех случаях, когда такие выигрывающие комбинации существуют) сводится к решению логических задач не слишком большого объема.

В других играх, более сложных, чисто логические принципы хотя и не позволяют дать исчерпывающий анализ игры, но приводят к некоторым прогнозам общего характера. Наконец, в играх, сложность которых

находится на уровне сложности шахмат, логические соображения не выходят за рамки здравого смысла (хотя иногда и весьма изощренного), и центр тяжести искусства игры перемещается в область умения анализировать, оценивать и сравнивать большое число вариантов.

3. Другим источником неопределенности исхода игры является влияние случайных факторов. Случайное может появляться в игре либо как результат действия тех или иных «стихийных сил» (рассеивание при стрельбе, метеорологические условия, случайные обстоятельства, определяющие загрузку каналов систем массового обслуживания, и т. п.), либо в результате сознательных поступков участвующих в процессе игры людей, которые осуществляют специальным образом организованные «рандомизированные» действия (бросание монеты или кости, использование таблиц случайных чисел и т. д.).

Игры, в которых исход оказывается неопределенным исключительно в силу случайных причин, называются *азартными*. Типичными примерами азартных игр являются разного рода игры в кости, а также игра в «орлянку» в той ее форме, когда один игрок подбрасывает монету, а его противник стремится угадать, какой стороной монета вскроется. Чисто азартной игрой является также известная рулетка. Говорить о правильности или об оптимальности поведения игрока в азартной игре не приходится: исход игры не зависит от его действий. Единственные решения, которые он может принимать, касаются лишь целесообразности его участия или неучастия в той или иной игре в зависимости от ее правил. Впрочем, принятие такого решения лежит уже в значительной степени в психологической плоскости (см. по этому поводу далее I. 3. 4 *)).

Разумеется, можно указать игры, сочетающие в себе черты комбинаторных и азартных игр. К числу таких игр относится, например, трик-трак вместе со своими довольно многочисленными современными разновидностями, а также разного рода карточные пасьянсы, где неопределенность обусловливается, с одной стороны, случайным расположением карт в колоде, а с другой — комбинаторной сложностью конфигураций, составленных из открытых карт на столе.

4. Третий источник неопределенности исхода игры имеет стратегическое происхождение: игрок может не знать, какого образа действий придерживается его противник. В отличие от двух предыдущих источников неопределенности, этот является игровым по существу. Он дает неопределенность, исходящую от другого участника игры, который может быть как реальным (человек, коллектив), так и условным (природа, обстоятельства). Игры, в которых неопределенность исхода возникает по указанной стратегической причине, называются *стратегическими играми*.

Как это ни кажется странным, стратегические игры в их чистом виде распространены сравнительно редко. Простейшим примером стратегической игры является игра в «орлянку» в той ее форме, когда два участника игры независимо друг от друга кладут на стол по монете. Если окажется, что монеты выложены одинаковыми сторонами вверх, то выигрывает первый игрок; в противном случае выигрывает второй.

При всей примитивности этой игры она в одном отношении является «более трудной», чем, скажем, шахматы. В шахматах действие разыгры-

*) Здесь и далее так будут обозначаться ссылки в пределах данной статьи. В ссылках на текст монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна при номере главы всегда будет присутствовать слово «глава», при номере параграфа — символ §, а при указании пункта — буква «п.».

вается на открытой доске, и можно себе представить, хотя бы мысленно, такого «идеального игрока», который видит все возможности, заложенные в каждой из позиций. Каждый ход, который обдумывается одним из партнеров, в равной мере обдумывается и его противником. В отличие от этого в описанной игре в «орлянку» игрок принципиально не может узнать, что сделал его противник. Именно это обстоятельство и делает такую игру стратегической.

С правильностью, оптимальностью поведения игрока здесь дело обстоит существенно сложнее, чем в предыдущих случаях. Ясно, что само по себе выкладывание монеты лицевой или оборотной стороной не может считаться ни хорошим, ни плохим поведением, ибо, как замечает Н. Винер, «...эффективность оружия зависит от того, какое имеется другое оружие, способное противостоять ему...» [1].

В действительности в стратегических играх оптимальным оказывается рандомизированное поведение. Применительно к игре в «орялнку», это означает, что целесообразно не выкладывание монеты на стол той или иной стороной, а подбрасывание ее для того, чтобы она с равными шансами могла выпасть каждой из своих сторон.

Стратегичность игры может сочетаться с ее комбинаторностью («морской бой» — разновидность шахмат, где каждый игрок на своей доске играет, видя лишь свои фигуры, а посредник снимает их в результате взятия, объявляет шахи и фиксирует мат или ничью), с азартностью (покер), а также с комбинаторностью и азартностью одновременно (преферанс, в котором азартность проистекает от случайного расклада карт, стратегичность — от назначения игры и определения «сноса», а комбинаторность — от трудности ориентироваться в раскладах карт, даже в тех случаях, когда они раскрыты).

## § 2. КОМБИНАТОРНЫЕ ИГРЫ

1. По-видимому, первое появление комбинаторной игры в облике математической задачи относится к началу XVII века. В известном «Сборнике математических развлечений» Баше де Мезирака, вышедшем в свет в 1612 г. [1], помещена задача следующего содержания: двое называют поочередно числа от единицы до десяти и выигрывает тот, кто первый доведет до ста сумму чисел, названных обоими игроками.

Решение этой задачи не составляет труда: если игроку удастся довести сумму всех названных чисел до числа вида $100 - 11a$, то он может обеспечить себе выигрыш. Для этого ему следует после каждого хода противника называть число, дополняющее только что названное противником число до 11. В частности, начинающий партию игрок может своим первым ходом назвать число 1 и, тем самым форсировать выигрыш.

Очевидно, эту игру можно интерпретировать как процесс поочередного взятия игроками от одного до 10 предметов из кучи, насчитывающей первоначально 100 предметов.

Более сложной является игра «фан-тан», по-видимому, китайского происхождения. В этой игре игроки имеют дело с тремя кучами предметов; они выбирают на каждом ходе любое число предметов из произвольной кучи. Выигрывает игрок, забирающий последние предметы. Полная теория этой игры была опубликована в 1902 г. Баутоном [1].

В еще более общей форме эта игра называется игрой «ним» и выглядит следующим образом. Имеются $n$ куч предметов. Каждый из двух поочередно ходящих игроков выбирает $p$ куч и из каждой выбранной кучи берет

произвольное число предметов. Игрок, берущий последние предметы, выигрывает. Анализ этой игры дал Мур в 1909 г. [1].

Проведенные Муром рассуждения фактически опираются на следующее соображение. Оказывается, что в каждой игре типа «ним» можно в явном виде указать некоторый класс позиций, обладающих так называемыми свойствами внешней и внутренней устойчивости. Первое из них означает, что, какова бы ни была позиция, не принадлежащая к рассматриваемому классу, существует такой ход в ней, который приводит к позиции из нашего класса. Второе свойство состоит в том, что всякий ход, сделанный в позиции из этого класса, выводит за его пределы. Таким образом, если описанный класс содержит выигрывающую позицию (а в играх типа «ним» выигрывает игрок, забирающий все оставшиеся предметы), то и каждая позиция из этого класса может считаться выигрывающей.

В частности, в игре Баше де Мезирака таким классом выигрывающих позиций оказались те, при которых сумма всех названных игроком чисел имеет вид $100 - 11a$.

Изложенная идея двоякой устойчивости оказалась весьма плодотворной в теории игр. Мы будем к ней неоднократно возвращаться.

2. По мере увеличения комбинаторной сложности игры явное указание множества всех выигрывающих позиций (в описанном выше смысле, т. е. обладающего свойством двоякой устойчивости) становится все более затруднительным. Для такой игры, как шахматы, это оказывается практически невозможным. Поэтому при математическом анализе комбинаторно сложных игр усилия переносятся с поисков множества выигрывающих позиций на доказательство существования таких множеств.

На этот путь встал Э. Цермело. В 1912 г. на Пятом международном конгрессе математиков он выступил с докладом: «О применении теории множеств к теории шахматной игры» [1], в котором изложил следующий подход к комбинаторным играм.

Рассматривается игра с конечным множеством позиций (Цермело говорит для определенности о шахматах, но имеет в виду все аналогичные игры позиционного типа). При этом позиции, отличающиеся только очередью хода игроков, считаются различными.

Для каждой позиции $q$ вводится множество $U_r(q)$ таких «эндшпилей», в которых белые форсируют выигрыш не более чем за $r$ ходов. Здесь возможность форсирования выигрыша понимается в следующем смысле.

Пусть некоторый эндшпиль $\mathfrak{q} = (q, q_1, q_2, \ldots)$ принадлежит $U_r(q)$, $q_\lambda$ — некоторая встречающаяся в $\mathfrak{q}$ позиция с очередью хода черных и черные ходят из позиции $q_\lambda$ в позицию $q_{\lambda+1}$. Рассмотрим другую позицию, $q'_{\lambda+1}$, в которую черные, в соответствии с правилами игры, также могли бы пойти из $q_\lambda$. Тогда среди эндшпилей из $U_r(q)$ найдется такой эндшпиль $\mathfrak{q}'$, который начинается с позиций $q, q_1, \ldots, q_\lambda, q'_{\lambda+1}$. Возможность форсированного выигрыша белыми за $r$ ходов из позиции $q$ означает при этом $U_r(q) \neq \varnothing$.

Если общее число всех возможных позиций в игре равно $t$, то из возможности форсированного выигрыша белыми из позиции $q$ за конечное число ходов вытекает аналогичная возможность не более чем за $t$ ходов. Таким образом, выигрышность позиции $q$ для белых равносильна $U(q) = U_t(q) \neq \varnothing$.

Сходным образом определяется множество $V(q) \supset U(q)$ начинающихся из $q$ эндшпилей, в которых белые форсируют ничью. Ничья для белых достижима, если $V(q) \neq \varnothing$. Если же $V(q) = \varnothing$, то в позиции $q$ выигрыш форсируют черные.

Таким образом, Цермело установил, что в каждой позиции $q$ имеет место одна из трех возможностей: либо белые обеспечивают себе выигрыш (это будет, если $U(q) \neq \varnothing$), либо они обеспечивают себе ничью, но не выигрыш (т. е. и черные обеспечивают себе ничью, но не выигрыш; это будет, если $U(q) = \varnothing$, но $V(q) \neq \varnothing$), либо выигрыш обеспечен черным (это будет, если $V(q) = \varnothing$). Этот же вопрос можно поставить и применительно к начальной позиции. Цермело замечает по этому поводу, что ответ на этот вопрос полностью лишил бы шахматы характера игры.

3. В 1925 г. Штейнгауз опубликовал статью «Определения теории игр и преследования» [1], которая долгие годы оставалась известной лишь весьма узкому кругу лиц, пока не была переиздана в 1960 г. в английском переводе. В этой статье Штейнгауз вводит (для определенности — применительно к тем же шахматам) понятие «способа игры» как «списка всех возможных обстоятельств с предпочитаемым ходом для каждого из них». За наилучшую стратегию признается та, в которой максимальное число ходов, какое может продержаться противник, минимизируется. В сущности, в этих определениях уже содержатся идеи стратегии и принципа максимина.

В данной работе Штейнгауз не рассматривает вопросов существования и тем более нахождения наилучших стратегий, относя это к иному классу задач (в соответствии с общей иерархией задач, указываемой им в начале статьи).

4. В рассуждениях Цермело переход от форсирования выигрыша за конечное число шагов к форсированию выигрыша за ограниченное число шагов не был должным образом обоснован. В 1927 г. Д. Кёниг [1] произвел точное доказательство этого утверждения на основе одной своей теоремы из теории бесконечных графов. На возможность применения этой теоремы к играм ему указал Дж. фон Нейман. По-видимому, именно в этой статье Кёнига имя фон Неймана впервые упоминается в печати в связи с играми. Впрочем, интерес к игровым вопросам фон Нейман проявил еще раньше. Подробнее об этом будет сказано в I.4.1.

Справедливость требует отметить, что Цермело, ознакомившись с работой Кёнига до ее опубликования, предложил собственное, независимое, весьма короткое и изящное недостающее доказательство, которое Кёниг приводит в приложении к своей статье [1]. По свидетельству Кёнига, доказательство, основанное на этой идее, было известно и фон Нейману.

5. Доказательство Кёнига опирается, по существу, не на условие конечности числа возможных позиций в игре, а лишь на более слабое условие конечности числа позиций, достижимых из данной за один ход и тем самым за $n$ ходов при любом фиксированном натуральном $n$. В качестве примера такой игры он приводит игру обычными шахматными фигурами на неограниченной доске.

Следующий шаг в этом направлении был сделан Л. Кальмаром, который в своей работе [1] отказался от условия конечности числа позиций, достижимых за один ход из данной.

6. Формализацию рассуждений, касающихся двоякой устойчивости выигрывающих множеств в играх двух лиц позиционного типа с поочередными ходами, осуществил П. Гранди [1, 2].

Пара позиций игры, отличающихся лишь очередью хода игроков, называется *диаграммой*. Обозначим множество всех возможных диаграмм в игре через $X$. Если каждую диаграмму изобразить точкой и соединить направленными дугами каждую из диаграмм со всеми теми диаграммами, в которые из нее можно перейти за один ход, то мы получим ориентиро-

ванный граф. Обозначим его через (Г, $X$). Фиксируем в окончательных диаграммах этого графа (т. е. в таких диаграммах, из которых ни в какую другую диаграмму перейти уже нельзя) выигрыш того или иного игрока. Пусть каждый игрок (мы ограничиваемся описанием случая, который можно назвать симметричным) выигрывает в диаграммах из множества $K$ при своем ходе и в диаграммах из множества $L$ при ходе противника. Сказанное определяет некоторую игру, которую будем обозначать через (Г, $X$, $K$, $L$).

Функция $g$, определенная на множестве всех диаграмм и принимающая целые неотрицательные значения, называется *функцией Гранди*, если она обладает следующими свойствами:

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in L; \\ 1, \text{ если } x \in K; \\ \text{наименьшему из натуральных чисел,} \\ \text{отличных от чисел вида } g(y), \text{ где } y \in \Gamma x. \end{cases}$$

Пусть для данной игры (Г, $X$, $K$, $L$) функция Гранди существует. Как показал впоследствии М. Ричардсон [1, 2], для этого достаточно, чтобы в графе (Г, $X$) при любом $x \in X$ множество $\Gamma x$ и множество всех тех $y \in X$, для которых $x \in \Gamma y$, были конечными, а также чтобы этот граф не содержал контуров нечетной длины.

Множество диаграмм, которые являются множеством нулей функции Гранди, обладает свойством двоякой устойчивости.

В самом деле, предположим, что какому-либо игроку (пусть для определенности первому) удается при некотором своем ходе создать диаграмму $a$, для которой $g(a) = 0$. Тогда второй игрок выбирает некоторую диаграмму $b \in \Gamma a$. Но, по определению функции Гранди, равное нулю значение $g(a)$ отлично от всех чисел вида $g(z)$ для $z \in \Gamma a$. В частности, должно быть $g(b) \neq 0$.

Мы видим, что в результате одного хода нельзя совершить перехода внутри множества нулей функции Гранди. Это свойство множества называется его *внутренней устойчивостью*.

Пусть теперь первый игрок оказывается в позиции $b$, для которой $g(b) \neq 0$. Он выбирает некоторое $c \in \Gamma b$. Если бы среди диаграмм $\Gamma b$ не нашлось такой диаграммы $z$, что $g(z) = 0$, то было бы $g(b) = 0$, чего, однако, нет. Следовательно, существует такое $c \in \Gamma b$, что $g(c) = 0$.

Сказанное означает, что в результате одного хода всегда можно совершить переход извне множества нулей функции Гранди в пределы этого множества. Это свойство множества называется его *внешней устойчивостью*.

Таким образом, первый игрок, раз попав на нуль функции Гранди, имеет возможность этого множества нулей не покидать. Тем самым он либо приведет игру в множество $L$, либо воспрепятствует ее окончанию.

## § 3. АЗАРТНЫЕ ИГРЫ

1. Фактор случайности является определяющим во всех азартных играх (не лишним будет здесь напомнить, что по-французски «hasard» значит «случай» и происходит от арабского слова «азар» — az-zahr, означающего «трудный»; первоначально этот термин употреблялся как характеристика наиболее редких случаев).

К числу азартных игр следует отнести прежде всего игру в кости. Различные варианты этой игры в течение долгого времени являлись основным источником теоретико-вероятностной проблематики и единственной областью ее приложений. Заметим тут же, что бросание костей практиковалось не только в состязательных целях, но также и при гаданиях, причем каждая комбинация выпавших очков имела свое значение.

Обратим внимание на следующие два обстоятельства. В подавляющем большинстве азартных игр (и в том числе в игре в кости) случайное возникает не как спонтанное действие тех или иных «стихийных» сил, а в результате сознательных поступков участвующих в процессе игры людей. Кроме того, использование костей для гаданий означает, что рандомизирующие устройства применялись в вопросах принятия решений.

2. Первые вероятностные рассуждения и даже в какой- то мере подсчеты, касающиеся различных исходов бросаний костей, встречаются, по-видимому, в трактате Кардано «Об азартной игре» (см., например, у Цейтена [1], стр. 168), а исчерпывающий анализ вероятностей различных исходов при бросании трех костей содержится в работе Галилея «О выходе очков при игре в кости» (см. статью Майстрова [2]).

Затем, почти полвека спустя, происходит известный обмен письмами между Паскалем и Ферма [1], где (в письме от Паскаля к Ферма от 29 июля 1654 г.) излагается решение задачи де Мере и тем самым, как принято считать по традиции, рождается математическая теория вероятностей. В это же время в (1657 г.) Гюйгенс завершает свой трактат [1] «О расчетах в азартной игре», в котором, между прочим, пишет: «... при внимательном изучении предмета читатель заметит, что он занимается не только игрой, а что здесь даются основы теории глубокой и весьма интересной». Однако лишь через 14 лет Жан де Витт применяет вероятностные расчеты к вычислению значений пожизненной ренты, и только с этого момента теория вероятностей как раздел математики покидает свою игровую питательную среду и начинает самостоятельное существование. По поводу роли азартных игр в возникновении теории вероятностей см. статью Майстрова [1].

3. Если целью игрока в комбинаторной игре является выигрыш и оптимальными действиями, стратегиями игрока считаются те, которые ему этот выигрыш обеспечивают, то в условиях азартной игры никакое искусство игрока (не выходящее за рамки правил игры) не может гарантировать ему желаемый исход, зависящий, помимо всего прочего, еще и от случая. Поэтому получение игроком какой-либо фиксированной суммы не может, вообще говоря, рассматриваться им как та цель, для достижения которой он выбирает ту или иную свою стратегию. Здесь цель оказывается более сложной.

Самым естественным представляется стремление игрока максимизировать тот выигрыш, который он ожидает получить. Количественная оценка надежд игроков в различных играх (фактически — в условиях неоконченного матча, состоящего из нескольких партий) была уже в XVI веке предметом полемики между Кардано и Лукой Пачиоли (см. у Цейтена [1] на стр. 169), а столетие спустя в упоминавшемся выше письме Паскаля она была положена в основу «справедливого» разделения неразыгранной ставки. Гюйгенс назависимо от Паскаля и Ферма пришел к аналогичному результату, выраженному в более общем виде и позволяющему говорить о математическом ожидании.

Таким образом, максимизация математического ожидания выигрыша оказалась ведущим принципом участника азартной игры. Впоследствии Лаплас [1] включил его в число своих «основных принципов исчисления

вероятностей» (VIII принцип), сформулировав его следующим образом: «Если выгода зависит от многих событий, то, беря сумму произведений вероятности каждого события на благо, связанное с его наступлением, мы получим эту выгоду». Лаплас поясняет, что эта выгода и есть математическое ожидание.

На этой же почве возникло представление о безобидной игре как о такой игре, перед началом которой математическое ожидание выигрыша каждого игрока равно нулю.

Если подходить к азартным играм с позиций максимизации математического ожидания выигрыша, то исчерпывающий их анализ принципиально может быть осуществлен средствами теории вероятностей. Трудности, которые при этом встречаются, носят чисто технический характер. Поэтому мы не будем здесь останавливаться на дальнейших математических исследованиях азартных игр, проведенных на основе этого принципа.

**4.** Некритическое применение принципа максимизации математического ожидания может привести к парадоксам. Первый пример такого парадокса был указан Николаем Бернулли и получил название «петербургского парадокса». Он состоит в следующем.

Пусть два игрока подбрасывают монету до первого выпадения «герба». Если «герб» впервые выпадет на $n$-м бросании, то первый игрок получает от второго $2^n$ единиц. Здесь математическое ожидание выигрыша первого игрока бесконечно. Поэтому, какой бы он первоначальный (конечный) взнос ни сделал, игра будет не безобидной, а выгодной для него. Этот вывод, однако, противоречит «здравому смыслу», потому что практически капитал второго игрока ограничен, и при затянувшейся партии первый игрок не сможет получить всего причитающегося ему выигрыша. Кроме того, ограниченными являются и «способности освоения» выигрыша первым игроком. Поэтому при достаточно большом $n$ выигрыш $2^n$ с вероятностью $1/2^n$ предпочтительнее выигрыша $2^{n+1}$ с вероятностью $1/2^{n+1}$: оба выигрыша «практически одинаково громадны», но первый из них имеет большую вероятность, чем второй.

Приведенные два возражения разнородны по существу. Первое более формально и может быть столь же формально снято, если отождествить потенциальную осуществимость с практической осуществимостью.

Второе возражение, несмотря на кажущуюся нарочитость, более содержательно: оно отражает то обстоятельство, что приращение полезности, происходящее от приращения выигрыша, зависит не только от самого приращения выигрыша, но и от абсолютной величины выигрыша. Даниил Бернулли (племянник Николая Бернулли) принял, что полезность приращения выигрыша $dx$ прямо пропорциональна $dx$ и обратно пропорциональна $x$. Как легко видеть, это равносильно тому, что полезность самого выигрыша пропорциональна его логарифму. Отсюда следует, что выигрыш некоторой суммы с последующим ее проигрышем, равно как и проигрыш с последующим отыгрышем, выгоден для игрока, ибо в каждом из этих случаев он теряет меньшую долю своего капитала, чем приобретает. Это утверждение также в какой-то мере парадоксально. Во всяком случае, можно привести очевидные соображения как за него, так и против.

Измеряемая по такой логарифмической шкале полезность приводит к замене математического ожидания «моральным ожиданием», которое, впрочем, правильнее было бы назвать «психологическим ожиданием». Такое измерение полезности Лаплас также причисляет к своим принципам исчисления вероятностей (X принцип), квалифицируя его, однако, лишь как принцип, «могущий быть полезным во многих случаях».

5. В наиболее общем и полном виде теория азартных игр строится Дубинсом и Сэвиджем в их монографии [1]. Основную задачу теории они формулируют как нахождение оптимального поведения игрока, располагающего к моменту начала игры некоторой заданной суммой и обладающего заданной функцией полезности.

Весьма существенно, что классические вероятностные (т. е. счетно-аддитивные) распределения оказываются недостаточными для исчерпывающего описания возникающих в азартных играх явлений. Поэтому Дубинс и Сэвидж приходят к необходимости разработки более общей теории — конечно-аддитивных дискретных вероятностных процессов.

Далее станет видно (см. III.2.5), что конечно-аддитивные распределения оказываются важными и для стратегических игр.

## § 4. СТРАТЕГИЧЕСКИЕ ИГРЫ. РАБОТЫ Э. БОРЕЛЯ

1. В отличие от комбинаторного и азартного аспектов игр, корни математической разработки которых уходят вглубь столетий, стратегические вопросы игр имеют значительно более короткую историю.

Первая математическая трактовка стратегического аспекта игры встречается в курсе теории вероятностей Бертрана [1], где рассматривается вопрос о целесообразности «прикупать к пяти», играя в бакара. Рассуждения Бертрана носят в значительной мере психологический характер: он оценивает целесообразность для понтера прикупать или не прикупать в зависимости от того, знает или не знает банкомет его обычное поведение.

Сказанное Бертраном следует рассматривать даже не как математическую постановку вопроса, а лишь как указание на ее возможность.

2. В 1921 г. вышла в свет небольшая, но весьма содержательная заметка Э. Бореля «Теория игры и интегральные уравнения с кососимметричными ядрами» [1]. В этой работе были впервые сформулированы основные понятия, связанные со стратегическими играми (точнее, с теми играми, которые впоследствии получили название симметричных антагонистических игр).

Стратегия определялась как система правил, точно определяющих действия игрока в любых возможных обстоятельствах. При этом игра рассматривалась как азартная, и выбор двумя ее участниками $A$ и $B$ соответственно стратегий $C_i$ и $C_j$ приводил к победе игрока $A$ с вероятностью $\frac{1}{2}+\alpha_{ij}$ (из симметричности игры вытекает, что $\alpha_{ij}=-\alpha_{ij}$, а $\alpha_{ii}=0$).

Борель высказал также идею использования доминирования стратегий: если $\alpha_{ih}\leqq 0$ при всех значениях $h$, то стратегию $C_i$ можно считать «плохой» и исключить из рассмотрения.

Наоборот, если при всех значениях $h$ имеет место $\alpha_{ih}\geqq 0$, то стратегию $C_h$ можно считать «лучшей».

В случае, когда плохие стратегии исключены, а лучшие отсутствуют, следует попытаться выработать систему игры, основанную на чередовании стратегий, причем это чередование должно опираться не на психологические соображения, а на правила игры. Единственную возможность Борель видит здесь в выборе игроком $A$ каждой своей стратегии $C_k$ с некоторой вероятностью $p_k$. Аналогично игрок $B$ будет выбирать свои стратегии $C_k$ с вероятностями $q_k$. Тем самым Борель впервые установил целесообразность использования смешанных стратегий.

В результате указанного выбора смешанных стратегий вероятность победы игрока $A$ окажется равной

$$\sum_i \sum_j \left(\frac{1}{2}+\alpha_{ij}\right) p_i q_j = \frac{1}{2}+\alpha.$$

Нетрудно видеть, что если число стратегий каждого игрока равно трем, то

$$\alpha = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ \alpha_{23} & \alpha_{31} & \alpha_{12} \end{vmatrix}.$$

Ясно, далее, что при отсутствии «плохих» и «лучших» стратегий числа $\alpha_{23}$, $\alpha_{31}$ и $\alpha_{12}$ будут одного знака, и можно найти такую систему вероятностей $p_1$, $p_2$, $p_3$, что $\alpha$ будет равно нулю независимо от того, какой будет система вероятностей $q_1$, $q_2$, $q_3$.

Тем самым, говоря современным языком, Борелем была доказана теорема о существовании оптимальных стратегий (называемая также теоремой о минимаксе) для симметричных матричных игр размера $3\times 3$.

Ясно, что это доказательство опирается на весьма конкретные соображения, связанные с тем, что число чистых, нерандомизированных стратегий у каждого игрока равно трем. Борель сомневался в возможности распространить это результат на случай произвольного числа стратегий, склоняясь даже к отрицательному решению вопроса в общем случае. Он полагал, что, «вообще говоря, каковы бы ни были числа $p_k$, можно выбрать числа $q_k$ так, чтобы $\alpha$ имело заранее предписанный знак.» Однако, высказав такое предположение (оказавшееся впоследствии неверным), Борель приводит рассуждение, показывающее глубокое понимание им стратегических ситуаций, приводящих к смешанным стратегиям. Он пишет: «Поскольку это так, какую бы случайную чередуемость (variété) ни ввел в свою игру $A$, раз эта чередуемость определена, для игрока $B$ будет достаточно знать ее для чередования своей игры таким образом, чтобы одержать верх над $A$. Обратное также справедливо, из чего мы должны заключить, что теория вероятностей может служить лишь для облегчения исключения плохих способов ведения игры и вычисления значений $\alpha_{ij}$; в остальном искусство игры зависит от психологии, но не от математики». Только теперь мы можем по достоинству оценить это рассуждение. Мы еще вернемся к этому вопросу.

Далее Борель распространяет постановку вопроса на случай непрерывного множества стратегий игроков. При этом дискретные вероятности переходят в вероятностные распределения, а суммы — в интегралы Стилтьеса. В качестве примера он приводит любопытную задачу, являющуюся в каком-то смысле прообразом современных задач о распределении безгранично делимых ресурсов: каждый из игроков $A$ и $B$ выбирает по 3 числа, составляющих в сумме единицу,

$$x+y+z=1,$$
$$x_1+y_1+z_1=1,$$

и упорядочивает их произвольным образом. $A$ побеждает, если

$$(x_1-x)(y_1-y)(z_1-z)>0$$

(по поводу другой интерпретации этой игры см. II.5. 3).

В заключение статьи Борель отмечает, что вероятностные и аналитические проблемы, которые могут возникнуть в военном искусстве или

в экономике и финансовых делах, не лишены сходства с рассмотренными игровыми проблемами.

Таким образом, в этой первой работе, посвященной стратегическим играм, Борель скорее ставит, чем решает вопрос, но делает это вполне обоснованно даже с современной точки зрения.

**3.** В 1924 г. Борель в статье [2] вернулся к рассмотрению стратегических игр. В ней он приводит исчерпывающий анализ симметричных матричных игр с тремя и пятью стратегиями у каждого игрока. Попутно в одном из подстрочных примечаний Борель указывает на возможность симметризации произвольной игры, которая основана на участии игроков в двух партиях такой игры, причем в этих партиях игроки выступают в различных ролях (точное описание этой симметризации было осуществлено Брауном и фон Нейманом в 1950 г. [1]).

Отметим еще одно, на первый взгляд несколько странное явление, подобное которому мы уже наблюдали в XVII веке, когда Паскаль и Ферма фактически пользовались формулой полной вероятности, т. е. математическим ожиданием условной вероятности, но не математическим ожиданием выигрыша как таковым. Последнее осуществил Гюйгенс. Сходным образом и Борель в своей заметке 1921 г. имеет дело не с численными выигрышами, а с вероятностями победы, которые он усредняет. Математическое ожидание выигрыша встречается у него только в статье 1924 г.

Отчасти это можно объяснить тем, что формула полной вероятности выполняет переход от вероятности к вероятности же. Но математическое ожидание выигрыша, хотя и измеряется в тех же единицах, что и выигрыш, само по себе выигрышем не является. Для того чтобы его понимать как выигрыш, необходимы дополнительные соглашения, не всегда очевидные и даже не всегда естественные. Полная ясность в этот вопрос была внесена лишь после создания аксиоматической теории полезности, о которой пойдет речь в гл. II.

В остальном статья Бореля 1924 г., равно как и его последующие публикации на эту тему, не содержит ничего нового по сравнению с его заметкой 1921 г.

**4.** В 1953 г. в журнале «*Econometrica*» были в английском переводе воспроизведены работы Бореля [1, 2, 3, 4] с коротким предисловием М. Фреше [1], озаглавленным «Эмиль Борель — инициатор теории психологических игр и ее приложений». Как истый математик, Фреше приводит используемое им определение термина «инициатор», принадлежащее Легуве: «Я называю инициаторами тех привилегированных существ, тех магнетических созданий, которые заставляют трепетать в нас до этого немые струны, которые будят души». Но как раз в этом смысле Бореля нельзя считать инициатором теории «психологических» (стратегических) игр. Ничьих душ его статьи по теории игр 20-х гг. не разбудили, никаких печатных откликов они не нашли. Имя инициатора теории игр можно было бы по праву присвоить Борелю даже в том случае, если бы он разбудил душу «одного только» фон Неймана. Но, как явствует из подстрочного примечания фон Неймана к работе [1] (см. стр. 186 русского перевода), он познакомился с заметкой Бореля [1] лишь при окончательном оформлении своей статьи.

Имя Бореля не нуждается в каких-либо титулах. Но чтобы выразить одним словом его место в истории теории стратегических игр, уместнее всего употребить термин «первооткрыватель», который пришел, увидел и ... все. Но увидел Борель немало.

## § 5. К ТЕОРИИ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ИГР

**1.** В 1926 г. Дж. фон Нейман занимается игровыми вопросами *). Он обсуждает их с Д. Кёнигом, а 7 декабря, накануне дня, когда ему исполнилось двадцать три года, выступает перед гёттингенским математическим обществом с докладом о теории игр. Через полтора года в томе 100 журнала «*Mathematische Annalen*» появляется статья фон Неймана «К теории стратегических игр».

Эта статья содержит важнейшие идеи современной теории игр и ее основополагающие результаты.

Сам фон Нейман формулирует цель этой статьи как попытку дать ответ на следующий вопрос: «Пусть $n$ игроков $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$ играют данную стратегическую игру $\mathfrak{S}$; как должен действовать отдельный игрок $S_m$, чтобы добиться по возможности наиболее благоприятного результата?». Он, правда, не перечисляет возможных практических интерпретаций этого вопроса, но замечает, что «едва ли найдется в повседневной жизни ситуация, в которой он бы не возникал». Однако сама постановка, по мнению фон Неймана, недостаточно ясна.

В сущности, основным достижением данной статьи и является четкая математическая формулировка этого вопроса, которая позволила не только дать на него ответ, но и указать своеобразное «исчисление» вопросов такого рода.

Статья начинается определением стратегической игры $n$ игроков $S_1$, ..., $S_n$ путем задания системы событий («ходов»), которые делаются игроками или же случаем. Тем самым игра $\mathfrak{S}$ задается как позиционная с нулевой суммой (т. е. при любом исходе игры сумма выигрышей всех игроков равна нулю). Такие игры называются также антагонистическими.

Далее фон Нейман устанавливает, что фактически стратегиями игроков являются системы из возможных действий в различных информационных состояниях. Это дает возможность при решении основных теоретических вопросов ограничиться нормальной формой игры, в которой стратегии игрока рассматриваются независимо от их происхождения, т. е. как элементы абстрактного множества стратегий.

Случаи, когда число $n$ участников игры равно 0 или 1, не представляют интереса. Случай же $n = 2$ не только является простейшим из нетривиальных, но, как окажется в дальнейшем, принципиально важным для всей теории. Поэтому фон Нейман переходит к подробному изучению игры двух лиц с нулевой суммой, правила которой он формулирует так:

«Игроки $S_1$, $S_2$ выбирают каждый, не зная выбора другого, соответственно по одному из чисел 1, 2, ..., $\Sigma_1$ и 1, 2, ..., $\Sigma_2$. Если они выбрали числа $x$ и $y$, то получают соответственно суммы $g(x, y)$ и $-g(x, y)$. При этом функция $g(x, y)$ может быть совершенно произвольной (определенной для $x = 1, 2, \ldots, \Sigma_1$; $y = 1, 2, \ldots, \Sigma_2$)».

После этого идут рассуждения, которые в наше время выглядят трафаретными и даже примитивными, но именно они составляют ядро теории игр, выделяющее ее из остальных разделов математики. Речь идет о том, что игрок $S_1$ при любом своем выборе $x$ получает выигрыш не меньший, чем $\min_y g(x, y)$, и поэтому должен выбрать $x$ так, чтобы максимизировать этот минимум, т. е. обеспечить себе получение $\max_x \min_y g(x, y)$.

---

*) См. замечание на стр. 208—209 настоящей книги.

Игрок же $S_2$ может не дать $S_1$ большего выигрыша, чем

$$\min_y \max_x g(x, y).$$

Равенство

$$\max_x \min_y g(x, y) = \min_y \max_x g(x, y)$$

освобождает оптимальность действий игроков от какого-либо психологического налета. Те значения $x$ и $y$, на которых достигаются в этом равенстве внешние экстремумы, очевидно, оказываются оптимальными стратегиями игроков $S_1$ и $S_2$. Общее значение частей этого равенства есть та сумма, которую $S_1$ уверенно выигрывает, но больше которой ему при правильной игре противника получить не удастся. Оно называется *значением* рассматриваемой игры.

То обстоятельство, что это равенство не обязательно имеет место, фон Нейман пытается преодолеть тем же способом, каким Борель за несколько лет до него, именно введением смешанных стратегий $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{\Sigma_1})$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{\Sigma_2})$. Но у Бореля логическая цель выражалась в виде некоторого довольно сложного утверждения (см. I.4.2). Фон Нейман же придает ей вид равенства

$$\max_\xi \min_\eta h(\xi, \eta) = \min_\eta \max_\xi h(\xi, \eta), \qquad (1)$$

где $h(\xi, \eta)$ есть билинейная форма:

$$h(\xi, \eta) = \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} g(p, q)\, \xi_p \eta_q.$$

Таким образом, фон Нейман устанавливает существование значения для любой конечной антагонистической игры и оптимальных (возможно, смешанных) стратегий игроков в ней. Тем самым он рассеивает сомнения Бореля и опровергает то предположение, к которому Борель в своих сомнениях склонялся.

Предложенное фон Нейманом доказательство равенства (1) является весьма сложным и неконструктивным. Оно опирается на теорему Брауэра о неподвижной точке. Это представляется тем более удивительным, что фактически доказываемое утверждение устанавливалось ранее неоднократно, правда в терминах выпуклых множеств (Минковским [1]) и линейных неравенств (Штимке [1]). Однако прошло еще десять лет, прежде чем Вилль [1] обнаружил связь между этой игровой проблемой и теорией выпуклых множеств и дал элементарное доказательство равенства минимаксов.

**2.** После того как принципиальные основы поведения участников антагонистической игры (т. е. игры двух лиц с нулевой суммой) оказываются вполне ясными, фон Нейман переходит к анализу игр с числом участников, превосходящим 2. Но уже в случае игр трех лиц (и даже для игр двух лиц с ненулевой суммой) возникают дополнительные трудности. Не пытаясь их преодолевать (заметим попутно, что и до сих пор не удалось построить исчерпывающей теории игр трех лиц), фон Нейман встает на путь изучения возможных редукций игр многих лиц к антагонистическим играм. Он подробно рассматривает эти редукции для случая $n = 3$ и намечает осуществление аналогичной программы для игр, в которых более трех игроков. Идея фон Неймана состоит в следующем.

Пусть мы имеем игру трех лиц с нулевой суммой, в которой игроки $S_1$, $S_2$ и $S_3$, выбирая независимо друг от друга стратегии $x = 1, \ldots, \Sigma_1$, $y = 1, \ldots, \Sigma_2$ и $z = 1, \ldots, \Sigma_3$, получают соответственно выигрыши $g_1(x, y, z)$, $g_2(x, y, z)$, и $g_3(x, y, z)$, для которых тождественно выполняется равенство

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0.$$

Рассмотрим всевозможные антагонистические игры, получающиеся в результате объединения любых двух игроков против оставшегося (очевидно, всего в данном случае мы будем иметь три таких антагонистических игры). Найдем значения этих игр:

$$\max_{\xi} \min_{\eta} \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} \sum_{r=1}^{\Sigma_3} (g_1(p, q, r) + g_2(p, q, r))\, \xi_{pq} \eta_r = M_{1,2},$$

$$\max_{\xi} \min_{\eta} \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} \sum_{r=1}^{\Sigma_3} (g_1(p, q, r) + g_3(p, q, r))\, \xi_{pr} \eta_q = M_{1,3},$$

$$\max_{\xi} \min_{\eta} \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} \sum_{r=1}^{\Sigma_3} (g_2(p, q, r) + g_3(p, q, r))\, \xi_{qr} \eta_p = M_{2,3}.$$

Здесь $\xi_{pq}$ образуют систему вероятностей на множестве пар $(p, q)$; аналогично $\xi_{pr}$ и $\xi_{qr}$. Нетрудно показать, что

$$M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} \geqq 0. \tag{2}$$

Целью каждого игрока является получение возможно большего выигрыша. Какую же цель, скажем, для $S_1$ можно считать осуществимой?

Предположим, что $S_1$ стремится выиграть $w_1$. Его противники, объединившись друг с другом, дадут ему не более чем $-M_{2,3}$. Значит, если

$$w_1 \leqq -M_{2,3}, \tag{3}$$

то цель $S_1$ осуществима. В противном случае ему необходимо вступить в коалицию с одним из своих партнеров по игре.

Если $S_1$, имея в виду получить $w_1$, объединится с $S_2$, то на долю $S_2$ останется $M_{1,2} - w_1$, а если $S_1$ объединится с $S_3$, то $S_3$ получит $M_{1,3} - w_1$. Значит, $S_2$ и $S_3$ «вместе» получат $M_{1,2} + M_{1,3} - 2w_1$. Но, отвергнув предложения о союзе со стороны $S_1$ и вступив в коалицию друг с другом, они получат $M_{2,3}$. Если

$$M_{2,3} > M_{1,2} + M_{1,3} - 2w_1,$$

то как для $S_2$, так и для $S_3$ нет смысла откликаться на призывы $S_1$, который, таким образом, остается в одиночестве. Следовательно, чтобы найти союзника, $S_1$ должен преследовать умеренные цели:

$$w_1 \leqq \frac{1}{2}(M_{1,2} + M_{1,3} - M_{2,3}) = \overline{w}_1$$

(ввиду (2) это ограничение все-таки менее стеснительно, чем (3)). Аналогично получается, что желательные выигрыши $w_2$ и $w_3$ игроков $S_2$ и $S_3$ ограничиваются соответственно неравенствами:

$$w_2 \leqq \frac{1}{2}(M_{1,2} + M_{2,3} - M_{1,3}) = \overline{w}_2,$$

$$w_3 \leqq \frac{1}{2}(M_{1,3} + M_{2,3} - M_{1,2}) = \overline{w}_3.$$

Но вместе с тем цели $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$ и $\overline{w}_3$ осуществимы для любой пары игроков: при объединении пары в коалицию претензии ее членов удовлетворяются. Разумеется, оставшийся вне коалиции игрок при этом полностью «обирается».

**3.** Для произвольного числа игроков $n$ можно рассуждать аналогичным образом. Именно произвольное разбиение всего множества игроков на две противостоящие друг другу коалиции $\mu_1, \ldots, \mu_k$ и $\nu_1, \ldots, \nu_{n-k}$ определяет некоторую антагонистическую игру и тем самым, как ее значение, величину $M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}}$ для любой коалиции $\mu_1, \ldots, \mu_k$.

Как нетрудно убедиться,

1) $M_{\{\}} = 0$;

2) $M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}} + M_{\{\nu_1, \ldots, \nu_{n-k}\}} = 0$,

если теоретико-множественная сумма коалиций $\mu_1, \ldots, \mu_k$ и $\nu_1, \ldots, \nu_{n-k}$ составляет все множество игроков;

3) $M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_l\}} + M_{\{\nu_1, \ldots, \nu_l\}} \leqq M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k, \nu_1, \ldots, \nu_l\}}$, если коалиции $\mu_1, \ldots, \mu_k$ и $\nu_1, \ldots, \nu_l$ не пересекаются.

Свойства величины $M$, как функции коалиции, являются вместе с тем существенными свойствами исходной игры. В дальнейшем эта функция получила название *характеристической функции* и изучалась в многочисленных работах.

Описанный подход в какой-то мере напоминает корреляционную теорию случайных функций, где изучение совместных распределений многих случайных величин ограничивается лишь нахождением и сравнением между собой коэффициентов корреляции всевозможных пар случайных величин. Вводимая при этом характеристическая функция по своей роли в теории игр напоминает корреляционную функцию. Разумеется, это сходство носит чисто логический, а не формальный характер.

**4.** Мы видим, что в статье фон Неймана содержится большинство фундаментальных идей современной теории стратегических игр, и историю теории игр следует начинать именно с нее. Поэтому фон Неймана можно по праву называть основоположником теории игр. Однако в ближайшие последующие годы статья фон Неймана не нашла ни откликов, ни продолжений в математической литературе того времени. Единственным исключением является уже упоминавшаяся работа Вилля [1], содержащая упрощенное доказательство теоремы о минимаксе и полученное на основе исследования игр типа покера распространение ее на случай игр с бесконечными множествами стратегий. В частности, в ней доказывается, что всякая бесконечная антагонистическая игра, в которой множество стратегий каждого игрока является единичным сегментом (такие игры теперь принято называть *играми на единичном квадрате*), а функция выигрыша непрерывна, имеет значение в смешанных стратегиях.

Между прочим, уже в этой статье приводится пример игры (разумеется, с бесконечным множеством стратегий), которая не имеет значения (в смешанных стратегиях). Тем самым вновь возник вопрос, поднятый в свое время Борелем (см. I.4.2), о возможной ограниченности вероятностного подхода к стратегическим играм и о необходимости психологического подхода к ним.

Таким образом, если говорить о 20-х и 30-х годах, фон Неймана также нельзя признать (пользуясь терминологией Легуве — Фреше) за «инициатора» теории игр.

Заметим, что практика (именно практика планирования эксперимента) выявила целесообразность использования смешанных стратегий, по-видимому, и независимо от игровых идей фон Неймана. Анализируя игру «проходящий туз», Фишер [1] указывает на разумность случайного выбора одного из двух действий каждого игрока и приводит даже подробное вычисление соответствующих вероятностей.

5. В конце 30-х годов фон Нейман снова занялся вопросами теории игр, на этот раз совместно с экономистом О. Моргенштерном. В результате исследования по теории игр обрели если не непосредственную прикладную направленность, то, во всяком случае, своего рода «социальный заказ»: теория игр стала разрабатываться как математический аппарат для описания и анализа экономических явлений. Итогом этой многолетней работы явилась монография «Теория игр и экономическое поведение».

*Глава II*

# ТЕОРИЯ ИГР И ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Здесь не имеется в виду излагать вкратце содержание монографии или хотя бы отдельных ее мест. Нет даже надобности приводить «литературно-критические» соображения по поводу того, что́ именно имели в виду авторы, организуя свой научный материал так, а не иначе, и чем вызвана данная композиция книги и ее разделов. Авторы сами, и притом весьма подробно, описывают каждый логический шаг своих математических рассуждений и обстоятельно аргументируют необходимость изложения вопросов в принятой ими последовательности.

Вместе с тем представляется целесообразным привести ряд замечаний как теоретико-игрового, так и общеметодологического характера. Кроме того, здесь же естественно указать и на те полученные впоследствии результаты, которые непосредственно относятся к тем или иным конкретным вопросам, разбираемым в монографии.

Для удобства все эти замечания расположены в том же порядке, что и те места в монографии, к которым они относятся. Они сгруппированы в параграфы, соответствующие главам монографии.

## § 1. ПОСТАНОВКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ

1. Книга называется «Теория игр и экономическое поведение», а в первой же ее фразе авторы указывают, что ее цель —«рассмотреть некоторые фундаментальные вопросы экономической теории». Таким образом, может создаться впечатление, что книга посвящена экономике, а именно приложениям к экономике методов теории игр. Однако в действительности содержание монографии — чисто математическое.

Авторы отдают себе отчет в том, что формально записанные результаты математических выводов, несмотря на полную строгость приведших к ним выкладок, могут выглядеть далеко не бесспорными с точки зрения тех читателей, для которых использованный математический аппарат не является привычным. Поэтому они всюду, где к тому представляется возможность, сопровождают математические формулировки чисто словесными описаниями.

Экономическая же направленность этой книги проявляется лишь в трех аспектах, которые, не будучи решающими, тем не менее заслуживают разъяснения.

Во-первых, отправной точкой исследований авторов явилось рассмотрение некоторых элементарных экономических явлений типа изолированных актов обмена, фактов конкуренции, равновесия и т. п. При этом они ограничиваются изолированным рассмотрением этих явлений, игнорируя их общеэкономические и социальные черты, утрачивая ту их специфику, которая превращает их из непосредственно наблюдаемых фактов в экономические явления. С точки зрения экономической науки это недопустимо; математически же — вполне законно, так как облегчает построение фор-

мальной теории, учитывающей только сохранившиеся после проведенной схематизации черты явлений.

Во-вторых, в книге нередко применяется экономическая терминология: в ней говорится о деньгах, монополиях, дуополиях, двусторонних монополиях и т. д. Что касается монополий, дуополий и пр., то их следует понимать здесь не как понятия из буржуазной политической экономии и даже не как обозначения тех или иных феноменов, которые на самом деле или хотя бы по видимости наблюдаются в капиталистической экономике. Этими терминами в книге обозначаются лишь определенные варианты столкновения противоречивых интересов. В какой мере эти варианты соответствуют действительным столкновениям экономических интересов в капиталистических условиях, авторы книги не описывают.

Несколько сложнее обстоит дело с деньгами. Под деньгами авторы понимают, как это говорится ими на стр. 34, «единый денежный товар», который предполагается «неограниченно делимым и заменяемым, свободно передаваемым и неизменным» даже в количественном смысле и «удовлетворяемость» или «полезность» которого желательна для каждого участника.

Ясно, что этот аксиоматически определенный товар обладает не всеми свойствами денег. Ясно также, что и деньги не всегда и не в полной мере обладают перечисленными в определении свойствами. Вместе с тем этот товар «похож» на деньги в большей степени, чем на что-либо иное, и поэтому закрепление за ним названия денег удобнее, чем какого-нибудь другого. Впрочем, термин «деньги» употребляется авторами лишь в конкретных иллюстративных примерах. Во всех своих теоретических рассуждениях они предпочитают термин «полезность».

Наконец, в-третьих, отдаленными целями авторов, выходящими за рамки данной книги, действительно являются экономические приложения развиваемого ими математического аппарата. Но какими эти приложения в действительности окажутся и к каким экономическим выводам они приведут, авторы нигде не указывают, да и не имеют этого в виду.

В действительности теория игр имеет разнообразные экономические (равно как и иные) приложения. Однако в данной статье мы не касаемся прикладных вопросов.

**2.** Понятие полезности, как количественно измеряемого и безгранично делимого объекта, принадлежит к числу важнейших в теории игр. Существование такой полезности можно было бы провозгласить с самого начала в виде некоторой аксиомы, подлежащей проверке в каждом отдельном случае. Однако, с одной стороны, такая проверка может вызывать затруднения, а с другой — сама констатация существования полезности, наделенной указанными свойствами, представляется недостаточно бесспорной. Поэтому фон Нейман и Моргенштерн предпочитают расчленить предъявляемые к полезности требования на отдельные более элементарные аксиомы.

Здесь следует указать на своеобразие аксиоматической трактовки большинства фундаментальных понятий теории игр. Обычно в формальных математических теориях аксиомы выбираются не столько по признаку их естественности, простоты и изначальности, сколько по дедуктивным соображениям: независимости, непротиворечивости, возможной полноты, обозримости, логической завершенности и т. п. Грубо говоря, этим объясняется малое число аксиом и большое число теорем в традиционных аксиоматических теориях.

В теории игр дело обстоит существенно иначе. Утверждения о существовании нужных объектов (в том числе, забегая несколько вперед, и принципы разумного поведения), которые принимаются «аксиоматически», не всегда выглядят достаточно правдоподобно (и тем более не всегда абсолютно правдоподобно) и потому не всеми разделяются. Поэтому возникает вопрос о формулировке «более первичных», «более правдоподобных» аксиом и о доказательстве на их основе тех или иных игровых принципов, которые первоначально принимались за исходные. При этом нередко ради доказательства единственной теоремы, из которой, по существу, и состоит вся теория, разрабатывается обширная аксиоматика.

Именно такая аксиоматика приводится авторами в п. 3.6, а существование требуемой «функции полезности» выводится из нее в Приложении (стр. 616—630).

3. Теория игр строится фон Нейманом и Моргенштерном как теория математических моделей конфликтов. При этом уже в простейших случаях выясняется роль информации, которой располагает игрок о поведении партнеров. Так, в случае антагонистической игры с функцией выигрыша $H(x, y)$ максимизирующий игрок, знающий выбор стратегии противника (например, в силу того, что делает свой выбор после него), получает уверенно $\min_y \max_x H(x, y)$, а в противоположном случае, т. е. не зная о противнике ничего, может рассчитывать лишь на $\max_x \min_y H(x, y)$. Вместе с тем с математической точки зрения совершенно безразлично, будет ли этот противник реальным субъектом, действующим сознательно и притом во вред нашему игроку, или же фиктивным, олицетворяющим лишь недостаточную осведомленность игрока о той обстановке, в которой ему приходится принимать свои решения. В качестве такого противника можно, например, рассматривать природу, закономерности которой к моменту принятия решения могут быть познаны недостаточно, или, скажем, вполне благожелательно настроенное к игроку лицо, руководствующееся, однако, в своих действиях неизвестными игроку критериями.

Таким образом, теорию игр можно рассматривать также как математический аппарат, описывающий принятие решений в условиях неопределенности, которую естественно назвать *стратегической неопределенностью*. Систематически такой подход к теории игр (именно к антагонистическим играм) был изложен А. Вальдом в его книге «Статистические решающие функции» [2]. В сущности, и большинство военно-тактических приложений теории игр (см., например, книгу М. Дрешера [1], а также сборник [7]) основано не столько на враждебности намерений противника (к этому вопросу нам еще придется вернуться в II.3.3), сколько на непредсказуемости предпринимаемых им действий. На эти же соображения опираются и технические приложения теории игр, примеры которых приведены Н. Н. Воробьевым в [7].

Стратегическая неопределенность, с которой имеет дело теория игр, коренным образом отличается от неопределенности статистической. *Статистическая неопределенность* имеет место в тех случаях, когда принимающий решения субъект не знает истинного положения дел, но знает априорные вероятности каждого из возможных вариантов условий. В случае стратегической неопределенности у субъекта нет каких-либо оснований приписывать возможным вариантам те или иные априорные вероятности.

В соответствии с этим в условиях стратегической неопределенности следует ввести и использовать иное понятие информации, чем в случае неопределенности статистической. Для статистической неопределенности таковым является «селективная информация», теория которой была разработана К. Шенноном [1] и его последователями и в настоящее время достаточно хорошо известна. Для теоретико-игровой, стратегической неопределенности более важно понятие «стратегической информации», введенное М. Сакагучи [1].

4. Фон Нейман и Моргенштерн неоднократно иллюстрируют свои рассуждения о путях развития теории игр и ее приложений фактами из истории термодинамики. Так, в п. 3.2 говорится о возможности дать для температуры жесткую числовую шкалу на основе изучения поведения идеального газа и выяснения роли абсолютной температуры в связи с теоремой об энтропии.

По этому поводу следует заметить, что числовая шкала для температуры была разработана задолго до выяснения природы идеального газа и других упомянутых физических концепций. Ее создание было основано на непосредственно наблюдаемом явлении температурного расширения тел. В то время это явление никак логически не связывалось с тепловыми явлениями, оставаясь (во всяком случае, до разработки молекулярно-кинетической теории) внешним по отношению к ним. Тем не менее в дальнейшем (именно из рассмотрения идеального газа и пр.) оказалось, что тепловое расширение, по существу, чисто энергетически связано с изменением температуры, так что построенная шкала была и единственно возможной (с точностью до линейных преобразований).

Возвращаясь к теории полезности, мы видим, что в основу ее измерения также положено нечто внешнее по отношению к полезности, именно вероятностная комбинация полезностей. Аналогия с термодинамикой дает надежду, что в действительности этот вероятностный подход связан с установлением субъективных предпочтений внутренним образом и дальнейшее исследование субъективных предпочтений эти связи вскроет. Разумеется, измерение полезности является качественно более сложным процессом, чем измерение температуры, так что все сказанное есть лишь предположение о некотором сходстве в тенденциях развития двух совершенно различных теорий.

5. Вводимое в § 4 понятие решения как множества дележей, обобщающего понятие максимума, по существу воспроизводит по новому поводу конструкцию, приводящую к множеству нулей функции Гранди (см. I.2.5). Решения суть множества дележей, обладающие теми же самыми свойствами внутренней и внешней устойчивости применительно к отношению доминирования дележей, что и множества нулей возможных функций Гранди применительно к отношению, устанавливаемому графом. Множественность решений в играх оказывается поэтому столь же естественным явлением, как и наличие у одного и того же графа функций Гранди с различными множествами нулей.

Поскольку множества дележей непрерывны, а функции Гранди, по существу, приспособлены лишь для дискретных графов, непосредственное использование функций Гранди для нахождения решений игр или хотя бы для доказательства существования решений в тех или иных классах игр едва ли возможно. Не исключено, однако, что некоторые свойства функций Гранди удастся распространить на континуальный случай и применить к теории игр. В этом отношении несколько обнадеживают результаты М. Ричардсона [1].

## § 2. ОБЩЕЕ ФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ИГР

1. Фон Нейман и Моргенштерн в своей монографии воспроизводят и детализируют первоначальное определение стратегической игры, введенной фон Нейманом в статье [1]. Это определение оказывается весьма емким: большинство появившихся впоследствии работ по теории игр касаются игр именно в этом понимании слова, быть может, несколько уточненном или обобщенном, но мало измененном по существу.

Именно эти игры получили впоследствии наименование бескоалиционных и оказались одним из наиболее широких по объему классов игр. Об исследованиях, касающихся бескоалиционных игр, см. III.4.

2. Однако с более широкой точки зрения некоторые пункты в приводимом определении представляются излишне ограничительными.

Прежде всего, фон Нейман и О. Моргенштерн целью каждого участника игры считают получение им индивидуального выигрыша. Даже в тех случаях (рассматриваемых кооперативным вариантом теории), когда игроки объединяются в коалиции для совместных действий, они делают это для того, чтобы, получив на всю коалицию некоторый суммарный выигрыш, разделить этот выигрыш между собой.

Вместе с тем в экономической и социальной действительности нередко наблюдается, что получаемый коалицией выигрыш принадлежит этой коалиции как таковой и не подлежит дальнейшему разделению между игроками, участвующими в коалиции. В частности, может оказаться, что один и тот же игрок одновременно участвует в двух или более различных коалициях, интересы которых не совпадают. Ясно, что теория игр, претендующая на достаточно полный анализ противоречий в интересах различных сторон, должна отражать и этот аспект проблемы. К этому вопросу мы еще вернемся в III.4.7.

Далее, в связи с трактовкой теории игр как математической теории принятия решений в условиях неопределенности возникает критическое отношение к одному из основных положений теории игр, состоящему в том, что игроки полностью знают условия (правила) той игры, в которой они участвуют.

С содержательной точки зрения знание игроком игры означает выполнение двух условий: 1) каждый игрок знает ту цель, к которой он стремится, и 2) каждый игрок отдает себе полный отчет о последствиях, к которым приводит выбор им той или иной стратегии.

Формально, однако, принципиальной разницы между этими условиями нет, и математическая трактовка игр, в которых не выполняется первое или второе из этих условий (или они оба), может быть осуществлена по некоторой единой схеме. Такие игры естественно назвать *неопределенными*. Начала теории неопределенных игр содержатся в работе Н. Н. Воробьева [5].

Наконец, фон Нейман и Моргенштерн предполагают конечность множества игроков в каждой игре. Хотя в будущем игры с бесконечными множествами игроков, несомненно, будут изучаться по меньшей мере так же интенсивно, как и игры с конечными множествами игроков, однако до сих пор играм с бесконечными множествами игроков посвящены лишь работы Шепли [5], Дэвиса [1], а также Калиша и Неринга [1].

3. Как и в статье фон Неймана [1], общее определение игры дается в позиционной форме. Это не только соответствует реальному протеканию большинства игр (как игр в буквальном смысле слова, так и моделируе-

мых играми конфликтов или процессов принятия решений), но и отражает тот факт, что игрок в процессе игры принимает свои решения на основе информации, которой он располагает и которая в ходе игры может изменяться. В частности, изменяться может и имеющаяся у игрока информация о его собственных прошлых информационных состояниях и о тех решениях, которые он в них принимал. Это последнее обстоятельство описывается в монографии в терминах «предварения» и «предшествования». В дальнейшем эти рассуждения послужили отправной точкой для исследования Куна [1] и последующих работ, о которых см. в III.5.2.

4. Включение в игру случайных ходов позволяет рассматривать игры, являющиеся одновременно стратегическими и азартными. Представление множества позиций в виде ориентированного графа показывает, что комбинаторный аспект также охватывается общим определением стратегической игры.

То, что авторы ограничиваются случаем дискретного множества ходов, с теоретико-игровой точки зрения не представляется особенно принципиальным, хотя, конечно, переход к непрерывному множеству ходов, наблюдаемому, например, в дифференциальных играх (см. III.5.7), и сопряжен со значительными трудностями.

5. Стратегии вводятся фон Нейманом и Моргенштерном в процессе «окончательного упрощения» задания игры, приводящего к определению игры в нормальной, т. е. в чисто стратегической форме. Хотя такое упрощенное задание в действительности эквивалентно первоначальному, однако, по видимости, оно представляется описанием более частного объекта: именно игры, в которой каждый игрок делает лишь один ход, и притом в полном неведении о том, какой ход сделал каждый из остальных игроков. Это дало повод авторам в дальнейшем (п. 12.1.1) говорить о позиционной игре как об extensive form of the game (среди буквальных русских переводов этого термина встречаются «игры в обобщенной форме», «в развернутой форме» и даже «в расширенной форме»).

Вместе с тем по существу позиционные игры являются более конкретными объектами, чем игры в нормальной форме. В самом деле, основное понятие в стратегической игре есть понятие стратегии. В играх в нормальной форме стратегии игрока лишены каких бы то ни было содержательных свойств, являясь просто элементами некоторого абстрактного множества. В позиционных же играх стратегии выступают как функции на множестве всех информационных состояний игрока, т. е. как объекты существенно более конкретной природы, наделенные индивидуальными свойствами.

Сказанное определяет и целесообразность использования в одних случаях задания игр в нормальной форме, а в других — в позиционной форме. Как отмечают авторы в п. 12.1, рассмотрение игр в нормальной форме удобно при доказательстве общих теорем, относящихся к целым классам игр, при формулировках общих принципов оптимального поведения игроков и т. п. Играми в позиционной форме предпочтительно пользоваться, когда целью является выяснение особенностей поведения игроков в данной игре, при установлении возможных редукций стратегий и т. д. Отметим вместе с тем, что фактическое *решение* игр, т. е. нахождение оптимальных (или, в ином смысле, целесообразных) стратегий игроков в той или иной конкретной игре, до сих пор, за исключением некоторых весьма специфических случаев, удавалось только для игр в нормальной форме.

## § 3. ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ. ТЕОРИЯ

1. В п. 12.2 фон Нейман и Моргенштерн рассматривают игры с единственным игроком. С математической точки зрения нахождение рационального поведения участника такой игры состоит в решении некоторой задачи максимизации и не представляет теоретико-игрового интереса.

2. Игры двух лиц с нулевой суммой, т. е. антагонистические игры, являются простейшими в теоретико-игровом смысле. В них конфликты двух сторон выступают в непосредственно стратегическом виде и не осложняются какими-либо соображениями, касающимися вступления игроков в коалиции или обмена информацией между ними.

В самом деле, в антагонистической игре выигрыши двух игроков равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому, если некоторые совместные действия игроков полезны для одного из них, т. е. приводят к увеличению его выигрыша, то тем самым они уменьшают выигрыш другого игрока, т. е. нежелательны для него. Значит, для того чтобы игроки были готовы в том или ином пункте выступать совместно, необходимо, чтобы эти их действия не приносили выгоды ни одному из игроков. Но тогда такие действия вообще не будут оказывать какого-либо эффекта на исход игры и их можно вовсе исключить из рассмотрения.

Антагонизм в математическом, теоретико-игровом смысле, понимаемый как равенство по величине и противоположность по знаку, существенно отличается от одноименного философского понятия. Это следует иметь в виду при обсуждении возможных путей моделирования играми реально встречающихся конфликтов или, наоборот, содержательных интерпретаций теоретико-игровых конструкций. В частности, достаточно адекватное моделирование социальных или военных конфликтов антагонистическими играми удается лишь в отдельных случаях. Дело в том, что в таких конфликтах каждая сторона обычно преследует свои собственные цели, а нанесение ущерба сопернику является лишь способом достижения цели или даже просто сопутствующим обстоятельством.

Между прочим, не следует смешивать антагонистичность конфликта с его остротой. Так, например, военно-тактическая ситуация, в которой участвуют с каждой стороны по одной единице сил, а цель стороны состоит в уничтожении единицы противника, не является антагонистической с теоретико-игровой точки зрения. В условиях антагонистического конфликта стремлению уничтожить противника противостоит стремление избежать собственного уничтожения.

Более подробное изложение этого круга вопросов см. в статье Н. Н. Воробьева [4].

3. В качестве руководящего принципа оптимального поведения участника антагонистической игры фон Нейман и Моргенштерн предлагают принцип максимина (минимакса). Применение этого принципа каждым из игроков приводит (с использованием в случае необходимости смешанных стратегий) к значению игры как к «справедливому» выигрышу первого игрока в ней. «Справедливость» выигрыша, равного значению игры, можно интерпретировать как право игрока на получение этой суммы вместо своего участия в игре. Вероятностный подход к полезностям позволяет рассматривать здесь математические ожидания выигрышей как реальные выигрыши.

Авторы обосновывают принцип максимина в результате весьма подробного анализа мажорантной и минорантной игр. Эти рассуждения носят, по существу, аксиоматический характер и могут быть вполне формализо-

ваны. Однако в них имеется одно неудобство, ограничивающее круг возможных приложений теории. В рассмотрение мажорантной и минорантной игр входит одновременное описание целей обоих игроков. Поэтому все сказанное будет без каких-либо дополнений и уточнений достаточно убедительно в применении к принятию решений в условиях конфликта между двумя сторонами, отстаивающими противоположные цели; в случае же принятия решений в условиях неопределенности, где решения фактически принимаются только одной стороной, могут остаться некоторые сомнения.

Эти сомнения были рассеяны работой Э. И. Вилкаса [1], предложившего расчленение принципа максимина на несколько более частных принципов, которые он принимает в качестве аксиом.

Пусть $v$ — функция, определенная на множестве всех матриц. Будем понимать $v(A)$ как тот справедливый выигрыш, на который может рассчитывать лицо, участвующее в качестве первого игрока в матричной игре с матрицей выигрышей $A$. Естественно потребовать, чтобы функция $v$ обладала следующими свойствами.

1° Если $A$ и $\widetilde{A}$ — две матрицы одинаковых размеров, причем $A \leqq \widetilde{A}$ (неравенство понимается поэлементно), то

$$v(A) \leqq v(\widetilde{A}).$$

Иными словами, если игроку предоставляется на выбор участие (в качестве первого игрока) в игре с матрицей $A$ или в игре с матрицей $\widetilde{A}$, где $A \leqq \widetilde{A}$, то участие в игре с матрицей $\widetilde{A}$ не менее предпочтительно.

2° Если матрица $\widetilde{A}$ получается из матрицы $A$ присоединением к ней новой строки, не превосходящей какой-либо выпуклой линейной комбинации строк матрицы $A$, то

$$v(A) = v(\widetilde{A}).$$

Это значит, что для игрока безразлично, участвовать ли ему в игре с матрицей $A$ или же в игре с матрицей $\widetilde{A}$, в которой он располагает на первый взгляд несколько бо́льшими возможностями.

3° Если понимать вещественное число $x$ как матрицу, то

$$v(x) \geqq x$$

(т. е. участие в $1 \times 1$-игре не менее предпочтительно, чем непосредственное получение выигрыша).

4° Если $A^T$ есть транспонированная матрица $A$, то

$$v(A) = v(-A^T),$$

т. е. безразлично, участвовать ли в игре с матрицей $A$ или в игре с матрицей $-A^T$.

Эта система аксиом полна в смысле, описываемом следующей теоремой: *функция $v$, удовлетворяющая аксиомам 1°—4°, единственна, и значение $v(A)$ является значением матричной игры с матрицей выигрыша $A$.*

Так как значение антагонистической игры есть именно то значение выигрыша игрока, которое он получает, следуя принципу максимина, данная аксиоматика обосновывает и сам этот принцип.

В приведенной системе аксиом говорится о предпочтительных действиях только одного действующего лица. Поэтому она применима

независимо от того, будет ли его противник реальным (выбирающим стратегии сознательно) или фиктивным (носителем неопределенности). Тем самым обоснована и справедливость принципа максимина к принятию решений в условиях неопределенности.

4. Несмотря на то, что основанное определение игры дается фон Нейманом и Моргенштерном в позиционной форме, они сами при рассмотрении игр такого рода ограничились тем важным, но малотипичным случаем, когда игрок имеет в игре полную информацию. Полученный ими (в § 15) результат, обобщающий теорему Цермело (см. I.2.2), весьма поучителен в своей естественности. В самом деле, теория игр есть теория принятия оптимальных решений в условиях неопределенности и тем самым *в* условиях неполной информации; с другой стороны, для теории игр характерно то, что она в качестве оптимальных решений указывает смешанные стратегии игроков. Поэтому вполне естественно, что если игрок имеет в игре полную информацию, т. е. действует, по существу, в ситуации неигрового типа, то и оптимальная его стратегия должна быть не теоретико-игровой, а соответствовать иному уровню принятия оптимальных решений. В действительности оптимальная стратегия оказывается в этом случае чистой.

5. В § 16 приводится доказательство теоремы существования оптимальных стратегий в матричных играх, опирающееся на свойства выпуклых многогранников. Вопросы практического нахождения оптимальных стратегий будут рассмотрены в III.1.2—III.1.5.

## § 4. ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ. ПРИМЕРЫ

1. Содержание теории игр как математической дисциплины состоит, во-первых, в установлении принципов разумного, целесообразного, оптимального поведения игроков; во-вторых, в доказательстве существования действий игроков, удовлетворяющих этим принципам, и, в-третьих, в фактическом нахождении таких действий. Первое здесь определяет сущность теории игр как таковой, второе делает ее предметной и обеспечивает принципиальную возможность приложений, а третье превращает эту возможность в фактическую.

После решения в гл. III монографии первых двух вопросов для конечных антагонистических, т. е. для матричных, игр фон Нейман и Моргенштерн переходят к решению третьего, посвящая ему отдельную главу. Как в период написания монографии, так и за прошедшее после этого время не удалось найти сколько-нибудь общих способов решения игр, даже таких сравнительно элементарных, как матричные. Поэтому до сих пор если отвлечься от численных методов решения, практические результаты, касающиеся матричных игр, ограничиваются рассмотрением примеров, число которых пока еще невелико.

Первый пример решения симметричной матричной $3 \times 3$-игры был указан Борелем (см. I.4.2). Фон Нейман и Моргенштерн приводят несколько новых примеров.

2. Уже проводимое в п. 18.2 рассмотрение $2 \times 2$-игры показывает, что попытки описать ее решение в виде единой формулы являются нерациональными, а при переходе к играм больших размеров — и безнадежными. Поэтому решение игр, принадлежащих тому или иному классу, следует понимать, как алгорифм, анализирующий нужные соотношения между параметрами игры и выводящий на основе этого анализа формулу

расчета. Так как, однако, матричная игра задается матрицей, т. е. сравнительно большим числом параметров, подлежащих анализу соотношений оказывается чрезвычайно много, и требуемый алгорифм (если не вводить специальных упрощающих приемов) получается весьма громоздким.

По-видимому, указанные трудности неизбежны и едва ли преодолимы, если рассматривать каждый элемент матрицы как самостоятельный параметр, несущий собственную, не зависящую от других информацию. Однако фактически эти элементы матрицы выигрышей нередко являются не первоначальными параметрами игры, а определяются на основе каких-либо других, немногочисленных исходных данных. Вычисление матрицы выигрышей представляется в этих случаях промежуточным этапом, без которого, быть может, удастся и обойтись. На деле такой «нематричный путь решения матричных игр» означает отказ от использования нормальной формы игры и обладает всеми достоинствами и недостатками, о которых говорилось в II.2.5.

3. Обращает на себя внимание излагаемый в п. 18.4.4 анализ литературного конфликта: поведение Шерлока Холмса, спасающегося от профессора Мориарти.

Анализ конфликтов художественными средствами и описание поведения их участников в соответствии с их целями и возможностями издавна занимали видное место в художественной литературе. Как справедливо замечают Льюс и Райфа [1], «во всей мировой литературе столкновение интересов было одной из главных тем; возможно, по вниманию, которое ей уделялось, с ней сравнимы лишь темы бога, любви и внутренней борьбы». К этому можно добавить, что идея бога как нравственной категории была призвана указать на определенные принципы разрешения конфликтов, любовь по самому своему существу есть форма совместных действий лиц, наделенных противоречивыми интересами, а внутренняя борьба состоит в конфликте субъекта с незнанием им той истинной цели, к которой ему следует стремиться. Тем самым «образ конфликта» оказывается одним из наиболее распространенных в художественной литературе и вообще в искусстве.

Теория игр осуществляет анализ конфликтов научными, именно математическими средствами. Поэтому представляет интерес сопоставление поведения участников конфликта, которое теория игр расценивает как оптимальное, с разрешением того же конфликта, даваемым художественными средствами. Первая попытка систематического подхода к этому вопросу содержится в статье Н. Н. Воробьева [8].

4. Обширный § 19 монографии озаглавлен «Покер и блеф». Выбор в качестве примера для подробного изложения именно покера объясняется прежде всего тем, что из всех так называемых «салонных» игр покер является наиболее стратегической: комбинаторно эта игра предельно проста, а азартный, т. е. случайный, элемент сведен в ней до минимума и поддается прямому учету. Поэтому игра в покер ведется не на постепенно накапливаемые преимущества (как это имеет место, скажем, в шахматах), а непосредственно на полезности (обычно — на деньги).

Будучи по существу позиционной игрой, покер обладает своими специфическими принципами оптимального поведения игроков. К числу этих принципов относится и употребление в оптимальных смешанных стратегиях с положительной вероятностью блефа. Случайное блефование является одним из немногих примеров интуитивно находимых и систематически употребляемых смешанных стратегий в салонных играх.

## § 5. ИГРЫ ТРЕХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

**1.** Начиная с пятой главы, фон Нейман и Моргенштерн покидают чисто стратегическую почву и вводят в рассмотрение кооперативный аспект проблемы. При этом результаты анализа оказываются, по существу, менее полными, чем в антагонистическом случае. Решение антагонистической игры, существование которого для конечного случая было установлено в гл. III, указывает на некоторый способ действий, обеспечивающий игроку уверенный выигрыш (равный значению игры). В рамках кооперативной теории получение такого или аналогичного результата уже не удается: игрок выигрывает указываемую теорией сумму не форсированно, опираясь лишь на собственные возможности, а условно, при определенном поведении некоторых других участников игры. Таким образом, даваемые теорией условия осуществимости целей (в том числе их количественные характеристики) оказываются необходимыми, но недостаточными.

Наоборот, в игре (существенной) трех лиц все выигрывающие (т. е. двуэлементные) коалиции получают один и тот же выигрыш, а все проигрывающие (одноэлементные) терпят один и тот же ущерб. Таким образом, в игре трех лиц кооперативный аспект выступает в своем наиболее чистом виде: целью игрока является вступление в выигрывающую коалицию. Эта идея подробно развивается в гл. X, посвященной простым играм. Существенная игра трех лиц является простой (и притом мажоритарной, см. § 50).

**2.** Принципиально новыми и важными оказываются понятия дележа и решения, как некоторого множества дележей. По существу, каждый дележ можно рассматривать как дилемму, стоящую перед игроками: получать ли им суммы, предусматриваемые дележом, или же обратиться к игре для получения своего выигрыша в ней. Дележ можно считать «справедливым», если обе эти возможности для игроков равноценны. В этом отношении справедливый дележ играет роль, сходную со значением антагонистической игры: для игрока безразлично, участвовать ли в игре (в качестве первого игрока) или же получить значение игры непосредственно.

**3.** Дележ можно понимать как исход игры, предлагаемый игрокам со стороны некоторого внешнего по отношению к данной игре субъекта. Возможными действиями этого субъекта являются различные дележи, а целью — принятие предлагаемого им дележа. Если имеется несколько таких субъектов, то цели их, очевидно, будут различными, и, дав этим целям ту или иную количественную оценку, мы приходим к некоторой игре, которую по отношению к исходной игре будем называть *метаигрой*. Ее участников назовем *метаигроками*. Метаигрока можно интерпретировать как лицо, вносящее на рассмотрение всего коллектива игроков некоторый проект, затрагивающий интересы каждого игрока. Грубо говоря, цель метаигрока определяется предложением с его стороны доминирующих и недоминируемых дележей.

Поскольку в игре трех лиц два дележа не могут одновременно доминировать друг друга, антагонистическая метаигра в этих условиях строится весьма просто: если $\alpha$ и $\beta$ — дележи, выбранные соответственно метаигроками I и II, то

$$H(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha \succ \beta, \\ -1 & \text{при } \alpha \prec \beta, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что эта метаигра совпадает с бесконечной игрой, описанной Борелем (см. I.4.2). Ее решение было найдено А. И. Соболевым [1].

## § 6. ФОРМУЛИРОВКА ОБЩЕЙ ТЕОРИИ. ИГРЫ $n$ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

1. Основным понятием кооперативной теории является понятие характеристической функции, определяемой на множестве всех коалиций. Система соотношений (25:3:a), (25:3:b) и (25:3:c), выражающая основные свойства характеристических функций, по существу является системой аксиом, описывающих естественные свойства тех возможностей, которыми каждая коалиция располагает в наименее благоприятных условиях, именно когда все игроки, не входящие в коалицию, совместно выступают против нее.

Эта аксиоматика соответствует основным представлениям теории игр, ибо функция, значениями которой являются значения антагонистических игр коалиций против их дополнений, ей удовлетворяет. Вместе с тем аксиоматика является и полной в том смысле, что никаких «общезначимых» утверждений (т. е. справедливых во всех игровых интерпретациях), не зависящих от перечисленных аксиом, нет. Это доказывается в § 26 путем указания способа построения игры с произвольной заданной характеристической функцией.

По существу, все дальнейшее содержание монографии касается не игр, а характеристических функций. Поэтому можно было бы всюду далее (за исключением немногих отдельных мест) заменить термин «игра» термином «характеристическая функция». Авторы не делают этого, так как ограничиваются изучением лишь тех свойств игр, которые проявляются в их характеристических функциях.

2. Основной задачей кооперативной теории является формализация перехода от заданных возможностей каждой коалиции к индивидуальным возможностям игроков. При этом начинает использоваться предположение о том, что получаемые игроками и коалициями полезности могут неограниченно передаваться другим игрокам и коалициям, не изменяясь при этом даже количественно. Иными словами, задача состоит в построении по характеристической функции игры такого *дележа* или таких дележей, которые при данных условиях были бы в том или ином смысле естественными, «справедливыми».

Разумеется, решение этой задачи зависит от тех аксиом справедливости, которые при этом будут постулированы.

Фон Нейман и Моргенштерн фактически предлагают систему из трех аксиом, задающих множество дележей **V**, называемое ими *решением* игры:

1° Для любого дележа $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$\alpha_i \geqq v(i),$$
$$\sum_i \alpha_i = 0.$$

2° Никакие два дележа, принадлежащие решению **V**, не доминируют *) друг друга (аксиома внутренней устойчивости).

*) Точное определение доминирования см. на стр. 283.

3° Каков бы ни был дележ $\alpha$, не принадлежащий $\mathbf{V}$, существует дележ $\beta$, принадлежащий $\mathbf{V}$, который доминирует $\alpha$.

Определенные таким образом решения оправдывают свое название с точки зрения естественности. Чисто математически теория решений является весьма содержательной. О некоторых результатах, полученных в этом направлении, см. в III.3.3 — III.3.7.

Однако сведе́ние анализа игры (хотя бы в виде своей характеристической функции) к нахождению и рассмотрению ее решений нельзя признать исчерпывающим.

Во-первых, за исключением тривиальных («несущественных») игр, решение должно состоять более чем из одного дележа. Это сильно обесценивает нормативное содержание понятия решения, так как даже найденное решение не указывает, какие выигрыши игроки получат в результате игры.

Во-вторых, многие игры (в том числе уже простейшие из существенных — нулевые игры трех лиц) обладают многими решениями. Поэтому было бы желательно дополнить приведенную аксиоматику указаниями на выбор какого-либо определенного решения.

Кун и Таккер [2] ссылаются на следующее свидетельство Вольфа о высказывании фон Неймана спустя десятилетие, как руководителя дискуссии «круглого стола» 1 февраля 1955 г. в г. Принстоне: «Фон Нейман подчеркнул, что исключительное разнообразие решений, которые можно получить для игры $n$ лиц, не было неожиданным ввиду соответствующего исключительного разнообразия наблюдаемых устойчивых социальных структур; много различных соглашений могут оставаться неизменными, не имея для своего сохранения сегодня более основательных причин, чем тот факт, что они имели место вчера. Поэтому все еще весьма важно решение общего вопроса о существовании решения для произвольной игры $n$ лиц».

Наконец, в-третьих, ответ на упомянутый фон Нейманом вопрос оказался отрицательным. Совсем недавно Льюкас [1] привел пример игры десяти лиц, не обладающей решением. Таким образом, оказывается, что аксиоматика решения не вполне соответствует аксиоматике характеристической функции.

Доказательства разрешимости для достаточно широких классов игр являются довольно сложными. Фон Нейман и Моргенштерн установили (см. п. 60.4.2), что любая игра четырех лиц с нулевой суммой имеет хотя бы одно решение. Однако уже для случая игр пяти лиц с нулевой суммой вопрос остается открытым.

**3.** Шепли [1] предложил иную систему аксиом, свободную от перечисленных недостатков. Он по-прежнему рассматривает дележи, т. е. векторы, удовлетворяющие аксиоме 1° из предыдущего пункта. Далее, для каждой характеристической функции $v$ он из всех дележей выбирает такие дележи

$$\Phi(v) = (\Phi_1(v), \ \ldots, \ \Phi_n(v)),$$

называемые им *векторами значений игры*, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

2° Для каждого автоморфизма *) $\varphi$ характеристической функции $v$

$$\Phi_{\varphi_i}(v) = \Phi_i(v).$$

*) Определение автоморфизма (симметрии) характеристической функции см. на стр. 276.

3° Если игрок $i$ — «болван» *), то

$$\Phi_i(v) = v(i).$$

4° Для любых двух характеристических функций $v_1$ и $v_2$

$$\Phi(v_1 + v_2) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$$

(нетрудно убедиться в том, что сумма $v_1 + v_2$ двух характеристических функций в свою очередь является характеристической функцией).

Эта система аксиом является непротиворечивой и полной. Именно справедливо следующее утверждение: *для каждой характеристической функции $v$ существует один и только один вектор значений $\Phi(v)$; компоненты этого вектора определяются равенством*

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subset I} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}\,(v(S) - v(S \setminus i))$$

($|S|$ — число элементов во множестве $S$).

Данное утверждение можно интерпретировать следующим естественным образом. Пусть имеется некоторая перестановка игроков $\varphi$: $\{\varphi 1, \ldots, \varphi n\}$. На некотором месте в этой перестановке находится игрок $i$. Положим $i = \varphi k$ и $S = \{\varphi 1, \ldots, \varphi k\}$. Тогда разность

$$v(S) - v(S \setminus i) = \Delta(v, i, \varphi)$$

можно рассматривать как приращение значения характеристической функции $v$ за счет присоединения к коалиции $S \setminus i$ игрока $i$ в условиях перестановки $\varphi$. Очевидно, при различных перестановках $\varphi$ это приращение также может быть различным. Шепли доказал следующую теорему: *значение $\Phi_i(v)$ есть математическое ожидание приращения $\Delta(v, i, \varphi)$, если все перестановки $\varphi$ являются равновероятными.*

В одной из последующих работ [5] Шепли распространил этот подход на некоторый класс игр с бесконечным множеством игроков, получив весьма интересные результаты.

**4.** Фон Нейман и Моргенштерн систематически пользуются редуцированной формой характеристической функции, для которой $v(i) = -\gamma$, а $v(I) = 0$, принимая обычно $\gamma = 1$. Такие характеристические функции принято теперь называть —1—0-редуцированными характеристическими функциями. Иногда картина получается более наглядной, если перейти к 0—1-редуцированной форме характеристической функции, при которой $\gamma(i) = 0$, а $\gamma(I) = 1$. Ясно, что от одной из этих форм можно перейти к другой при помощи преобразования стратегической эквивалентности.

## § 7. ИГРЫ ЧЕТЫРЕХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

**1.** В отличие от игр трех лиц, составляющих лишь два класса стратегически эквивалентных игр, игры четырех лиц являются весьма разнообразными. Среди них имеется континуальное множество классов стратегической эквивалентности, естественным образом описываемых точками куба. Фон Нейман и Моргенштерн находят решения для игр, соответствующих некоторым областям этого куба. Полные множества решений указываются ими лишь для вершин куба.

*) Игрок $i$ называется «болваном», если для любой коалиции $S$ такой, что $i \notin S$, имеет место $v(S \cup i) = v(S) + v(i)$.

Типы решений, которые при этом обнаруживаются, весьма разнообразны. Достаточно подчеркнуть, что на главной диагонали куба, лежащей на прямой $x_1 = x_2 = x_3$, каждому из участков $-1 \leqslant x_1 \leqslant -1/5$, $-1/5 < x_1 \leqslant 0$, $0 \leqslant x_1 < 1/9$, $1/9 \leqslant x_1 \leqslant 1/3$, $1/3 < x_1 < 1$ соответствуют решения различного вида.

Авторы предполагали в последующей публикации (см. сноску на стр. 320) подробно изложить все полученные ими результаты, но это намерение не было осуществлено.

2. Непосредственное продолжение исследований фон Неймана и Моргенштерна в области теории игр четырех лиц было предпринято Миллсом [1]: он перечислил все решения игр, соответствующих точкам ребер куба, и указал некоторые свойства игр, соответствующих точкам его граней.

Исчерпывающий анализ ряда вопросов, касающихся игр четырех лиц с нулевой суммой, рассматриваемых как игры с квотой, принадлежит Шепли [2] (см. III.3.6).

## § 8. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ СЛУЧАЯ $n \geqq 5$ УЧАСТНИКОВ

1. Таблица 24 из п. 39.2.3 (см. стр. 345) является весьма впечатляющей. Она отбивает всякую охоту заниматься каталогизацией решений игр пяти лиц (классы стратегически эквивалентных игр пяти лиц составляют десятипараметрическое семейство!). Даже классы симметрических игр пяти лиц образуют континуальное семейство, хотя и однопараметрическое. Здесь уместно напомнить то прискорбное обстоятельство, что неизвестно, все ли игры пяти лиц обладают решениями.

В этом месте становится особенно ясной необходимость перехода от систематического описания игр с небольшим числом участников к разработке общей теории типа «исчисления игр», в которой изучение свойств одних игр сводилось бы к изучению свойств других игр, в том или ином смысле более просто устроенных. Первый пример такого сведения встретился в п. 35.2, где игра четырех лиц «распадалась» на игру трех лиц и отдельно стоящего «болвана». Второй пример — проведенная в п. 40.3 аналогия между симметрическими играми пяти лиц и играми четырех лиц, соответствующих точкам на главной диагонали куба. Одно из возможных направлений развития этих идей изложено в гл. IX.

Другой путь состоит в выделении тех или иных классов игр, обладающих свойствами, способствующими их классификации и анализу. (Уже ясно, что фиксированное число игроков к этим свойствам не относится.) Один такой класс рассматривается в гл. X.

2. В п. 40.2.3 авторы высказывают весьма интересное соображение о задании игр путем формулирования целей игроков по вступлению в коалиции. Это открывает некоторые перспективы сведения неясного и описательного кооперативного аспекта игры к более четкому и формализованному аспекту — стратегическому. Важный шаг в этом направлении сделан авторами в § 26.

## § 9. КОМПОЗИЦИЯ И РАЗЛОЖЕНИЕ ИГР

1. В гл. IX фон Нейман и Моргенштерн вводят на множестве всех игр (впрочем, здесь особенно было бы уместно говорить не о множестве игр, а о множестве всех характеристических функций) операцию композиции. Как и всюду в книге, авторы избегают явных указаний на

математические (в данном случае — на алгебраические) аналогии, и лишь ссылка на книгу Биркгофа и Маклейна (на стр. 353) указывает на те алгебраические ассоциации, которых не могло не быть у авторов и которыми они, быть может, даже руководствовались.

Конструкция композиции игр весьма напоминает прямые произведения групп, аннулирующие суммы полугрупп, ортогональные произведения пространств — словом, те образования, в которых элементы из различных компонент взаимодействуют друг с другом наиболее простым образом. Для игр наиболее простым взаимоотношением между игроками является бесцельность коалиций между ними (что формально выражается аддитивностью соответствующих значений характеристической функции).

2. В п. 44.3.2 затрагивается важный вопрос о соотношении между формально получаемыми математическими утверждениями, с одной стороны, и требованиями «здравого смысла», с другой. Авторы склонны (в данном месте, во всяком случае) приписать здравому смыслу роль критерия истины, упуская из виду его неизбежную ограниченность, а порой и субъективность.

В действительности требования здравого смысла играют существенную роль при фиксации основных положений математической теории. Если же парадоксальные выводы теории будут противоречить здравому смыслу, то не следует априори считать, что это обстоятельство опровергает теорию: быть может, оно свидетельствует лишь о необходимости пересмотреть или хотя бы уточнить представления здравого смысла. Современный научный здравый смысл отлично уживается с некоммутативными операциями, с неевклидовой геометрией, релятивистской механикой и т. д.

Например, несправедливость в отдельных случаях утверждения (44:D) противоречит здравому смыслу ничуть не больше, чем, скажем, возможность появления автоморфизмов прямого произведения групп, не являющихся произведениями автоморфизмов прямых сомножителей. Кроме того, в данном случае оказывается, что и «интуитивно правдоподобное» утверждение (44:B:a) является неверным.

Сказанное не может умалить педагогической роли здравого смысла, особенно для таких молодых дисциплин, как теория игр, обладающих притом широкими областями применения. Появление на ранних стадиях логического развития теории результатов, противоречащих общепринятым, наглядным представлениям, может лишь напрасно дискредитировать теорию. Можно надеяться, что со временем утверждения теории игр (касающиеся, например, решений в кооперативной теории) будут поддаваться объективной экспериментальной проверке. Первые шаги в этом направлении уже делаются (см., например, статьи Калиша, Милнора, Нэша и Неринга [1], Льюса [1], Машлера [2] и содержащий обширную библиографию обзор Фурейкера [1], а из последних работ — сообщение Фюрста [1]), однако говорить о систематическом экспериментировании в теории игр пока еще рано. Поэтому вполне понятно, что как здесь, так и в других многочисленных местах фон Нейман и Моргенштерн не упускают случая подчеркнуть согласие выводов теории игр со здравым смыслом.

Вместе с тем расхождение теоретических выводов с представлениями здравого смысла иногда дает повод, не подвергая сомнениям справедливость теории, модифицировать последнюю в направлении обобщения так, чтобы охватить ее выводами и те интуитивные соображения, которые первоначально в нее не укладывались. Так, недостаточная естественность выводов о решениях композиции игр происходит из-за накладываемого на игры ограничения нулевой суммы. Снятие этого ограничения

(в п. 44.4) позволяет в дальнейшем построить более естественный (хотя и существенно более громоздкий) вариант теории.

3. Введение эксцесса (п. 44.5 и след.) для обобщенных дележей развивает представление о дележе как о возможности, альтернативной к фактическому участию в игре с тем или иным поведением в ней. Поэтому крупный отрицательный эксцесс стимулирует участие игроков в игре даже без кооперирования. Крупный же положительный эксцесс предоставляет игрокам дележи более предпочтительные, чем их возможные выигрыши (даже в условиях образования коалиций). Так исследование вопроса о разложении игр с нулевой суммой приводит к необходимости изучения игр с нулевой суммой.

Заметим, наконец, что рассмотрение отделенных (соответственно вполне отделенных) дележей, по существу, предвосхищает введение в дальнейшем понятия ядра для характеристической функции (см. III.3.8).

## § 10. ПРОСТЫЕ ИГРЫ

1. Наиболее наглядно характеристические функции простых игр определяются в 0—1-редуцированной форме (см. II.6.4) как такие характеристические функции, которые принимают лишь значения 0 и 1. При этом коалиция $S$ с $v(S) = 1$ является выигрывающей, а с $v(S) = 0$ — проигрывающей. В простых играх кооперативный аспект игры достигает наиболее четкого выражения: в них, как остроумно замечают фон Нейман и Моргенштерн, имеется только один вид выигрыша.

Важный класс простых игр составляют взвешенные мажоритарные игры, в которых каждому игроку $i$ приписывается некоторый вес $w_i$ и выигрывающими объявляются те и только те коалиции $S$, для которых $\sum_{i \in S} w_i > \frac{1}{2} \sum_{i \in I} w_i$. Каждая такая игра обозначается через $[w_1, \ldots, w_n]$. Оказывается, что все простые игры с числом игроков, не превосходящим 5, являются взвешенными мажорантными играми (при большем числе игроков это уже не так).

2. Эвристические рассуждения приводят авторов к выделению некоторых специфических решений простых игр, которые они называют главными. Идея *главного решения* состоит в том, что приемлемыми следует считать такие дележи, в которых члены некоторой минимальной выигрывающей коалиции делят между собой единицу (считая, что игра дана в 0—1-редуцированной форме). Фактическое получение главного решения оказывается, однако, весьма сложным как логически, так и технически. Дальнейшее развитие этих идей содержится в статье Исбелла [1].

Теория простых игр оказалась математически весьма содержательной. О полученных в этом направлении результатах см. III.3.7.

## § 11. ОБЩИЕ ИГРЫ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

1. Отказ от постоянства суммы выигрышей игроков (и тем более от обращения ее в нуль) приводит фон Неймана и Моргенштерна к необходимости расширения построенной ранее теории. В принципе это можно сделать различными путями.

Первый из них связан с радикальным отказом от сведения игры к ее характеристической функции и с возвращением к первичному понятию теории игр — функции выигрыша. Однако на этом пути возникает необходимость установить существенно более общие принципы рационального

поведения игроков, чем те, которые положены в основу теории антагонистических игр. Начала соответствующей теории появились в работе Нэша [2], а достаточно полного представления о «решении» игр в этом смысле нет до сих пор.

Второй путь основан на формальном распространении результатов теории характеристических функций на функции, обладающие лишь свойствами нормированности и супераддитивности:

$$v(\varnothing)=0, \tag{1}$$

$$v(S\cup T)\geqq v(S)+v(T) \text{ для любых непересекающихся коалиций } S \text{ и } T. \tag{2}$$

Очевидно, здесь можно определить понятие *дележа* как вектора $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, для которого

$$\alpha_i \geqq v(i), \qquad \sum_{i\in I}\alpha_i=v(I),$$

и на его основе — понятия *доминируемости дележей и решения.*

На этом пути существенно ослабляется связь с исходным стратегическим аспектом проблемы: значение характеристической функции превращается из значения реальной антагонистической игры в значение некоторой фиктивной игры и даже в чисто нормативную характеристику коалиции.

Заметим здесь же, что, как показал Джиллис [2], формально можно отказаться и от условия супераддитивности (2): для произвольной (т. е. не обязательно супераддитивной) характеристической функции можно указать такую супераддитивную характеристическую функцию, что между дележами в первой и во второй устанавливается одноoднозначное соответствие, сохраняющее доминирование.

2. Фон Нейман и Моргенштерн выбирают второй путь, но с целью сохранения содержательного смысла характеристической функции предпринимают обходной маневр. По каждой общей игре (т. е. игре с переменной суммой выигрышей Г) они строят некоторую игру с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$, которую можно назвать расширением первоначальной игры Г до игры с нулевой суммой и которая должна воспроизводить все ее основные стратегические и кооперативные черты.

Переход от игры Г к ее расширению до игры с нулевой суммой $\overline{\Gamma}$ достигается включением в Г дополнительного фиктивного игрока, обладающего единственной стратегией и автоматически поглощающего в любой ситуации всю алгебраическую сумму проигрышей всех остальных игроков.

Характеристическую функцию игры $\overline{\Gamma}$ можно определить на основании ранее разработанной теории. После этого, ограничивая полученную характеристическую функцию на множестве одних только реальных игроков, мы приходим к характеристической функции игры Г, обладающей свойствами (1) и (2).

С чисто стратегической точки зрения какой-либо разницы между исходной игрой Г и полученным ее расширением $\overline{\Gamma}$ нет: в обеих играх стратегические возможности игроков одни и те же, и одинаковое их использование приводит к одинаковым результатам. Однако в кооперативном плане эти игры существенно отличаются друг от друга. Поскольку фиктивный игрок может получить больший или меньший выигрыш, он наделяется некоторыми интересами. Для осуществления своих целей он может вступать с другими, реальными игроками в соглашения, компенсируя те убытки, которые они могут понести, увеличивая его выигрыш. Это представляется тем более правдоподобным, что и стратегические

возможности реальных игроков после перехода к характеристической функции игры практически утрачивают свое значение, и в этом смысле реальные игроки сами превращаются в фиктивных. Такое уравнивание в правах фиктивного игрока с реальными достаточно наглядно показано в примере п. 56.4.1.

Так как, однако, игра $\overline{\Gamma}$ призвана моделировать игру Г, ее следует рассматривать лишь частично, допуская в ней только те возможности игроков, которыми они обладают в Г.

Это достигается надлежащей модификацией понятия доминирования (сводящейся к тому, что эффективность каждого множества понимается как эффективность подмножества всех его реальных игроков) и основанного на нем модифицированного понятия решения (п. 56.12). В этом новом решении участвуют только такие дележи, в каждом из которых фиктивный игрок $n+1$ получает лишь $v(n+1)$. Таким образом, в решениях исходной игры Г кооперативные возможности фиктивного игрока исключаются.

3. Зависимость выигрышей каждого из игроков от стратегий, выбранных остальными игроками, составляет существо теории игр. Поэтому весьма интересны те случаи, когда эта зависимость имеет место не в полной мере. Фон Нейман и Моргенштерн в п. 57.4 выделяют крайний случай отсутствия такой зависимости, вводя понятие устранимого множества. Авторы указывают на устранимость любого двуэлементного множества в существенной игре трех лиц. Этот факт представляется парадоксальным, и поэтому мы приведем здесь соответствующий пример.

Пусть игрок 1 располагает двумя стратегиями, а множества стратегий игроков 2 и 3 произвольны. Если 1 играет первую стратегию, то независимо от стратегий, выбираемых игроками 2 и 3, он сам, равно как и 3, получает нулевой выигрыш, а игрок 2 — единицу. Если же 1 выбирает вторую стратегию, то во всех ситуациях единицу получает 3, а 1 и 2 получают нули.

Это — существенная игра трех лиц и притом в 0—1-редуцированной форме, причем множество игроков $\{2, 3\}$ является устранимым.

4. Последние четыре параграфа гл. XI фон Нейман и Моргенштерн посвящают экономическим интерпретациям некоторых простейших фактов кооперативной теории игр. Здесь следует еще раз подчеркнуть, что содержанием этих разделов книги является не описание тех или иных экономических явлений как таковых и даже не их моделирование в рамках теории игр, а лишь истолкование на экономическом языке отдельных теоретико-игровых утверждений. Авторы говорят о различных видах рынков: с одним продавцом и одним покупателем (§ 61), с одним продавцом и двумя покупателями (§§ 62 и 63) и, наконец, с $l$ продавцами и $m$ покупателями (§ 64). В действительности же они ограничиваются рассмотрением лишь актов купли — продажи, рассматривая подробно тот случай, когда возможна только одна сделка. Ясно, что такой теоретико-игровой анализ описывает не упоминаемые явления в их полном объеме, а лишь отдельные их черты.

## § 12. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЙ ДОМИНИРОВАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1. Различие вариантов понятий доминирования и решения дает авторам повод рассмотреть этот вопрос в абстрактном виде, не фиксируя природы дележей и приняв в качестве доминирования произвольное отношение на их множестве. В частности, они доказывают (в п. 65.8.2) утверж-

дение, являющееся частным случаем теоремы Ричардсона (см. I.2.6). Вопросы существования несколько модифицированных решений Ричардсон рассмотрел в работе [3].

**2.** В п. 66.3 фон Нейман и Моргенштерн пытаются обойти предположение о трансферабельности полезности. Они вводят области индивидуальных полезностей $\mathcal{U}_i$ для каждого игрока $i$ и $\mathcal{U}(T)$ для каждой коалиции $T$, предвосхищая тем самым те результаты, которые были получены совсем недавно (см. III.3.11).

**3.** Важным предположением всей теории является условие безграничной делимости полезности. Отказ от этого условия приводит к разнообразным последствиям: в п. 65.9.2 указывается на возможность аппроксимации игры с непрерывными множествами дележей и многочисленными решениями игр с дискретным множеством дележей и единственными решениями у каждой игры.

Ограниченную делимость полезности можно интерпретировать как ограниченность различения полезности субъектом, т. е. как ограниченность (в известном смысле) информации, которой располагает субъект относительно своих полезностей. Учет такой неполноты информации есть результат последовательного теоретико-игрового подхода к вопросу. Как и следовало ожидать, оказывается, что (см. п. 67.3) игрок, более тонко различающий полезности, оказывается в выигрыше.

*Глава III*

# ТЕОРИЯ ИГР — РАЗДЕЛ МАТЕМАТИКИ

За время, прошедшее с момента выхода в свет монографии «Теория игр и экономическое поведение», теория игр разрослась в обширную дисциплину; ей посвящено значительное число монографий, о которых достаточно обстоятельно говорится в предисловии О. Моргенштерна к данному изданию, а также огромное количество статей (библиография, составленная в 1959 г. Д. Томпсон и Дж. Томпсоном [1], уже насчитывала 1009 названий).

Для современной теории игр характерно разнообразие отдельных направлений. Это вполне естественно, так как принятие решений в условиях конфликтов, равно как и в условиях неопределенности, является весьма сложным объектом, к изучению которого можно подходить с самых различных сторон. Поэтому описание или хотя бы систематизация всех результатов, полученных в области теории игр, практически невозможна. В этой главе будут разобраны основные направления в теории игр и приведены наиболее типичные результаты.

Так как мы говорим здесь о теории игр как о разделе математики, мы не будем касаться разнообразных приложений теории игр, несмотря на их интерес и поучительность.

## § 1. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

1. К настоящему времени матричные игры теоретически изучены достаточно хорошо. Боненбласт, Карлин и Шепли [1] выяснили возможное расположение многогранников оптимальных стратегий игроков в матричных играх в симплексах всех их смешанных стратегий, указав необходимые соотношения для размерностей тех и других. Они же указали способ построения матричной игры с заданным решением. Исследование этого последнего вопроса было завершено в работе Гейла и Шермана [1], которые охарактеризовали множество пар выпуклых многогранников, которые могут быть множествами оптимальных стратегий игроков в некоторой матричной игре, а также нашли способ описания всех игр с заданными множествами оптимальных стратегий игроков. Множественность решений, обычно присущая играм, для матричных игр является в некотором смысле исключением. Боненбласт, Карлин и Шепли [1] установили, что множество всех $m \times n$-игр, имеющих единственные решения, открыто и всюду плотно в $mn$-мерном евклидовом пространстве всех $m \times n$-игр.

Весьма интересные исследования, касающиеся общих комбинаторных свойств седловых точек в матрицах, были выполнены Шепли [6].

2. Проведенные в п. 18.2 книги фон Неймана и Моргенштерна рассуждения показывают, что охват единой формулой решения матричных игр даже в простейших случаях практически невозможен. Отсюда естественным образом намечаются два пути для нахождения решений игр.

Во-первых, можно пытаться выделять те или иные классы матричных игр, зависящих от небольшого числа параметров (см. по этому поводу сказанное в II.4.2). Решения для таких классов игр (впрочем, довольно узких и немногочисленных) можно найти в книгах Карлина [3] и Дрешера [1].

Во-вторых, можно строить алгорифмы нахождения всех (или хотя бы некоторых) решений произвольной матричной игры.

Первый такой алгорифм, имеющий также и общетеоретическое значение, нашли Шепли и Сноу [1]. Сущность его описывается следующей теоремой.

Пусть $X$ и $Y$ — оптимальные стратегии игроков I и II в игре с матрицей выигрышей $A$, значение которой отлично от нуля. Тогда для того, чтобы $X$ и $Y$ были крайними точками (вершинами) соответствующих многогранников оптимальных стратегий, необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая невырожденная $r\times r$-подматрица $B$ матрицы $A$, что

$$X_B=\frac{J_rB^{-1}}{J_rB^{-1}J_r^T},\quad Y_B^T=\frac{B^{-1}J_r^T}{J_rB^{-1}J_r^T},\quad v(A)=\frac{1}{J_rB^{-1}J_r^T} \tag{1}$$

(здесь $X_B$ и $Y_B$ означают те части векторов $X$ и $Y$, которые составлены из компонент, отвечающих строкам или столбцам матрицы $A$, участвующим в образовании ее подматрицы $B$; $J_r$ — $r$-мерный вектор, все компоненты которого равны единице).

Так как каждая конечная матрица содержит лишь конечное число подматриц, последовательное рассмотрение всех подматриц $A$, составление векторов $X_B$ и $Y_B$ согласно формулам (1) и проверка их на «стратегичность» и оптимальность приводят в результате выполнения конечного числа операций к нахождению всех вершин многогранников оптимальных стратегий. Отсюда, переходя к выпуклым комбинациям, можно получить и все вообще оптимальные стратегии.

**3.** Весьма интересный, основанный на дифференциальных уравнениях способ приближенного нахождения оптимальных стратегий игроков в матричной игре предложили Браун и фон Нейман [1].

Пусть $A$ — кососимметрическая $n\times n$-матрица (рассмотрение игр только с кососимметрическими матрицами выигрышей общности рассмотрений не умаляет). Тогда оптимальной стратегией каждого из игроков является каждая из предельных точек решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\varphi_i(x)-x_i\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x) \tag{2}$$

при произвольных начальных условиях $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, для которых

$$x_i^0\geqq 0,\ i=1,\ \ldots,\ n;\ \sum_{i=1}^{n}x_i^0=1,$$

где

$$\varphi_i(x)=\max\left\{0,\ \sum_j a_{ij}x_j\right\}.$$

К сожалению, на практике даже численное решение системы (2) представляет большие трудности.

**4.** Еще один путь нахождения хотя бы одной стратегии каждого из игроков, предложенный Брауном и строго обоснованный Дж. Робинсон

[1], состоит в осуществлении процесса последовательных приближений. Его можно интерпретировать также как экспериментальное нахождение оптимальной стратегии в процессе осуществления матча, отдельные партии которого состоят в проведении матричной игры, причем в каждой партии каждый игрок фиксирует частоты выбора противником чистых стратегий за время, прошедшее от начала матча, и, принимая их за вероятности в смешанной стратегии, выбирает свою чистую стратегию, наиболее благоприятную против этой смешанной.

Оценка сходимости описанного процесса, данная Шапиро [1], показывает, что он сходится весьма медленно: погрешность в определении значения $n \times m$-игры за $t$ шагов имеет порядок $t^{-\frac{1}{n+m-2}}$.

5. Как пишет Гейл [1], «одним из самых удивительных событий, связанных с появлением современной теории линейных экономических моделей, явилось одновременное, но независимое развитие теории линейного программирования, с одной стороны, и теории игр, с другой, и выявившаяся затем тесная связь между этими двумя предметами». По свидетельству Данцига [1], на связь между линейным программированием и теорией матричных игр указывал еще Дж. фон Нейман в 1947 г. Затем этими вопросами занимались Гейл, Кун и Таккер [1]. В наиболее естественной форме эквивалентность пары двойственных друг другу задач линейного программирования и матричной игры дается теоремой, принадлежащей Данцигу и Брауну и опубликованной Данцигом [2].

Рассмотрим пару двойственных задач линейного программирования

$$\begin{array}{ll} AX^T \leqq B^T, & YA \leqq C, \\ CX^T \to \max, & YB^T \to \min \\ (X \geqq 0), & (Y \geqq 0). \end{array}$$

Для того чтобы векторы $X^0$ и $Y^0$ являлись оптимальными решениями этих задач, необходимо и достаточно, чтобы вектор

$$(tX^0, tY^0, t)$$

был оптимальной стратегией одного из игроков в игре с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -A & B^T \\ A^T & 0 & -C^T \\ -B & C & 0 \end{pmatrix}$$

(поскольку эта матрица кососимметрична, неважно, о каком именно игроке идет речь), причем $t > 0$.

Эквивалентность решения матричной игры решению задач линейного программирования позволяет применять к решению первых все приемы, разработанные для решения вторых. В частности, оптимальные стратегии в матричных играх можно находить при помощи известного симплекс-метода. Весьма практичный способ решения матричной игры при помощи линейного программирования предложил Таккер [1].

6. При установленном соответствии между матричными играми и парами двойственных задач линейного программирования каждому классу матричных игр соответствует класс задач линейного программирования, и наоборот. При этом может оказаться, что классу игр, естественно очерченному в смысле содержательной интерпретации составляющих его игр, соответствует класс пар задач линейного программирования, также достаточно естественно очерченный, но уже в иной, «линейно-про-

граммной» интерпретации. Примеры такого соответствия между классами могут оказаться весьма полезными потому, что отдельные факты, достаточно запутанные в одном из этих классов, могут быть интуитивно вполне ясными в другом.

Один такой пример был исследован фон Нейманом в статье [2]. Он состоит в следующем.

Пусть дана $m \times n$-матрица $A = \| a_{ij} \|$. Игрок I имеет своими стратегиями клетки $(ij)$ этой матрицы, а игрок II — ее строки $(i)$ и столбцы $(j)$. Если игрок I выбирает клетку $(ij)$, то выигрыш его будет равен $-a_{ij}$ при выборе игроком II строки $i$ или столбца $j$ и будет равен нулю в противном случае. В результате мы получаем матричную $mn \times (m+n)$-игру.

Все игры такого типа можно интерпретировать следующим образом. Пусть игрок I «прячется» в одну из клеток матрицы $A$, а игрок II пытается угадать строку или столбец, на котором лежит эта клетка. Если игрок II угадывает, то он получает от игрока I число, стоящее в выбранной клетке матрицы.

Эта игра эквивалентна задаче линейного программирования, состоящей в максимизации суммы

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_{ij}$$

при неотрицательных $x_{ij}$, подчиненных ограничениям

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqq 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq 1, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Такая задача линейного программирования известна под названием «задачи о назначениях»: распределить оптимальным образом $m$ лиц по $n$ работам, если эффект, которого добивается лицо $i$ на работе $j$, равен $a_{ij}$.

7. Если множествами стратегий игроков в антагонистической игре являются выпуклые многогранники (с конечным числом вершин) в конечномерных евклидовых пространствах, а функция выигрыша билинейна, то игра называется *полиэдральной*. Очевидно, внутренние точки многогранников стратегий, являющиеся как бы «физическими» смесями вершин, как стратегии приводят ввиду билинейности функции выигрыша к тем же выигрышам, что и соответствующие их вероятностые смеси, т. е. смешанные стратегии. Поэтому в полиэдральных играх можно ограничиться рассмотрением только тех чистых стратегий, которые расположены в вершинах многогранников стратегий. Тем самым полиэдральная игра превращается в конечную.

Получившаяся игра оказывается матричной, если исходные многогранники стратегий задаются своими вершинами. Если, однако, эти многогранники заданы своими гранями, то игра по-прежнему остается конечной антагонистической (т. е. матричной), но для того, чтобы выписать ее матрицу выигрышей в явном виде, необходимо потратить известные усилия, часто весьма значительные. Поэтому встает вопрос о решении полиэдральных игр без предварительного их приведения к традиционной матричной форме. Очевидно, мы здесь сталкиваемся с частным случаем проблемы, затронутой в II.4.2.

Связь матричных игр с линейным программированием позволяет решить поставленный вопрос, что и было сделано в работах Данцига [3], Чарнса [1] и Вульфа [1].

Пусть определяющая функцию выигрыша игры билинейная форма имеет $m \times n$-матрицу $A$ (тем самым мы предполагаем, что многогранники стратегий игроков лежат соответственно в $m$-мерном и $n$-мерном векторных пространствах), а многогранники стратегий задаются своими гранями, т. е. системами неравенств вида $BX^T \leqq b^T$, $YC \geqq c$ (здесь $B$ есть $k \times m$-матрица, $C$ — $n \times l$-матрица, а $b$ и $c$ суть соответственно $k$- и $l$-векторы; $k$ и $l$, очевидно, означают числа граней в многогранниках стратегий). Тогда оптимальная стратегия игрока I получается как часть $X$ оптимального решения $(X, V)$ задачи линейного программирования

$$BX^T \leqq b^T,$$
$$-AX^T + CV^T = 0,$$
$$V \geqq 0$$

и аналогично оптимальная стратегия игрока 2 — как часть $Y$ оптимального решения $(Y, U)$ задачи линейного программирования

$$YC \geqq c,$$
$$-YA + UB = 0,$$
$$U \geqq 0.$$

8. Полиэдральные игры иногда выступают в виде игр с линейными ограничениями, т. е. таких матричных игр, в которых игроки могут применять не все смешанные стратегии, а лишь те из них, составляющие вероятности которых подчинены некоторым линейным неравенствам. В этом случае пространство чистых стратегий игрока получаемой полиэдральной игры будет выпуклым многогранником, лежащим в симплексе всех его смешанных стратегий в первоначальной матричной игре.

В качестве простого, но принципиально важного примера укажем на матричную игру, в которой игрок 1 по тем или иным соображениям, известным противнику, играет в любой своей смешанной стратегии первую чистую стратегию не реже, чем вторую, вторую не реже, чем третью, и т. д. Это значит, что всякая доступная для него смешанная стратегия $X = (x_1, \ldots, x_n)$ должна удовлетворять условиям

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n.$$

В данном случае неравенства выделяют в симплексе всех смешанных стратегий игрока 1 некоторый меньший симплекс, и поэтому запись матрицы выигрышей новой игры не составляет труда.

## § 2. БЕСКОНЕЧНЫЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

1. Бесконечные антагонистические игры (как и все антагонистические игры) задаются путем указания пространств $A$ и $B$ стратегий двух игроков и функций выигрыша $H$ на произведении $A \times B$. Поэтому всякую такую игру естественно записывать как тройку $\langle A, B, H \rangle$.

Максиминный принцип поведения игроков в антагонистических играх исчерпывающим образом характеризует их поведение с точки зрения максимизации математического ожидания выигрыша. Вместе с тем, если игра имеет много решений (равноценных в указанном смысле), то встает вопрос о выборе среди них наилучшего еще и с какой-либо другой, дополнительной точки зрения. В качестве такого побочного принципа оптимального поведения Бак [1] предложил наилучшее использование ошибок против-

ника. По существу, тот же критерий рассматривает Хейбрехтс [1]; она же анализирует принцип, основанный на минимизации некоторой характеристики отклонения функции выигрыша от значения игры.

Максиминный принцип поведения игроков не зависит от мощности множеств стратегий игроков. Поэтому переход от матричных игр к бесконечным антагонистическим играм никаких концептуальных, чисто теоретико-игровых трудностей не вызывает. Однако уже вопросы существования значения игры и ее решений выглядят при переходе к бесконечному случаю иначе.

**2.** Как известно, в стратегических играх целесообразно использовать смешанные стратегии, т. е. вероятностные распределения на множествах чистых стратегий игроков. Однако для того, чтобы рассмотрение смешанных стратегий в игре $\langle A, B, H\rangle$ имело смысл, необходимо существование выигрыша в условиях ситуации, образованной любой парой таких стратегий игроков, т. е. существование для любой пары смешанных стратегий $F$ и $G$ интеграла

$$\int_A \int_B H(a, b)\, dF(a)\, dG(b). \tag{3}$$

Этот вопрос является содержательным по следующей причине. Дело в том, что уже само рассмотрение вероятностной меры $F$ на множестве $A$ означает предварительное введение на $A$ некоторой $\sigma$-алгебры $\mathfrak{A}$ подмножеств, измеримых в смысле $F$. Точно так же рассмотрение меры $G$ связано с $\sigma$-алгеброй $\mathfrak{B}$ подмножеств $B$, измеримых в смысле $G$. Рассмотрение интеграла (3) связано с $\sigma$-алгеброй подмножеств $\mathfrak{C}$, порожденной всеми декартовыми произведениями вида $K \times L$, где $K \in \mathfrak{A}$ и $L \in \mathfrak{B}$. Если функция выигрыша $H$ измерима относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{C}$, то интеграл (3) существует.

**3.** Прообразом многочисленных теорем существования в бесконечных антагонистических играх явилась теорема Вилля [1] о полной определенности игр на единичном квадрате с непрерывной функцией выигрыша. Фактически при доказательстве этой теоремы используется только то, что сегменты стратегий игроков в своей естественной евклидовой топологии являются условно компактными пространствами *), а функция выигрыша непрерывна в этой же топологии.

Таким образом, оказывается существенным, какая топология (или, в частности, какая метрика) принята на множестве стратегий игроков.

**4.** Очевидно, расстояние, определяемое между стратегиями, должно отражать различие между ними. Это различие может быть чисто «физическим», описывающим разницу между ними, как фактически осуществляемыми действиями игроков. Но выбор игроком той или иной стратегии производится им не на основании внешних, «физических» ее характеристик, а во имя максимизации своего выигрыша.

Вальд [2] вводит на множествах стратегий *естественную* метрику (которую можно было бы назвать также равномерной или чебышевской; сам Вальд называет ее иногда также метрикой Хелли), полагая в игре $\langle A, B, H\rangle$ для любых $a', a'' \in A$

$$\rho_A(a', a'') = \sup_{b \in B} |H(a', b) - H(a'', b)|$$

*) Пространство называется *условно компактным* (в иной терминологии — вполне ограниченным), если из каждой бесконечной последовательности его элементов можно выбрать сходящуюся в себе подпоследовательность.

и аналогично для пространства стратегий второго игрока. Очевидно, в естественной топологии функция выигрыша является непрерывной по каждой из своих переменных (т. е. по стратегии каждого из игроков).

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — σ-алгебры подмножеств $A$ и $B$, порожденные открытыми в естественной топологии подмножествами пространств $A$ и $B$. Обозначим через $\mathfrak{C}$ наименьшую σ-алгебру, содержащую все подмножества $A \times B$ вида $K \times L$, где $K \in \mathfrak{A}$ и $L \in \mathfrak{B}$. Как показал Вальд [2], если хотя бы одно из пространств $A$ и $B$ в естественной топологии сепарабельно, то функция выигрыша $H$ измерима относительно $\mathfrak{C}$.

Вальд доказал [2] полную определенность бесконечных антагонистических игр, в которых пространства стратегий игроков условно компактны в естественной топологии (замечательно, что из условной компактности пространства стратегий одного игрока вытекает условная компактность пространства стратегий другого). Он же установил, что если вместо условной компактности пространств стратегий потребовать их компактность, то эта теорема может быть усилена: вместо полной определенности игры можно утверждать существование оптимальных стратегий у игроков. При всей своей кажущейся наглядности этот результат является весьма тонким и нетривиальным.

5. К сожалению, естественная топология в ряде случаев оказывается слишком «грубой». Например, если в игре на единичном квадрате функция выигрыша разрывна в каждой точке диагонали квадрата (в остальных точках она может быть и непрерывной), то расстояние между любыми двумя точками больше некоторого фиксированного положительного числа, так что пространства стратегий игроков в естественной топологии сплошь состоят из изолированных точек.

Поэтому наряду с естественной употребляются и иные способы топологизации пространств стратегий игроков. Так, Карлин [1] вводит слабую топологию, в которой последовательность стратегий $f_1, f_2, \ldots$ одного из игроков (пусть для определенности первого) объявляется сходящейся к стратегии $f$, если для любой стратегии $g$ второго игрока

$$\lim_{n\to\infty} H(f_n, g) = H(f, g).$$

Ясно, что нужные свойства пространства стратегии в условиях слабой топологии достигаются при более широких условиях относительно функции выигрыша, чем в условиях естественной топологии. Поэтому рассмотрение слабой топологии приводит к более сильным утверждениям. В частности, Карлином доказывается полная определенность игры на единичном квадрате, если точки разрыва функции выигрыша заполняют всю диагональ.

Весьма общая теорема о существовании значений у антагонистических игр была доказана У Вень-цзюном [1].

6. Еще со времен статьи Вилля [1] известны примеры антагонистических игр, не имеющих значения. Так, не имеет значения игра, в которой множествами стратегий игроков являются множества натуральных чисел, а функция выигрыша определяется соотношением

$$H(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{если } m > n, \\ 0, & \text{если } m = n, \\ -1, & \text{если } m < n. \end{cases}$$

Естественный подход к играм такого рода состоит в дальнейшем расширении понятия стратегии, охватывающем понятие смешанной стра-

тегии как вероятностной меры на множествах чистых стратегий. Этот подход приводит к принятию в качестве новых, обобщенных стратегий игроков конечно-аддитивных мер на множествах их чистых стратегий. Множество конечно-аддитивных мер оказывается уже достаточно универсальным: в конечно-аддитивных мерах как стратегиях каждая игра с измеримой ограниченной функцией выигрыша имеет значение. Идея этого результата восходит к работе Карлина [1], а строгое доказательство принадлежит Е. Б. Яновской [2]. Она же в работе [1] впервые начала рассматривать игры с неограниченными функциями выигрыша.

7. Пожалуй, за исключением теорем существования, в теории игр нет других утверждений, справедливых для всех игр или достаточно широких классов. Более того, даже в отдельных примерах бесконечных игр, о которых получены какие-либо нетривиальные результаты, множества стратегий являются либо подмножествами конечномерных евклидовых пространств (или же вероятностных мер на таких множествах), либо множествами конечномерных векторов, каждая компонента которых является ограниченной функцией, определенной на заданном подмножестве евклидова пространства. Игры на единичном квадрате, очевидно, относятся к первому из указанных классов. Им посвящено наибольшее количество работ.

8. Очевидно, каждую матричную игру можно рассматривать как полиэдральную и тем самым как бесконечную. Наоборот, решение полиэдральных игр потому и является столь сравнительно простым, что каждая такая игра определяется конечным числом параметров.

Следующими по сложности играми на единичном квадрате являются те, в которых функция выигрыша $H(x, y)$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(x)\, s_i(y). \tag{4}$$

Такие игры называются *вырожденными*. С точки зрения математического ожидания выигрыша каждую смешанную стратегию $F$ игрока I в вырожденной игре с функцией выигрыша (4) можно описать ее моментами

$$\int_0^1 r_i(x)\, dF(x)$$

(аналогичное справедливо и для игрока II). Поэтому смешанные стратегии в вырожденной игре с функцией выигрыша (4) можно с точностью до эквивалентности описывать $n$ параметрами. Свойства вырожденных игр рассмотрены в статьях Дрешера, Карлина и Шепли [1], Дрешера и Карлина [1], а также Гейла и Гросса [1].

Важным стимулом в разработке теории вырожденных и особенно полиномиальных игр была надежда, что такими играми удастся аппроксимировать произвольные непрерывные игры на единичном квадрате. Эта надежда не сбылась, так как, во-первых, сами полиномиальные игры оказались весьма сложными, а во-вторых, сходимость полиномов к непрерывным функциям, вообще говоря, является довольно медленной. Систематическое изложение полученных результатов, касающихся этого класса игр, содержится в гл. 11 монографии Карлина [3].

9. Большое число исследований посвящено играм с выбором момента времени. Естественная интерпретация этих игр как «дуэлей» состоит в следующем. Предположим, что каждый из двух противников может в любой

момент $t \in [0, 1]$ произвести выстрел по своему противнику, причем меткость каждого игрока с течением времени возрастает. Разумно считать, что игрок должен произвести свой выстрел достаточно поздно (чтобы стрелять с большей вероятностью попадания), однако и не слишком поздно (ибо противник может опередить его своим выстрелом и убить).

Различные модификации игр с выбором момента времени рассматривались в многочисленных статьях. Шифман [1] в симметричном случае и Карлин [2] в общем свели нахождение оптимальных стратегий игроков в игре с выбором момента времени к решению сопряженных интегральных уравнений и нашли вид решения таких игр. Подробное изложение большинства результатов, относящихся к этому классу игр, содержится в главах 13 и 14 монографии Карлина [3] (особенно см. комментарии и библиографию к этим главам).

К играм с выбором момента времени примыкают игры, в которых одному или обоим игрокам приходится выбирать несколько моментов времени. Такую игру можно интерпретировать как дуэль со многими выстрелами. Этими играми занимались Блекуэлл и Гиршик [1], Рестрепо [1] и другие.

**10.** К числу простейших игр на единичном квадрате следовало бы отнести также те игры, в которых все ситуации разбиваются на два класса: благоприятные для игрока I, в которых он получает выигрыш, равный единице, и неблагоприятные для него, в которых его выигрыш равен нулю. Можно считать, что функции выигрыша в таких играх являются характеристическими функциями тех или иных множеств.

Один пример такой игры с военно-тактической интерпретацией приведен в книге Дрешера [1]. Дальнейшие примеры технического содержания см. у Н. Н. Воробьева [7].

**11.** Весьма разнообразны и интересны игры, в которых стратегиями игроков являются функции. Следует при этом иметь в виду, что функциональная природа стратегии еще не противоречит нормальности формы игры. Для игры в нормальной форме характерен мгновенный выбор стратегии как единого целого, даже если при этом выбирается целая функция.

В широком классе игр такого рода игрок, выбирающий функцию, называется пулеметчиком (в зарубежной литературе — бомбардировщиком). Выбираемая им функция интерпретируется как плотность огня, который он ведет в каждый момент времени. Очевидно, стратегию пулеметчика можно рассматривать как предельный случай стратегии игрока, выбирающего несколько моментов времени. Если его противник выбирает момент времени из интервала, то он называется снайпером (соответственно истребителем). Анализ игр этого класса требует привлечения известной из статистики леммы Неймана — Пирсона [1]. Обстоятельное рассмотрение этих игр и историю вопроса см. в гл. 16 монографии Карлина [3].

**12.** Несколько особое место занимают игры типа покера, столь подробно рассмотренные в § 19 монографии фон Неймана и Моргенштерна. В этих играх фактически стратегией игрока является не конкретное решение, а функция, значения которой суть такие решения, а область задания — множество информационных состояний. Тем самым покер было бы естественно отнести к динамическим играм. Основные результаты, относящиеся к теории игр этого типа, приведены в гл. 17 монографии Карлина [3].

## § 3. КООПЕРАТИВНАЯ ТЕОРИЯ

1. С принципиальной точки зрения антагонистические игры исследованы исчерпывающим образом. Переход к более широкому классу бескоалиционных игр фон Нейман и Моргенштерн лишь наметили, дав общее определение такой игры, но никак не развили, ибо не сформулировали даже общих принципов разумного поведения игроков в таких играх. Они свели вопрос к изучению характеристической функции игры, т. е., в конечном итоге, к некоторой системе антагонистических игр.

Это сведение при всей его концептуальной глубине и аналитическом изяществе оказывается содержательно неполным, ибо не отражает всех черт исходной игры. Весьма убедительным свидетельством неполноты этой теории является пример, приведенный Мак-Кинси [1]: игрок I, выбирая одну из своих стратегий, доставляет себе выигрыш 0, а своему партнеру, игроку II,— выигрыш 10; если же I выбирает свою вторую стратегию, то он сам получит — 1000, а II получит 0. Здесь, очевидно, $v(\mathrm{I}) = 0$; $v(\mathrm{II}) = 0$; $v(\mathrm{I}, \mathrm{II}) = 10$. Если мы ограничимся лишь рассмотрением характеристической функции, то неизбежно упустим некоторые существенные черты ситуации.

Кроме того, классическая кооперативная теория фон Неймана — Моргенштерна предполагает наличие индивидуальной неограниченной трансферабельной количественно инвариантной полезности (единственным местом, где авторы пытаются освободиться от этого предположения, являются §§ 66, 67, особенно см. п. 66.3). Сказанное предопределило возможности (в значительной мере уже осуществленные) целой иерархии обобщений первоначальной кооперативной теории фон Неймана и Моргенштерна.

Заметим, прежде всего, что нельзя сохранить в играх неограниченную трансферабельность полезности, но отказаться от ее инвариантности. Как показал Ауман [1], если в игре участвуют хотя бы три игрока, то из неограниченной трансферабельности полезности следует ее линейность. Таким образом, если отвлечься от непринципиальных модификаций, теория фон Неймана — Моргенштерна покрывает все случаи неограниченно передаваемой (трансферабельной) полезности.

Первая возможность обобщения связана с развитием классической кооперативной теории без трансферабельной полезности (т. е. без общих «денег», являющихся «равнополезными» для всех игроков), но с побочными платежами, осуществляемыми в натуральных предметах; фактически при этом, разумеется, происходит передача полезности, но единой шкалы пересчета полезностей нет, и тем более суммарное приращение полезностей не обязано обращаться в нуль. Следующим шагом в направлении обобщений классической кооперативной теории является полный отказ от передач полезностей, но при сохранении общего способа задания игры, напоминающего характеристическую функцию. Соответствующая теория называется теорией игр *без побочных платежей*.

Далее, можно вернуться к чисто стратегическому аспекту игры и считать, что ожидаемые выигрыши игроков (или коалиций) не являются первичными данными, приводимыми в определении игры, а вычисляются на основе значений функций выигрыша в тех или иных ситуациях. На этом уровне обобщения появляется теория *бескоалиционных* игр.

Наконец, если считать, что элементарными участниками игры (т. е. сторонами, которыми приписываются выигрыши в ситуациях) являются коалиции, которые могут пересекаться друг с другом, то мы получаем наиболее широкий класс игр, класс коалиционных игр.

Бескоалиционные игры часто называют *некооперативными*. На этом терминологическом различии стоит несколько остановиться, потому что дело здесь не в том, какие объединения игроков называть коалициями, а какие — кооперациями, а в точке зрения на саму теорию. Если мы расширяем класс изучаемых кооперативных игр, то мы отказываемся от кооперативного аспекта как частной формы рациональных действий игроков. Тем самым мы приходим к некооперативным играм. Если, наоборот, мы, исходя из наиболее общих, коалиционных игр, ограничиваемся случаем одноэлементных (или, что, в сущности, то же самое, попарно непересекающихся) коалиций, то приходим к тому же самому классу игр, которые теперь уже, однако, естественно называть бескоалиционными.

Обратимся теперь к изложению основных результатов, полученных на каждом из этих этапов обобщения, разделив весь материал для удобства на две части. Большое число фактических сведений по этим вопросам, а также критическое рассмотрение различных подходов к ним содержится в монографии Льюса и Райфы [1].

2. Кооперативная теория бескоалиционных игр была разработана фон Нейманом и Моргенштерном наиболее подробно и тщательно. Ей посвящено около двух третей общего объема монографии. Кроме того, эта теория привлекает обилием утверждений, допускающих естественное истолкование в экономических или социологических терминах. Поэтому можно было бы ожидать, что в последующие годы кооперативная теория сделает значительные успехи.

Эти ожидания сбылись лишь частично. Хотя работы, трактующие вопросы кооперативной теории, являются математически тонкими и оригинальными, но число их долгое время было невелико и начало быстро возрастать лишь совсем недавно. Несколько причин обусловили это обстоятельство.

Первой из них следует считать резкую нетрадиционность всей теоретико-игровой проблематики, которая, впрочем, легко объяснима, так как все «традиционные» математические теории имеют, в сущности, своим предметом те или иные аспекты и варианты перемещений физических тел в физическом пространстве, а теория игр связана с наиболее сложными вариантами понятия разумного и целесообразного. Этим определяется и нетрадиционность математического аппарата теории игр. Но если антагонистические игры удалось связать с классическими вопросами линейной алгебры, функционального анализа и интегральных уравнений или с не столь классическими, но достаточно наглядными выпуклыми многогранниками, то исследование кооперативной теории опирается лишь на запутанные элементарные комбинаторные рассуждения, весьма специальные в каждом случае.

Во-вторых, неясность основного понятия теории игр — оптимального поведения в условиях, выходящих за пределы чисто антагонистического конфликта, а также трудности (чтобы не сказать невозможность) экспериментальной проверки ее аксиом. С этим же связана неполнота кооперативной теории в части выбора того или иного решения из большого их числа и выбор в решении некоторого определенного дележа.

В-третьих, антагонистические игры с самого начала оказались тесно связанными с приложениями, как внутриматематическими, теоретическими (например, с математической статистикой), так и прикладными (военно-тактические задачи). Поэтому лица, занявшиеся теорией игр, стимулировались во вполне определенном направлении, не связанном непосредственно с кооперативной теорией.

Ввиду всего сказанного кооперативная теория представляет собой в настоящий момент довольно пеструю картину. Мы остановимся лишь на некоторых явлениях, которые представляются наиболее значительными.

**3.** До последнего времени оставался открытым вопрос о существовании решений для произвольных кооперативных игр. Пример Льюкаса [1] дал отрицательный ответ на этот вопрос. Тем самым поставлены новые проблемы: классификации неразрешимых игр в соответствии с причинами их неразрешимости, а также поисков нового («обобщенного») понятия решения, которое будет существовать для каждой игры. Пока последнее не сделано, принципы разумного поведения (а решения в смысле Неймана — Моргенштерна являются таковыми, несмотря на свою уязвимость для критики) оказываются ограниченными. Игры же, не подпадающие под четко сформулированные принципы, ускользают из области математики в область психологии, заставляя еще раз вспомнить высказывание Бореля, приведенное в I.4.2.

Вместе с тем остаются актуальными поиски возможно более широких классов игр, имеющих решения. В этом направлении пока получены лишь отдельные, сравнительно частные результаты.

Так, Джиллис [2] показал, что «положительная доля» всех игр имеет решения, а для «положительной доли» всех нулевых игр это решение единственное.

Пример противоположного характера построили Калиш и Неринг [1]. Они рассматривают игры с бесконечным (счетным) множеством игроков $I$. Дележи $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ такой игры, если она задана в $-1-0$-редуцированной форме, должны удовлетворять соотношениям

$$\alpha_i \geqq -1 \text{ для всех } i \in I,$$
$$\sum_{i \in I} |\alpha_i| < \infty,$$
$$\sum_{i \in I} \alpha_i = 0.$$

Игра называется *конечно убывающей*, если для любой коалиции $S \subset I$ и игрока $i \in I$

$$v(S) \leqq v(S \setminus i)$$

(ясно, что игра с конечным множеством игроков не может быть конечно убывающей). Доказывается, что конечно убывающие игры не имеют решений.

Построенный Льюкасом [1] пример игры, не имеющей решения, носит весьма искусственный характер. В этом примере

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$
$$v(I) = 5, \; v(1, 3, 5, 7, 9) = 4,$$
$$v(1, 2) = v(3, 4) = v(5, 6) = v(7, 8) = v(9, 10) = 1,$$
$$v(3, 5, 7, 9) = v(1, 5, 7, 9) = v(1, 3, 7, 9) = 3,$$
$$v(3, 5, 7) = v(1, 5, 7) = v(1, 3, 7) = 2,$$
$$v(3, 5, 9) = v(1, 5, 9) = v(1, 3, 9) = 2,$$
$$v(1, 4, 7, 9) = v(3, 6, 7, 9) = v(5, 2, 7, 9) = 2,$$
$$v(S) = 0 \text{ для всех остальных } S \subset I.$$

(Данная характеристическая функция не является супераддитивной; однако в свете сказанного в III.11.1 с точки зрения решений это обстоятельство — несущественное.)

4. Разнообразие, наблюдавшееся в строении отдельных решений различных игр, как выяснилось, является вполне закономерным. Шепли [3] установил, что, каково бы ни было замкнутое множество $I$ в $n$-мерном евклидовом пространстве, существует (ненулевая) игра $n+3$ лиц, в которой одно из решений распадается на две замкнутые части, причем одна из этих частей «подобна» множеству $I$.

Таким образом, индивидуальные описания решений игр за пределами класса ненулевых игр четырех лиц (рассмотренных в гл. VII монографии) оказываются бесцельными.

Общие высказывания о решениях произвольной игры носят весьма ограниченный характер. Например, Джиллис [2] выяснил, что дележи, принадлежащие какому-либо решению, не могут лежать «достаточно близко» от вершин симплекса дележей.

Шепли в [3] поставил вопрос о существовании у игр решений, являющихся бесконечными, но лишь счетными множествами дележей, а также зависящей от числа игроков оценке сверху числа дележей в конечном решении. Гальмарино [1] установил, что в играх четырех лиц счетных решений быть не может, а для конечных решений существует требуемая оценка.

5. Невозможность указывать общие свойства решений, присущие всем играм, естественным образом приводит к выделению различных частных классов игр и изучению их решений. Начало этому направлению было положено в монографии фон Неймана и Моргенштерна, а затем появилось большое число работ, посвященных специфическим играм, выделяемым содержательными признаками. Формальное описание этого класса игр состоит в следующем.

Пусть множество всех игроков $I$ представлено в виде объединения $P \cup Q$ непересекающихся групп $P$ (продавцы) и $Q$ (покупатели), причем для любой коалиции $S$ (рынок)

$$v(S) = \min\{|S \cap P|,\ |S \cap Q|\}$$

(т. е. содержательно выигрыш рынка равен числу заключенных на нем сделок).

Шепли описывает класс решений для модели рынка и в том числе единственное симметричное решение (в каждом дележе которого все компоненты, соответствующие покупателям, так же как и все компоненты, соответствующие продавцам, равны друг другу).

6. Важный класс игр, так называемые «игры с квотой», исследовал Шепли в статье [2]. *Квотой* в игре с характеристической функцией $v$ называется вектор $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, обладающий двумя свойствами:

$$v(i \cup j) = \omega_i + \omega_j \text{ при любых } i,\ j \in I,$$

$$\omega_1 + \ldots + \omega_n = v(I).$$

Как выясняется, для того чтобы игра (характеристическая функция) обладала квотой, необходимо и достаточно, чтобы для любой четверки различных игроков $i$, $j$, $k$, $l$ имело место

$$v(i \cup j) + v(k \cup l) = v(i \cup l) + v(j + k)$$

¹) Так, Шепли [4] систематически рассмотрел один из случаев намеченной фон Нейманом и О. Моргенштерном в § 64 их монографии модели рынка.

и, кроме того, чтобы было

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ i,\, j \in I}} v(i \cup j) = 2(n-1)\, v(I).$$

Отсюда следует, между прочим, что всякая игра четырех лиц с нулевой суммой имеет квоту. Шепли доказывает, что каждая игра с квотой обладает решением (ср. п. 60.4), и приводит одно из решений в явном виде. Это решение основано на доминировании относительно двуэлементных коалиций.

Как сама идея квоты, так и полученные Шепли результаты были обобщены Калишем [1]. В частности, он ввел $m$-квоту как вектор $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, для которого $v(S) = \sum_{i \in S} \omega_i$ для всех $m$-элементных коалиций $S$, и указал необходимые и достаточные условия существования решения игры, основанного на этой $m$-квоте.

7. Большой интерес привлекли простые игры. Нулевые простые игры должны быть *собственными* (т. е. коалиция вместе с ее дополнением не могут быть выигрывающими) и *строгими* (коалиция вместе с ее дополнением не могут быть проигрывающими). Выход за пределы нулевых игр приводит к возможностям появления несобственных и (или) нестрогих простых игр.

В нестрогой игре коалиция, являющаяся проигрывающей вместе со своим дополнением, называется *блокирующей*. Ричардсон [4], развивая идеи, намеченные фон Нейманом и Моргенштерном в § 53 монографии, предложил рассматривать игры как проективные пространства, в которых точки понимаются как игроки, а попарно пересекающиеся подпространства наименьшей размерности — как выигрывающие коалиции. Им получен ряд результатов о существовании блокирующих коалиций, в которых число игроков имеет определенное арифметическое строение.

Простая игра называется *однородной*, если она имеет транзитивную группу автоморфизмов. Не всякое число игроков может участвовать в строгой однородной игре. Исбелл показал [2], что для каждого нечетного $m$ найдется такое $h$, что при $k > h$ не существует строгих однородных игр с $2^k m$ игроками.

Чрезвычайно важно, интересно и перспективно изучение всякого рода действий на множествах игр, которые позволяют конструировать сложные и разнообразные игры из отдельных сравнительно простых и однотипных компонент. К такого рода действиям относятся композиции игр, введенные фон Нейманом и Моргенштерном (в гл. IX). Пока не удалось обнаружить иных достаточно естественных конструкций, применимых к произвольным играм. Однако для простых игр Шепли [6] ввел понятия суммы и произведения.

Пусть $\Gamma(P_1, W_1)$ и $\Gamma(P_2, W_2)$ — две простые игры в 0—1-редуцированной форме с непересекающимися множествами игроков (здесь и далее $P_1$, $P_2$ и $P$ — множества игроков в играх, $W_1$, $W_2$ и $W$ — соответствующие множества выигрывающих коалиций; характеристические функции этих игр обозначены через $v_1$, $v_2$ и $v$). *Суммой* этих двух игр называется игра

$$\Gamma(P_1, W_1) \oplus \Gamma(P_2, W_2) = \Gamma(P, W),$$

где $P = P_1 \cup P_2$, причем для любого $S \subset P$

$$v(S) = v_1(S \cap P_1) \dotplus v_2(S \cap P_2)$$

(где в отличие от композиции сложение понимается в булевском смысле). Аналогично *произведением* этих же игр называется игра

$$\Gamma(P_1, W_1) \otimes \Gamma(P_2, W_2) = \Gamma(P, W),$$

где также $P = P_1 \cup P_2$, а для любого $S \subset P$

$$v(S) = v_1(S \cap P_1)\, v_2(S \cap P_2).$$

Оказывается, что введенные конструкции в каком-то смысле инвариантны относительно понятия решения: решения сумм и произведений получаются определенным образом из решений компонент.

Некоторый выход за пределы простых игр осуществляется в конструкции Оуэна [1], которая названа им *тензорной композицией* игр.

Исследовались и отдельные классы простых игр. Так, еще фон Нейман и Моргенштерн (в гл. X) рассматривали различные виды мажоритарных игр.

Ботт [1] вводит мажоритарные $(n, k)$-игры, где $n/2 < k < n$, полагая

$$v(S) = \begin{cases} -|S|, & \text{если } |S| < k, \\ n - |S|, & \text{если } |S| \geqq k, \end{cases}$$

и находит единственный класс решений, переходящих друг в друга при автоморфизмах игры. Дальнейшие результаты об этом классе игр получил Джиллис [1].

**8.** Наряду с решением игры «разумный» класс дележей представляет рассмотренное Джиллисом [2] *c*-ядро (core), состоящее из всех дележей, не доминируемых какими-либо другими дележами. «Разумность» *c*-ядра определяется тем его свойством, что оно состоит из всех дележей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, для которых

$$\sum_{i \in S} \alpha_i > v(S)$$

при любой коалиции $S$ (т. е. что в условиях дележа из ядра ни одна коалиция не является эффективной). Поэтому любая коалиция будет удовлетворена дележом, принадлежащим *c*-ядру, и не будет использовать своих собственных стратегических возможностей.

Ясно, что *c*-ядро является замкнутым ограниченным выпуклым множеством, содержащимся в любом решении игры. Однако для многих игр *c*-ядро оказывается пустым. Джиллис [2] показал, что для наличия у игры совпадающего с *c*-ядром решения достаточно, чтобы все значения характеристической функции игры были меньше чем $1/n$, где $n$ — число игроков. В дальнейшем этот результат был усилен О. Н. Бондаревой [1], которая начала систематически использовать в теории кооперативных игр аппарат линейного программирования.

**9.** Существенно иной подход к кооперативным играм был предложен Ауманом и Машлером в заметке [1], которая положила начало новому направлению в теории кооперативных игр. Этот подход основан на рассмотрении в известном смысле устойчивых исходов игры, к которым игроки приходят в результате переговоров при полном обмене информацией, угрозах, контругрозах и т. п. Множество получающихся при этом устойчивых исходов называется договорным множеством игры и может быть найдено в результате решения систем линейных неравенств. Основные факты складывающейся при этом теории см. в работе Аумана и Машлера [2]. Дальнейшие результаты содержатся в статьях Дэвиса и Маш-

лера [1] и Пелега [1]. Некоторые соображения об этом направлении теории игр см. в предисловии О. Моргенштерна к данной книге.

**10.** Исследования по кооперативной теории без трансферабельной полезности, но с побочными платежами немногочисленны. Первая попытка построения такой теории на описательном уровне была предпринята Шепли и Шубиком [1] (см. также § 10.4 книги Льюса и Райфы [1] и обзорную статью Аумана [2]).

**11.** Переход от классической кооперативной теории к теории игр без побочных платежей формально сводится к обобщению понятия характеристической функции (см. обзорную статью Аумана [2]).

Пусть $I$ — множество игроков, каждому из которых поставлена в соответствие координата евклидова пространства $E_I$. Для любой коалиции $S$ через $E_S$ обозначается координатное подпространство $E_I$, натянутое на координатные оси, соответствующие игрокам из $S$. Точки $E_S$ называются векторами выигрышей $S$.

Тот факт, что значение характеристической функции для данной коалиции $S$ было равно $v(S)$, в классической теории означал возможность для этой коалиции форсировать такой дележ, в котором сумма компонент, соответствующих игрокам из $S$, была не меньше чем $v(S)$. Геометрически это означает, что множество гарантированных для коалиции $S$ векторов выигрышей составляет полупространство

$$\sum_{i \in S} x_i \leqq v(S).$$

По существу, как раз наличие побочных платежей позволяет произвольным образом распределять всю сумму $v(S)$ между членами коалиции. При отказе от побочных платежей картина изменится именно в этом пункте.

Пусть $v(S)$ — множество векторов выигрышей, которые может обеспечить себе коалиция $S$. Это множество и будет называться значением характеристической функции для коалиции $S$. Естественно потребовать, чтобы характеристическая функция удовлетворяла следующим аксиомам:

$v(S)$ является выпуклым, замкнутым и непустым множеством (выпуклость отражает возможность смешивания стратегий, замкнутость — естественное свойство возможностей, а непустота — факт участия в игре).

Если $x \in v(S)$, $y \in E_S$ и $y \leqq x$, то $y \in v(S)$ (т. е. множество $v(S)$ имеет только «северо-восточную» границу; содержательно это достаточно естественно: способная на большее коалиция способна и на меньшее).

(3) Для непересекающихся коалиций $S$ и $T$

$$v(S) \times v(T) \subset v(S \cup T)$$

(это условие обобщает классическую аксиому супераддитивности характеристической функции: возможности объединения во всяком случае не уже, чем комбинации возможностей коалиций, действующих порознь).

Выделим теперь в $v(I)$ некоторую часть, примыкающую к ее «северо-восточной» границе, т. е. для которой выполняется следующее соотношение:

$$v(I) = \{x \in E_I \mid \text{существует вектор } y \in H, \text{ для которого } y \geqq x\}.$$

$H$ состоит из всех тех векторов выигрышей, которые допустимы по «внешним» обстоятельствам.

Пара $(v, H)$ и называется *игрой без побочных платежей.*

**12.** По аналогии с классическим случаем характеристическая функция дает основание для введения понятия дележа как вектора выигрышей, являющегося одновременно индивидуально и универсально рациональным. В данном случае эти условия рациональности применительно к вектору $x$ записываются соответственно как

$$x_i \geqq \max v(i);$$

Не существует вектора $y \in v(I)$, для которого $y > x$.

Понятие доминирования дележей переносится с классического случая на рассматриваемый почти буквально: дележ $x$ доминирует дележ $y$ относительно каолиции $S$, если $x \in v(S)$ и $x_i > y_i$ для каждого $i \in S$; дележ $x$ доминирует дележ $y$, если $x$ доминирует $y$ относительно некоторой коалиции.

Доминирование порождает понятия решения, ядра и т. д., а также всю относящуюся к ним проблематику. Так как возможности игр без побочных платежей существенно шире, чем возможности классических игр, построение многих «опровергающих» примеров оказывается более легким делом. Так, например, вопрос о всеобщей разрешимости игр без побочных платежей был решен в отрицательном смысле раньше, чем для классических кооперативных игр: как показал Стернс (см. стр. 9 обзорной статьи Аумана [2]), существует игра 7 лиц, не имеющая решения.

**13.** При воспроизведении игры без побочных платежей из ее нормальной, стратегической формы, кроме ее обычной характеристической функции (которую мы будем здесь обозначать через $v_\alpha$), описывающей векторы выигрышей, которые участники коалиции могут себе обеспечить, возникает еще другая функция, описывающая те векторы выигрышей, получению которых остальные игроки не могут воспрепятствовать. Эта вторая функция также удовлетворяет аксиомам характеристической функции и обозначается через $v_\beta$. Функции $v_\alpha$ и $v_\beta$ в известном смысле аналогичны максиминному и минимаксному выигрышам.

В классической кооперативной теории (т. е. при побочных платежах и трансферабельной полезности) обе функции $v_\alpha$ и $v_\beta$ совпадают. Иенч в своей единственной, но весьма содержательной работе [1] исследовал более широкие возможности совпадения функций $v_\alpha$ и $v_\beta$. Те игры, для которых $v_\alpha = v_\beta$, он называет *чистыми*, приводит примеры игр, не являющихся чистыми, и устанавливает, что для чистоты любой игры с данным множеством участников каждая коалиция должна обладать некоторой «социальной функцией полезности» для побочных платежей. Иенч замечает (не приводя доказательства), что к такой социальной функции полезности приводит предложенная Бернулли логарифмическая шкала индивидуальной полезности.

**14.** Как и в классическом случае, множественность дележей в решении (как и в ядре), а также множество самих решений в игре снижают нормативную ценность решения, и встает вопрос о выборе по каждой игре некоторого единственного дележа, который можно было бы достаточно обоснованно считать «справедливым». Для классической кооперативной теории таким дележом оказался вектор значений Шепли (см. II.6.3). Ему же в работе [7] удалось распространить соответствующее определение на случай игр без побочных платежей.

Ряд дальнейших результатов, касающихся игр без побочных платежей, а также обстоятельная библиография приводятся в обзорной статье Аумана [2].

## § 4. БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ И КОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

1. Как классическая кооперативная теория, так и теория игр без побочных платежей, по существу, имеют дело с поведением коалиции в условиях ее окружения, сводя большинство вопросов к антагонистической постановке или хотя бы к антагонистическим аналогиям. Ясно, что для более полного исследования игровых ситуаций нужны прежде всего более общие принципы разумного поведения игроков.

Решительный шаг в этом направлении был сделан Нэшем [2], распространившим основную идею принципа максимина на произвольные бескоалиционные игры. Его рассуждения сводятся к следующему.

Пусть
$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$$
— бескоалиционная игра (причем $I$ является множеством игроков, $S_i$ — множеством всех стратегий для каждого игрока $i$, а $H_i$ — его функция выигрыша). В качестве основного руководящего принципа поведения игроков в такой игре естественно принять следующий принцип осуществимости цели: действия игроков считаются разумными, если ситуация, являющаяся целью их совместных усилий, осуществима, т. е. если ни один из игроков не заинтересован в нарушении этой ситуации.

Более формально принцип осуществимости цели выглядит следующим образом.

Если $s$ — ситуация в игре $\Gamma$, а $s_i$ — произвольная стратегия игрока $i$, то через $s \| s_i$ обозначается ситуация, получаемая из ситуации $s$ в результате замены в ней имеющейся стратегии игрока $i$ на его стратегию $s_i$.

Ситуация $s^*$ в игре $\Gamma$ называется *приемлемой* для игрока $i$, если для любой его стратегии $s_i$ имеет место неравенство $H_i(s^* \| s_i) \geqq H_i(s^*)$. Ситуация называется *равновесной*, если она является приемлемой для каждого игрока.

Если понимать процесс игры как выбор игроками своих стратегий на основе предварительной договоренности, то именно в ситуациях равновесия и только в них каждый игрок не будет иметь побудительных мотивов к нарушению своих обязательств.

Нетрудно проверить, что если бескоалиционная игра $\Gamma$ оказывается антагонистической, то принцип осуществимости цели превращается в принцип максимина, а ситуации равновесия оказываются седловыми точками.

2. Хотя формально ситуации равновесия выполняют в теории бескоалиционных игр ту же роль, что и седловые точки в играх антагонистических, но нормативное их значение существенно меньше: знание игроком своих стратегий, входящих в ситуации равновесия, еще не обеспечивает ему возможности осуществлять оптимальный образ действий. Это понятно, так как неантагонистические игры, вообще говоря, не исчерпываются своим стратегическим аспектом.

В качестве примера можно привести неантагонистическую игру двух лиц, известную под названием «семейного спора». В ней каждый из игроков имеет по две чистых стратегии, а функции выигрыша описываются следующими таблицами:

| Выигрыши игрока 1 | Выигрыши игрока 2 |
|---|---|
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |

Очевидно, одновременный выбор игроками первых или вторых стратегий приводит к ситуациям равновесия. Таким образом, в данной игре равновесной является каждая чистая стратегия игрока (а также, между прочим, еще одна из смешанных).

Вместе с тем получающиеся ситуации равновесия здесь, очевидно, неравноправны: первый игрок явно должен предпочитать ситуацию равновесия, образованную первыми чистыми стратегиями, а второй игрок — вторыми. Очевидно, выбор той или другой из этих ситуаций равновесия может быть решен только в результате переговоров между игроками.

В этом примере мы снова сталкиваемся с нашим неумением сводить кооперативный аспект проблемы к стратегическому. Канонический выбор среди многих ситуаций равновесия произвольной игры является сложной проблемой. Интересные подходы к этому кругу вопросов содержатся в работах Харшаньи [1], а также Крелле и Кёнена [1].

3. Довольно общие принципы разумности договоров между игроками предложил Нэш в своей работе [2].

Каждый договор между двумя игроками приводит к получению ими некоторых выигрышей $r_1$ и $r_2$. Это значит, что каждый договор характеризуется парой чисел $(r_1, r_2)$ и может быть поэтому представлен точкой на плоскости. Предположим, что $R$ есть множество точек, соответствующих всевозможным договорам. Среди всех возможных исходов договоров выделяется один, к которому игроки приходят, когда попытка договориться не увенчивается успехом. В этом случае выигрышами игроков будут те количества, которые получаются игроками в одиночестве. Соответствующая такому исходу точка $r^0 = (r_1^0, r_2^0)$ иногда называется «статус-кво».

Пусть $F(R, r^0)$ — функция, определенная на множестве всех договорных схем, значениями которой являются векторы (пары) выигрышей. Эта функция определяет, какие выигрыши следует считать для игроков справедливыми в условиях каждой из договорных схем.

Согласно Нэшу, естественно потребовать, чтобы справедливая договорная схема удовлетворяла следующим аксиомам:

(1) Эффективность

$$F(R, r^0) \geqq r^0$$

(иными словами: договор справедлив, если каждый из договаривающихся от него не проигрывает).

(2) Симметрия: если множество $R$ расположено симметрично относительно биссектрисы координатного угла $r_1 = r_2$, а компоненты вектора $r^0$ равны, то и компоненты вектора $F(R, r^0)$ должны быть равны (при одинаковом положении в схеме игроки должны получать одинаковые выигрыши).

(3) Оптимальность по Парето: в договоре $F(R, r^0)$ оба игрока не могут одновременно увеличить свои выигрыши (это свойство договора скорее следует связать не с его справедливостью, а с его общей разумностью: разумный договор нельзя улучшить так, чтобы каждый из его участников увеличил свой выигрыш).

(4) Монотонность относительно области: если $R_1 \subset R_2$ и $F(R_2, r^0) \in R_1$, то $F(R_1, r^0) = F(R_2, r^0)$ (если в «широкой» договорной схеме справедливость требует выбора договора из более «узкой» схемы, то при переходе к узкой схеме сохранится старый справедливый договор).

(5) Инвариантность относительно начала отсчета и единиц измерения: при любых положительных $k_1$ и $k_2$

$$F\left(\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} R + r', \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} r^0 + r'\right) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} F(R, r^0) + r'$$

(эта аксиома, по существу, выражает линейность подразумеваемых функций полезности).

Сформулированная система аксиом является полной. Именно имеет место следующая теорема: *если функция* $F = (F_1, F_2)$ *удовлетворяет аксиомам* (1) — (5), *то*

$$(F_1(R, r^0) - r_1^0)(F_2(R, r^0) - r_2^0) = \max_{r=(r_1, r_2)\in R} (r_1 - r_1^0)(r_2 - r_2^0),$$

т. е. справедливым договором признается тот, при котором максимизируется произведение приращений выигрышей игроков по сравнению со статус-кво.

Подробный критический анализ этого круга вопросов содержится в книге Льюса и Райфы [1].

4. Существование ситуаций равновесия в любой конечной бескоалиционной игре (разумеется, вообще говоря, в смешанных стратегиях) было доказано Нэшем [1]. Это доказательство, как и первое доказательство фон Неймана [1] теоремы о минимаксе (естественным обобщением которой оно является), опирается на теорему Брауера о неподвижной точке. Однако, в отличие от теоремы о минимаксе, здесь едва ли можно надеяться на нахождение доказательства, опирающегося на достаточно элементарные и «достаточно эффективные» процедуры (вроде теоремы об отделимости выпуклых множеств). Дело в том, что, как показывают примеры, с увеличением числа игроков для нахождения компонент ситуаций равновесия приходится выполнять иррациональные операции все более высоких степеней.

Теорема Нэша поддается обобщению на случай бесконечных игр. Несколько весьма интересных примеров теорем такого рода содержится в книге Бургера [1].

5. Обычно в бескоалиционных играх принимается, что игроки могут в качестве смешанных стратегий применять любое вероятностное распределение на множестве чистых стратегий. У Вень-цзюн [2] рассматривает игры, в которых множество чистых стратегий каждого игрока задано вместе с некоторым своим покрытием, причем допускаются только такие смешанные стратегии, в которые входят только такие чистые стратегии, которые принадлежат одному и тому же элементу покрытия. Такие игры он называет *играми с ограничениями.* В играх с ограничениями равновесными ситуациями считаются те ситуации $\sigma$, в которых $H_i(\sigma \| s_i) \leqq H_i(\sigma)$ для всех $i$ и всех тех чистых стратегий $s_i$, которые принадлежат элементу покрытия, $\sigma_i$-вероятность которого равна единице. Используя весьма тонкие топологические рассуждения, У Вень-цзюн установил, что достаточным условием существования ситуаций равновесия в играх с ограничениями является, во-первых, связность нервов покрытий множеств стратегий всех игроков и, во-вторых, неравенство нулю их характеристики Эйлера — Пуанкаре.

6. Никаких общих методов нахождения ситуаций равновесия в бескоалиционных играх пока не известно.

Алгорифм для численного решения биматричных игр был указан Н. Н. Воробьевым [1] и затем усовершенствован Куном [2]. Более практичный, но не столь полный алгорифм принадлежит Лемке и Хаусону [1].

Бесконечные бескоалиционные игры удается решать лишь в отдельных, весьма немногочисленных случаях. К их числу принадлежит весьма интересный пример игры «олигополистов», приводимый в книге Бургера [1].

По существу, к бескоалиционным играм относится теория справедливого дележа, выросшая из старинной задачи о разделе имущества, проводимого по принципу «один делит — другой выбирает». Впервые с теоретико-игровой точки зрения к этой задаче подошел Штейнгауз (см. сообщения Кнастера и Штейнгауза [1]). Последние результаты в этом направлении содержатся в статье Куна [3].

**7.** Каждой игре присущ некоторый набор полезностей, за обладание которыми ведут борьбу игроки. В классической кооперативной теории (с трансферабельной полезностью) такая полезность была единой для всех игроков. В теории бескоалиционных игр этих полезностей имеется ровно столько, сколько игроков, и каждый игрок имеет свою собственную полезность, описываемую его функцией выигрыша. Естественное и вполне актуальное обобщение, допускающее разнообразные интерпретации, состоит в том, что каждому виду полезности, фигурирующему в качестве целей игроков, соответствует некоторое (очевидно, непустое) множество игроков, причем один игрок может, вообще говоря, быть заинтересованным в различных полезностях. Множество всех игроков, ведущих борьбу в направлении максимизации одной и той же полезности, является коалицией (именно коалицией интересов). Выигрыш каждой коалиции считается принадлежащим ей как таковой и не подлежащим какому-либо разделению между членами коалиции. Ясно, что различные коалиции могут и пересекаться.

Наряду с коалициями интересов в играх встречаются еще и коалиции действия, участники которых могут обмениваться информацией по выбору совместной коалиционной стратегии и, в частности, предпринимать коррелированные рандомизированные действия. Рассмотрение таких совместных рандомизированных действий пересекающихся коалиций осложняется тем, что действия различных групп игроков должны быть согласованными, а это может оказаться препятствием к вероятностной интерпретации смешанных действий. Поэтому «комплекс коалиций» не может быть произвольным, а должен подчиняться некоторым комбинаторным условиям.

Естественное распространение принципа осуществимости цели на коалиционные игры приводит к рассмотрению устойчивых ситуаций, в которых некоторые группы игроков не заинтересованы в отклонении от своих запланированных действий, даже если те или иные их партнеры по коалициям нарушат свои первоначально взятые обязательства.

В частности, если правилами игры не предусмотрена какая-либо «реакция» игроков на нарушения обязательств их партнеров по коалициям, т. е. если игра фактически превращается в бескоалиционную, то описанные устойчивые ситуации превращаются в равновесные ситуации в смысле Нэша (см. III.4.1).

Существование такого рода устойчивых ситуаций доказано в статье Н. Н. Воробьева [5].

## § 5. ДИНАМИЧЕСКИЕ ИГРЫ

**1.** Использование смешанных стратегий в качестве оптимальных решений, распространение теоремы о минимаксах на различные классы бесконечных игр, связь матричных игр с линейным программированием — все это на первых порах заслонило, быть может, даже более глубокие идеи, содержащиеся в монографии фон Неймана и Моргенштерна: теорию позиционных игр и кооперативную теорию. Достаточно сказать, что до появления в 1953 г. сборника [3] к этим вопросам никто не возвращался.

(Больше того, в относящейся к 1950 г. книге Вальда «Статистические решающие функции» теоретико-игровая сторона вопроса была представлена играми в нормальной форме, несмотря на всю «позиционность» проблемы по существу.)

Заметим сразу же, что эти вопросы после выхода в свет монографии фон Неймана и Моргенштерна находились в совершенно различных состояниях. Кооперативная теория была разработана весьма глубоко: ее результаты касались узловых вопросов теории, а некоторые частные случаи были разобраны с исчерпывающей подробностью. Теория же позиционных игр ограничивалась громоздкой системой определений да теоремой об играх с полной информацией (известной к тому же в своих основных чертах со времен работы Цермело [1] о шахматах).

2. Тем больший интерес представляет работа Куна [1]. Прежде всего, в ней было сформулировано естественное и прозрачное определение позиционной игры, в том числе четко определены стратегии игроков как функции на множествах их информационных состояний (а содержательно — на семействах множеств позиций, неразличимых для игрока в соответствующий момент; эти множества позиций называются *информационными множествами*). Кроме того, в этой работе было выяснено «внутреннее» строение той неопределенности, с которой приходится иметь дело игроку в позиционной игре. В качестве такого «атома» неопределенности Кун выбирает факт перекрывания одним информационным множеством другого. Содержательно перекрывание информационным множеством $V$ информационного множества $U$ означает, что находящийся в множестве $U$ игрок не знает одновременно, находилась ли ранее игра в множестве $U$ и какое решение было в $U$ принято (очевидно, тем из игроков, чья очередь хода была в $U$). Очевидно, в играх с полной информацией, в которых каждое информационное множество состоит из единственной позиции, никакие информационные множества друг друга не перекрывают.

3. Чем «больше» перекрываний имеется среди информационных множеств в игре, тем «бóльшим» оказывается, вообще говоря, необходимое смешивание в оптимальных (или, если речь идет об общих бескоалиционных играх, в равновесных) стратегиях. Так, если игрок имеет полную память, т. е. если его собственные информационные множества не перекрывают друг друга, то игрок может ограничиться стратегиями поведения, т. е. такими смешанными стратегиями, в которых его действия смешиваются в различных информационных множествах независимо. Дальнейшее развитие этих идей содержится в статьях Томпсона [1] и Н. Н. Воробьева [2, 6].

В каждой позиционной игре существенную роль играет множество позиций с указанием возможных переходов от одних позиций к другим, т. е. некоторый объект, изучаемый теорией графов. Систематическое рассмотрение комбинаторного аспекта в позиционных играх заставляет применять терминологию и методы теории графов. Весьма большое число результатов теории игр было изложено с этих позиций Бержем в его книге [1].

Расщепление информационного множества на более мелкие информационные множества содержательно означает увеличение информации, которой располагают игроки, а формально — расширение множества их стратегий. В частности, при полном расщеплении информационных множеств до однопозиционных в полученном расширенном множестве стратегий будут содержаться оптимальные (соответственно равновесные) стратегии. Ясно, что полное расщепление для существования чистых

оптимальных стратегий является достаточным, но не необходимым. Необходимые условия такого расщепления были указаны Берчем [1].

В идущей от статьи Куна [1] теории позиционных игр принимается, что информационные множества не должны «предшествовать сами себе», т. е. что игрок не должен на протяжении одной партии принимать дважды решение в одном и том же информационном состоянии. Это ограничение представляется не вполне естественным и потому несколько стеснительным. Исбелл [1] положил начало теории «финитарных» игр, которые этим условием не ограничены.

**4.** На первый взгляд теорема о существовании ситуаций равновесия в чистых стратегиях для игр с полной информацией представляется весьма общим фактом, поддающимся широким обобщениям. Однако Гейл и Стюарт [1] привели пример позиционной игры (разумеется, бесконечной) с полной информацией, в которой игроки не имели чистых оптимальных стратегий. Этот пример показал, что теория бесконечных позиционных игр с полной информацией является весьма сложной. Дальнейшие результаты в этом направлении принадлежат Вульфу [1], Окстоби [1], Ханани [1], Э. Д. Стоцкому [1], Дэвису [1], Мыцельскому [1] и др.

Вместе с тем весьма прямолинейное использование аксиомы выбора при построении этого примера давало основания предполагать, что он принадлежит к числу парадоксов, порождаемых применением этой аксиомы. Последовательным развитием такой точки зрения занялись Штейнгауз и Мыцельский [1]. Они приняли полную определенность антагонистической игры с полной информацией за самостоятельную аксиому теории множеств (в ее абстрактной формулировке, очевидно, можно обойтись без теоретико-игровой терминологии), назвав ее *аксиомой определенности*. Интуитивный смысл этой аксиомы состоит в том, что для абсолютно осведомленных в правилах и тонкостях игры участников исход партии предопределен. Такая игра должна по существу быть чисто комбинаторной. Ясно, что аксиома определенности противоречит примеру Гейла — Стюарта. В действительности она противоречит примененной при построении этого примера аксиоме выбора. Однако в известной мере аксиома определенности способна также и заменять аксиому выбора. Мыцельский показал [2], что большое число следствий аксиомы выбора удается доказать на основе аксиомы определенности и без использования аксиомы выбора. В частности, в его работе, написанной совместно со Сверчковским [1], из аксиомы определенности выводится измеримость по Лебегу любого линейного множества. Дальнейшее изучение игр с полной информацией в этом направлении было проведено Мыцельским в статье [1].

**5.** В позиционных играх выигрыши выплачиваются игрокам лишь в окончательных позициях партии. Поэтому, говоря формально, сравнивать между собой игроки могут только окончательные позиции. Однако (если говорить для определенности об антагонистических играх) пребывание игрока в любой позиции уже предопределяет некоторый его выигрыш, которым можно измерять ценность самой позиции. Таким образом, переход игры из позиции в позицию может означать для игроков приобретение некоторых временных преимуществ, которые вполне могут быть утрачены при дальнейшей неоптимальной игре. В связи со сказанным целесообразно рассматривать такие игры, в которых непосредственная борьба ведется за те или иные позиции игры, которые оказываются своеобразными ресурсами игроков в ходе их дальнейшей борьбы. Применительно к шахматам такой подход детально развивает М. М. Ботвинник [1].

В литературе рассматривалось довольно много игр такого рода. Одной из наиболее общих представляется схема рекурсивной игры, введенная Эвереттом [1].

Партия рекурсивной игры состоит из последовательности элементарных (например, матричных) игр, причем исходом каждой элементарной игры является снова элементарная игра либо окончание всей игры, сопровождающееся расплатой. Говоря точнее, если в какой-то момент игралась элементарная игра $\Gamma^k$, причем игроки выбрали стратегии $i$, $j$, то с некоторыми определенными вероятностями (зависящими от выбранных стратегий) в следующий момент будет играться некоторая элементарная игра $\Gamma^l$ из того же набора или же вся партия закончится. Оказывается, если элементарные игры имеют значения, то и рекурсивные игры имеют значения в стационарных стратегиях и тем самым $\varepsilon$-оптимальные стационарные стратегии при любом $\varepsilon > 0$.

**6.** Близкими к рекурсивным играм являются игры на выживание, исследованные Милнором и Шепли [1]. В таких играх в каждый момент времени игроки обладают соответственно ресурсами $r$ и $R - r$ $(0 < r < R)$ и играют в матричную игру $\| a_{ij} \|$. Выигрыши в этой игре присоединяются к ресурсам игроков, с которыми они вступают в игру в следующий момент. Игра заканчивается при исчерпании всех ресурсов одного из игроков, причем победитель получает единицу (размерность которой, вообще говоря, никак не связана с размерностью ресурсов).

Если такая игра имеет значение, то оно является функцией начального количества ресурсов $r_0$ у игрока 1, которая есть монотонное решение функционального уравнения $\varphi(r) = \operatorname{val} \| \varphi(r + a_{ij}) \|$ при граничных условиях $\varphi(r) = 0$ для $r \leqq 0$ и $\varphi(r) = 1$ для $r \geqq R$.

Обобщение этой игры получается при переходе от матричных игр к произвольным бескоалиционным играм или, что, по существу, близко, к векторным ресурсам. Такого рода игры рассматривал И. В. Романовский [1].

Сходными с играми на выживание являются игры на истощение, о которых см. статью Исбелла и Марлоу [1].

**7.** Новые трудности принципиального характера возникают при переходе к изучению динамических игр, в которых принятие решений игроками происходит не в дискретные моменты времени, а является непрерывным во времени процессом. Основным изучавшимся классом таких игр являются *дифференциальные игры*.

Дифференциальная игра схематически может быть описана следующим образом. Пусть заданы связное ограниченное подмножество $A$ конечномерного евклидова пространства, начальная точка $x^0$ и система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \ldots, x_n;\ t,\ \varphi,\ \psi), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Здесь переменные $x_j$ называются переменными состояния (или фазовыми координатами), а $\varphi$ и $\psi$ — управляющими переменными (соответственно для первого и второго игрока), которые выбираются игроками из некоторого заранее заданного множества функций, зависящих от временного параметра $t$ и от переменных состояния. Если выбор функций $\varphi$ и $\psi$ приводит к разрешимости системы дифференциальных уравнений, то партия игры реализуется в виде некоторой траектории в множестве $A$. На множестве всех траекторий определяется функция выигрыша. Обычно считается, что игра заканчивается с выходом траектории на границу $A$,

и выигрыши задаются в точках границы. Если траектория бесконечное время остается внутри $A$, то на ней также определяется некоторый выигрыш.

В приведенном определении обращает на себя внимание некоторая нечеткость в определении множеств стратегий игроков: для того чтобы некоторые функции $\varphi$ и $\psi$ были стратегиями, очевидно, необходимо, чтобы при подстановке этих $\varphi$ и $\psi$ в (5) получалась система дифференциальных уравнений, имеющая единственное решение.

Типичным примером дифференциальной игры является игра «преследования», в которой фазовые координаты определяют положения (а иногда и скорости) нескольких объектов, из которых одни называются преследователями, а другие — преследуемыми. Каждый игрок управляет координатами подчиненных ему объектов. Игра заканчивается в заранее указанный момент, причем выигрыш преследователей определяется «близостью» преследующих объектов к преследуемым в момент окончания игры. (Первая математическая постановка игры преследования принадлежит Вармусу [1].)

В качестве другого примера можно указать на игру «перетягивания», в которой два игрока прилагают к некоторой материальной точке силы, стремясь придать ей к концу игры желательные фазовые координаты. Очевидно, игры преследования можно рассматривать как частный случай игр «перетягивания» (в соответствующем фазовом пространстве).

Систематическое рассмотрение как отдельных примеров игр такого рода, так и общих теоретических соображений было предпринято Айзексом еще в начале 50-х годов. Его первые работы были изложены в неопубликованных Меморандумах корпорации РЭНД в 1954 и 1955 гг., а подробное изложение полученного материала было напечатано в виде монографии [1]. Свои результаты Айзекс фактически получает применением принадлежащего Беллману метода динамического программирования и поэтому сталкивается со всеми теми трудностями, которые этому методу присущи. Дальнейшие результаты на этом пути получил Л. А. Петросян [1, 2].

Более тонкий и мощный подход содержится в работах Л. С. Понтрягина [1]. Этот подход основан на рассуждениях, близких к тем, которые приводят к принципу максимума. При этом решение дифференциальной игры сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предпринимались попытки свести решение дифференциальной игры к решению игры с дискретным временем с последующим предельным переходом. Здесь следует назвать работы Скарфа [1] и Флеминга [1, 2, 3].

Обстоятельные исследования дифференциальных игр, основанные на использовании аппарата и результатов вариационного исчисления, были проведены Флемингом и Берковицем [1] и Берковицем [1].

Весьма подробные обзоры работ по теории дифференциальных игр содержатся в статьях Симаковой [1], а также Зеликина и Симаковой [1].

Октябрь 1967 г.

# БИБЛИОГРАФИЯ

Список сборников, содержащих часть статей, указанных в библиографии, помещен в конце библиографии. Там же приводится указатель соавторов.


Айзекс (Isaaks R.)
[1] Differential games, J. Wiley, N.Y., 1965. Рус. пер.: Дифференциальные игры, «Мир», М., 1967.
Ауман (Aumann R. J.)
[1] Linearity of unrestrictedly transferable utilities, Nav. Res. Log. Quart. **7** (1960), № 3, 281—284.
[2] A survey of cooperative games without side payments, Сборн. [14], 3—27.
Ауман, Машлер (Aumann R. J., Maschler M.)
[1] An equilibrium theory for $n$-person games cooperative, Amer. Math. Soc. Notices 8 (1961), 261.
[2] The bargaining set for cooperative games, Сборн. [13], 443—476.
Бак (Buck R. C.)
[1] Preferred optimal strategies, Proc. Amer. Math. Soc. № 2 (1958), 312—314. Рус. пер.: Предпочтительные оптимальные стратегии, Сборн. [12], 133—136.
Баутон (Bouton C. L.)
[1] Nim, a game with a complete mathematical theory, Ann. Math., Princeton 2, № 3 (1902), 35—39.
Баше де Мезирак (Bachet de Méziriac)
[1] Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres, Lyon, 1612.
Берж (Berge C.)
[1] Théorie générale des jeux à $n$ personnes, Paris, Gauthier-Villars, 1957. Рус. пер.: Общая теория игр нескольких лиц, Физматгиз, М., 1961.
Берковиц (Berkovitz D.)
[1] A variational approach to differential games, Сборн. [13], 127—174.
[2] A differential game without pure strategy solutions on an open set, Сборн. [13], 175—194.
Берковиц, Флеминг (Berkovitz D., Fleming W. H.)
[1] On differential games with integral payoff, Сборн. [6], 413—435.
Бертран (Bertrand J.)
[1] Calcul des probabilités, Paris, 1888.
Берч (Birch B. J.)
[1] On games with almost complete information, Proc. Cambridge Phil. Soc. **51**, № 2 (1955), 275—287. Рус. пер.: Об играх с почти полной информацией, Сборн. [16], 72—93.
Блекуэлл, Гиршик (Blackwell D., Girshick M. A.)
[1] Theory of games and statistical decisions, London, 1954. Рус. пер.: Теория игр и статистических решений, М., ИЛ, 1958.
Бондарева О. Н.
[1] Некоторые применения методов линейного программирования и теории кооперативных игр, Проблемы кибернетики, **10** (1963), 119—139.
Боненбласт, Карлин, Шепли (Bohnenblust H. F., Karlin S., Shapley L. S.)
[1] Solutions of discrete two-person games, Сборн. [1], 51—72. Рус. пер.: Решение дискретных игр двух лиц, Сборн. [10], 17—44.
Борель (Borel E.)
[1] La théorie du jeu et les équations intégrales a noyau symétrique, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **173** (1921), 1304—1308. Англ. пер.: The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels, Econometrica **21**, № 1 (1953), 97—100.
[2] Sur les jeux ou interviennent l'hasard et l'habileté des joueurs, Théorie des probabilités, Paris, 1924, 204—224. Англ. пер.: On games that involve chance and the skill of the players, Econometrica **21**, 1 (1953), 101—115.
[3] Sur les systemes de formes linéaires a déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **184** (1927), 52—53.

Англ. пер.: On systems of linear forms of skew symmetric determinant and the general theory of play, Econometrica **21**, 1 (1953), 116—117.

Ботвинник М. М.
[1] Алгоритм игры в шахматы, «Наука», М., 1968.

Ботт (Bott R.)
[1] Symmetric solutions to majority games, Сборн. [3], 319—324.

Браун, фон Нейман (Brown G. W., von Neumann J.)
[1] Solutions of games by differential equations, Сборн. [1], 73—79.

Бургер (Burger E.)
[1] Einführung in die Theorie der Spiele, W. de Gruyter, Berlin, 1959.

Вальд (Wald A.)
[1] Generalization of a theorem by v. Neumann concerning zero sum two-person games, Ann. Math. 52 (1950), 739—742.
[2] Statistical decision functions, New York, 1950. Рус. пер.: Статистические решающие функции, Сборн. [16], 300—522.

Вармус (Warmus M.)
[1] Un théoreme sur la poursuite, Compte-rendus de la société Polonaise de mathematique, t. XIX (1946), séance 17.V.1946, Cracovie, Imprimerie de l'Université, 1947.

Вилкас Э. И.
[1] Аксиоматическое определение значения матричной игры, Теория вероятн. и ее примен. 8, № 3 (1963), 324—327.

Вилль (Ville J.)
[1] Sur la théorie générale des jeux ou intervient l'habilité des joueurs, Traite du calcul des probabilités et de ses applications, Applications des jeux de hasard, E. Borel et collab., Paris, Gauthier-Villars, 1938, v. IV, fasc. 2, 105—113.

Винер (Wiener N.)
[1] The human use of human being. Cybernetics and society, Eyre and Spottiswood, London, 1950. Рус. пер.: Кибернетика и общество, М., ИЛ, 1958.

Воробьев Н. Н.
[1] Ситуации равновесия в биматричных играх, Теория вероятн. и ее примен. 3, № 3 (1958), 318—331.
[2] Расчлененные стратегии в позиционных играх, Проблемы кибернетики **7** (1963), 5—20.
[3] Некоторые методологические проблемы теории игр, Вопросы философии, **1** (1966), 93—103.
[4] Игры с не полностью известными правилами, Международный конгресс математиков 1966 г., Тезисы кратких научных сообщений, Секция 13, стр. 15.
[5] Коалиционные игры, Теория вероятн. и ее примен. **12**, № 2 (1967), 289—306.
[6] Редуцированные стратегии в позиционных играх, Сборн. [16], 94—113.
[7] Применения теории игр в технических науках, IV Internationaler Kongress über Anwendungen der Mathematik in den Ingeneurwissenschaften, Weimar, 1967, Bd. 1, 411—422.
[8] Художественное моделирование, конфликты и теория игр, в сб. «Содружество наук и тайны творчества», «Искусство», М., 1968, 348—372.

Вульф (Wolfe P.)
[1] Determinateness of polyhedral games, Сборн. [5]. Рус. пер.: Определенность полиэдральных игр, Сборн. [8], 298—301.
[2] The strict determinateness of certain infinite games, Pacific J. of Math., 5 (1955), 891—897.

Гай, Смит (Guy R. K., Smith C. A. B.)
[1] The *G*-values of various games, Proc. Cambridge Phil. Soc. 52, № 3 (1956), 514—526.

Гальмарино (Galmarino A. R.)
[1] On the cardinality of solutions of four-person constant-sum games, Сборн. [13], 327—344.

Гейл (Gale D.)
[1] The theory of linear economic models, McGraw-Hill book Co., New York, 1960. Рус. пер.: Теория линейных экономических моделей, ИЛ, М., 1963.

Гейл, Гросс (Gale D., Gross O.)
[1] A note on polynomial and separable games, Pacific J. Math., № 4 (1958), 735—741. Рус. пер.: Заметка о полиномиальных и вырожденных играх, Сборн. [12], 195—204.

Гейл, Кун, Таккер (Gale D., Kuhn H. W., Tucker A. W.)
[1] Linear programming and the theory of games, Сборн. [2], 317—329.

Гейл, Стюарт (Gale D., Stewart F. M.)
[1] Infinite games with perfect information, Сборн. [3], 245—266.
Гейл, Шерман (Gale D., Sherman S.)
[1] Solutions of finite two-person games, Сборн. [1], 37—49. Рус. пер.: Решения конечных игр двух лиц, Сборн. [10], 45—61.
Гранди (Grundy P. M.)
[1] Mathematics and games, Eureka 2 (1939), 6.
Гранди, Смит (Grundy P. M., Smith C. A.)
[1] Disjunctive games with the last player loosing, Proc. Cambridge Phil. Soc. 52 (1956), 52—77.
Гюйгенс (Huygens Ch.)
[1] De ratiosiniis in ludo aleae, Ouvres completes, t. 5, 35—47, La Haye, Den Haag, 1925.
Данциг (Dantzig G. B.)
[1] Linear programming and extensions, Princeton, 1963. Рус. пер.: Линейное программирование, его обобщения и применения, «Прогресс», М., 1966.
[2] A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem, Сборн. [2], 330—335.
[3] Maximisation of a linear function of variables subject to linear inequalities, Сборн. [2], 339—347.
Джиллис (Gillies D. B.)
[1] Discriminatory and bargaining solutions to a class of symmetric $n$-person games, Сборн. [3], 325—342.
[2] Solutions to general non-zero-sum games, Сборн. [7], 47—86.
Джиллис, Мейберри, Нейман (Gillies D. B., Mayberry J. P., von Neumann J.)
[1] Two variants of poker, Сборн. [1], 13—50.
Дрешер (Dresher M.)
[1] Games of strategy, Theory and applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1961, Рус. пер.: Стратегические игры. Теория и приложения, «Советское радио», М., 1964.
Дрешер, Карлин (Dresher M., Karlin S.)
[1] Solution of convex games as fixed points, Сборн. [3], 75—86. Рус. пер.: Решение выпуклых игр методом неподвижных точек, Сборн. [12], 180—194.
Дрешер, Карлин, Шепли (Dresher M., Karlin S., Shapley L. S.)
[1] Polynomial games, Сборн. [1], 161—180. Рус. пер.: Полиномиальные игры, Сборн. [12], 154—179.
Дубинс, Сэвидж (Dubins L., Savage L.)
[1] How to gamble if you must, Inequalities for stochastic process, McGraw-Hill, N.Y, 1965.
Дэвис (Davis M.)
[1] Infinite games of perfect information, Сборн. [13], 85—101.
Дэвис, Машлер (Davis M., Mashler M.)
[1] Existence of stable payoff configurations for cooperative games, Сборн. [14], 39—52.
Зеликин М. И., Симакова Э. Н.
[1] Обзор некоторых результатов по теории дифференциальных игр. Приложение к книге Айзекса [1], стр. 457—472.
Иенч (Jentzsch G.)
[1] Some thoughts on the theory of cooperative games, Сборн. [13], 407—442.
Исбелл (Isbell J. R.)
[1] A class of game solutions, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, № 3 (1955), 346—348.
[2] Finitary games, Сборн. [6], 79—96. Рус. пер.: Финитарные игры, Сборн. [16], 132—154.
[3] Homogenous games, III, Сборн. [13], 255—266.
Исбелл, Марлоу (Isbell J. R., Marlow W. H.)
[1] Attrition games, Naval. Res. Log. Quart. **3**, № 1, 2 (1956), 71—94.
Калиш (Kalisch G. K.)
[1] Generalized quota solutions of $n$-person games, Сборн. [7], 163—178.
Калиш, Милнор, Нэш, Неринг (Kalish G. K., Milnor J., Nash J., Nering E. D.)
[1] Some experimental games, Сборн. [4], 301—328.
Калиш, Неринг (Kalish G. K., Nering E. D.)
[1] Countably infinitely many person games, Сборн. [7], 43—46.

Кальмар (Kalmár L.)
[1] Zur Theorie der abstrakten Spiele, Acta Sci. Mathem. Szeged, t. IV (1928—29), 65—85.
Карлин (Karlin S.)
[1] Operator treatment of minimax principle, Сборн. [1], 133—154. Рус. пер.: Операторное истолкование принципа минимакса, Сборн. [12], 47—76.
[2] Reduction of certain classes of games to integral equations, Сборн. [3], 125—158. Рус. пер.: Сведение некоторых классов игр к интегральным уравнениям, Сборн. [12], 249—294.
[3] Mathematical methods and theory in games, programming and economics, Pergamon press, London — Paris, 1959. Рус. пер.: Математические методы в теории игр, программировании и экономике, «Мир», М., 1964.
Кёниг (König D.)
[1] Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche, Acta Sci. Mathem. Szeged, t. III (1927), 121—130.
Кнастер, Штейнгауз (Knaster B., Steinhaus H.)
[1] Knaster B., Sur le problème du partage pragmatique de H. Steinhaus; Steinhaus H., Remarques sur le partage pragmatique, Comptes — rendus de la société Polonaise de mathematique, t. XIX (1946), séance 15.II.1946, Cracovie, Imprimerie de l'Université, 1947.
Крелле, Кёнен (Krelle W., Coenen D.)
[1] Das nichtkooperative Nichtnullsummen-Zwei-Personen-Spiel, I, Unternehmensforschung 9, № 2 (1965), 57—79; II, Unternehmensforschung 9, № 3 (1965), 137—163.
Кун (Kuhn H. W.)
[1] Extensive games and the problem of information, Сборн. [3], 193—216. Рус. пер.: Позиционные игры и проблема информации, Сборн. [16], 13—40.
[2] An algorithm for equilibrium points in bimatrix games, Proc. Nat. Acad. Sci. **47** (1961), 1657—1662.
[3] On games of fair division, Сборн. [14], 29—38.
Кун, Таккер (Kuhn H. W., Tucker A. W.)
[1] Linear programming and the theory of games, Сборн. [2].
[2] John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), von Neumann memorial supplement (3, p. 2), 100—122.
Лаплас (Laplace P. S.)
[1] Essai philosophique sur les probabilités, Paris, Рус. пер.: Опыт философии теории вероятностей, М., 1908.
Лемке, Хаусон (Lemke C. E., Howson J. T.)
[1] Equilibrium points of bi-matrix games, SIAM **12**, № 2 (1964), 413—423.
Льюкас (Lucas W. F.)
[1] A game with no solution, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., Memorandum RM-5518, October 1967.
Льюс (Luce R. D.)
[1] A note on the article «Some experimental $n$-person games», Сборн. [7], 279—285.
Льюс и Райфа (Luce R. D., Raiffa H.)
[1] Games and decisions. Introduction and critical survey. J. Wiley, N.Y., 1957. Рус. пер.: Игры и решения, М., ИЛ, 1961.
Майстров Л. Е.
[1] Роль азартных игр в возникновении теории вероятностей, Acta Universitatis Debreceniensis, t. VII, № 2 (1961).
[2] Элементы теории вероятностей у Галилея, Вопросы истории естествознания и техники, вып. 16 (1964), 94—98.
Мак-Кинси (McKinsey J. C. C.)
[1] Introduction to the theory of games, McGraw-Hill, N.Y., 1952. Рус. пер.: Введение в теорию игр, Физматгиз, М., 1960.
Машлер (Mashler M.)
[1] Stable payoff configurations for quota games, Сборн. [13], 477—499.
[2] Playing an $n$-person game, an experiment, Econometr. Res. Progr. Res. Memor., № 73 (1965), 109 pp.
Машлер, Пелег (Mashler M., Peleg B.)
[1] A characterization, existence proof and dimension bounds for the kernel of a game, Pacific J. Math. **18**, № 2 (1966), 289—328.
Миллс (Mills W. H.)
[1] The four-person game — finite solutions on the face of the cube, Сборн. [7], 125—144.

Милнор, Шепли (Milnor J., Shapley L. S.)
[1] On games of survival, Сборн. [6], 15—45.
Минковский (Minkowski H.)
[1] Über die Theorie der einfachen Ungleichungen, Journ. für die reine u. angew. Math. 124 (1901).
Мур (Moore E. H.)
[1] A generalization of the game called Nim, Ann. Math. 11 (1909), 93.
Мыцельский (Mycielski J.)
[1] Continuous games with perfect information, Сборн. [13], 103—111.
[2] On the axiom of determinateness, Fund. Math. 53, № 2 (1964), 205—224.
Мыцельский, Сверчковский (Mycielski J., Swierczkowski S.)
[1] On the Lebegue mesurability and the axiom of determinateness, Fund. Math. 54, 1 (1964), 67—71.
Мыцельский, Штейнгауз (Mycielski J., Steinhaus H.)
[1] A mathematical axiom contradicting the axiom of choice, Сборн. [9], 171—173; см. Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Math., Astr., Phys. 10 (1962), 1—3.
Нейман, Пирсон (Neyman J., Pearson E.)
[1] On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses, Phyl. Trans. Roy. Soc. A-231 (1933), 289—237.
Фон Нейман (von Neumann J.)
[1] Zur Theorie der Gesellschaftspiele, Math. Ann. 100, 295—320. Рус. пер.: К теории стратегических игр, Сборн. [10], 173—204.
[2] A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignement problem, Сборн. [3], 5—12. Рус. пер.: Об одной нулевой игре двух лиц, эквивалентной задаче оптимального назначения, Сборн. [10], 145—155.
[3]. Communication on the Borel notes, Econometrica 21, № 1 (1953), 124—125.
[4] A numerical method to determine optimum strategy, Naval. Res. Log. Quart. 1 (1954), 109—115.
Нэш (Nash J. F.)
[1] The bargaining problem, Econometrica 18 (1950), 155—162.
[2] Non-cooperative games, Ann. Math. 54 (1951), 286—295. Рус. пер.: Бескоалиционные игры, Сборн. [10], 205—221.
Окстоби (Oxtoby J. C.)
[1] The Banach-Mazur game and Banach category theorem, Сборн. [6], 159—163.
Оуэн (Owen G.)
[1] The tensor composition of nonnegative games, Сборн. [13], 307—326.
Пелег (Peleg B.)
[1] Existence theorem for the bargaining set $M_1^{(i)}$, Сборн. [14], 53—56.
Петросян Л. А.
[1] Об одном семействе дифференциальных игр на выживание в пространстве $R^n$, ДАН СССР 161, № 1 (1965).
[2] Дифференциальные игры на выживание со многими участниками, ДАН СССР 161, № 2 (1965).
Понтрягин Л. С.
[1] К теории дифференциальных игр, УМН, т. XXI, № 4 (130) (1966), 219—274.
Рапопорт, Орвант (Rapoport A., Orwant C.)
[1] Experimental games: a review, Behavioral Science 7, No 1 (1962).
Рестрепо (Restrepo R.)
[1] Tactical problems involving several actions, Сборн. [6], 313—335.
Ричардсон (Richardson M.)
[1] Extension theorems for solutions of inflexive relations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39 (1953), 649—655.
[2] Solutions of irreflexible relations, Ann. Math. 58 (1953), 573—590.
[3] Relativization and extension of solutions of irreflexible relations, Pacific J. Math. 5, № 4 (1955), 551—584.
[4] On finite projective games, Proc. Amer. Math. Soc. 7, № 3 (1956), 458—465.
Робинсон (Robinson J.)
[1] An iterative method of solving a game, Ann. Math. 54, № 2 (1951), 296—301. Рус. пер.: Итеративный метод решения игр, Сборн. [10], 110—117.
Романовский И. В.
[1] Случайные блуждания игрового типа. Теория вероятн. и ее примен. 6, № 4 (1961), 426—429.
Сакагучи (Sakaguchi M.)
[1] Values of strategic information, Rep. Stat. Appl. Res., JUSE 6, № 1 (1959), 5—12.

Симакова Э. Н.
[1] Дифференциальные игры, Автоматика и телемеханика, т. II (1966), 161—178.
Скарф (Scarf H. E.)
[1] On differential games with survival payoff, Сборн. [6], 393—405.
Соболев А. И.
[1] Об игре Бореля, Теория вероятн. и ее примен. 0(1970).
Стоцкий Э. Д.
[1] О дескриптивной теории игр, Проблемы кибернетики 8 (1962), 45—54.
Таккер (Tucker A. W.)
[1] Solving a matrix game by linear programming, IBM J. Res. Develop. 4, № 5 (1960), 507—517.
Томпсон (Thompson G. L.)
[1] Signalling strategies in $n$-person games, Сборн. [3], 267—277.
Томпсон, Томпсон (Thompson D. M. and Thompson G. L.)
[1] A bibliography of game theory, Сборн. [7], 407—453.
У Вень-цзюн (Wu Wen-tzün)
[1] A remark on the fundamental theorem in the theory of games, Science record, t. III, № 6 (1959), 229—233. Рус. пер.: Одно замечание об основной теореме теории игр, Сборн. [12], 24—30.
[2] On non-cooperative games with restricted domains of activities, Scientia Sinica 10, № 4 (1961), 387—409. Рус. пер.: О бескоалиционных играх с ограничениями на области изменения стратегий, Сборн. [12], 459—488.
Ферма (Fermat P.)
[1] Varia opera mathematica D. Petri de Fermat, senatoris Tolosani, Tolosae, 1679.
Фишер (Fisher R. A.)
[1] Randomisation, and an old enigma of card play, The Mathemat. Gazette, v. XVIII, № 231 (1934), 294—298.
Флеминг (Fleming W. H.)
[1] A note on differential games of prescribed duration, Сборн. [6], 407—416.
[2] The convergence problem for differential games, Journ. Math. Anal. and Appl. 3 (1961), 102—116.
[3] The convergence problem for differential games, II, Сборн. [13], 195—210.
Фреше (Fréchet M.)
[1] Emile Borel, initiator of the theory of psychological games and its application, Econometrica 21, № 1 (1953), 95—96.
[2] Theorie des probabilités: exposés sur ses fondements et ses applications, Paris, 1952, pp. 156—160. Англ. пер.: Commentary on the three notes of Emile Borel, Econometrica 21, № 1 (1953), 118—124.
Фурейкер (Fouraker L. E.)
[1] A survey of some recent experimental games, Сборн. [9], 35—48.
Фюрст (Fürst E.)
[1] Ergebnisse von 3-Personen-Verhandlungsspielen in charakteristischer Funktion, Сборн. [15].
Ханани (Hanani H.)
[1] A generalization of the Banach and Mazur game, Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1960), 86—102.
Харшаньи (Harsanyi J. C.).
[1] A general solution for finite noncooperative games based on risk-domunance, Сборн. [13], 651—679.
Хейбрехтс (Huyberechts S.)
[1] Sur le probleme de l'unicité de la solution des jeux sur le carré unité, Bull. Classe Sci. Acad. Belge 44, 3 (1958), 200—216. Рус. пер.: К вопросу о единственности решения для игр на единичном квадрате, Сборн. [12], 137—153.
Цейтен (Zeuten H. G.).
[1] Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert, Teubner, Leipzig, 1903. Рус. пер.: История математики в XVI и XVII веках, ГТТИ, М.— Л., 1933.
Цермело (Zermelo E.)
[1] Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, Proceed. of the Fifth Intern. Congress of Mathematicians (Cambridge, 1912), Cambridge University Press, 1913, pp. 501—504. Рус. пер.: О применении теории множеств к теории шахматной игры, Сборн. [10], 167—172.
Чарнс (Charnes A.)
[1] Constrained games and linear programming, Proc. Nat. Acad. USA 38, № 7 (1953), 639—641.

Шапиро (Shapiro H. M.)
[1] Note on a computation method in the theory of games, Comme Pure and Appl. Math. 11, No 4 (1958), 588—593. Рус. пер.: Замечания о вычислительном методе в теории игр, Сборн. [10], 118—127.
Шеннон (Shannon C.)
[1] Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ, М., 1963.
Шепли (Shapley L. S.)
[1] A value for $n$-person games, Сборн. [3] 307—317.
[2] Quota solutions of $n$-person games, Сборн. [3], 343—359.
[3] A solution containing an arbitrary closed component, Сборн. [7], 87—94.
[4] The solutions of a symmetric market game, Сборн. [7], 145—162.
[5] Values of games with infinitely many players, Сборн. [9], 113—118.
[6] Some topics in two-person games, Сборн. [13], 1—28.
[7] Solutions of compound simple games, Сборн. [13], 267—306.
[8] Values of large market games: Status of the problem, The RAND Corporation RM-3957PR, Febr. 1964.
Шепли, Сноу (Snow R. N., Schapley L. S.)
[1] Basic solutions of discrete two-person games, Сборн. [1], 27—36.
Шепли, Шубик (Shapley L. S., Shubik M.)
[1] Solutions of $n$-person games with ordinal utilities abstract, Econometrica 21 (1953), p. 348.
Шифман (Shiffman M.)
[1] Games of timing, Сборн. [3], 97—123, Рус. пер.: Игры с выбором момента времени, Сборн. [12], 218—248.
Штейнгауз (Steinhaus H.)
[1] Mysl Akademicka, Lwow 1, № 1 (1925), 13—14.
[2] A Definition for a theory of games and pursuit, Nav. Res. Log. Quart. 7, № 2 (1960), 105—107.
Штимке (Stiemke E.)
[1] Über positive Lösungen homogener linearen Gleichungen, Math. Ann. 76 (1915), 340—342.
Шубик (Shubik M.)
[1] Bibliography on simulation, gaming, artificial intelligence and allied topics, Journ. of the Amer, Statist. Ass. 55 (1960), 736—751.
[2] Some experimental non-zero-sum games with lack of information about the rules, Management Science 8, № 2 (1962).
Эверетт (Everett H.)
[1] Recursive games, Сборн. [6], 47—78.
Яновская Е. Б.
[1] Квазиинвариантные ядра в антагонистических играх, ДАН СССР 151, № 3 (1963), 513—514.
[2] Решение антагонистических игр в конечно-аддитивных мерах, Теория вероятн. и ее примен. 15:1 (1970), 162—168.

## СБОРНИКИ

[1] Contributions to the theory of games, I, H. W. Kuhn and A. W. Tucker eds., Ann. Math. Study 24, Princeton, N.Y., Princeton University Press, 1950.
[2] Activity analysis of production and allocation, Cowles Commission Monograph No. 13, N.Y., J. Wiley and Sons, Inc., 1951, ed. T. Koopmans a.o.
[3] Contributions to the theory of games, II, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton, N.Y., Princeton University Press, 1953.
[4] Decision processes, ed. R. M. Thrall, C. H. Combs and R. L. Davis, Wiley, N.Y., 1954.
[5] Linear inequalities and related systems, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 38, Princeton, N.Y., Princeton University Press, 1956.
[6] Contributions to the theory of games, III, ed. M. Dresher, A. W. Tucker, P. Wolfe, Ann. Math. Study 39, Princeton, N.Y., Princeton University Press, 1957.
[7] Contributions to the theory of games, IV, ed. A. W. Tucker, R. D. Luce, Ann. Math. Study 40, Princeton, N.Y., Princeton University Press, 1959.
[8] Перевод сборника [5] с приложением книги С. Вайда «Теория игр и линейное программирование», ред. Л. В. Канторович и В. В. Новожилов, ИЛ, М., 1959.
[9] Recent advances in game theory, papers delivered at a Princeton University Conference, Oct. 4—6, 1961, Princeton, Econometric Research Program, 1962.
[10] Матричные игры, ред. Н. Н. Воробьев, Физматгиз, М., 1961.

[11] Применение теории игр в военном деле, ред. В. О. Ашкеназы, «Советское радио», М., 1961.
[12] Бесконечные антагонистические игры, ред. Н. Н. Воробьев, Физматгиз, М., 1963.
[13] Advances in game theory, ed. M. Dresher, L. S. Shapley, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 52, Princeton, N.Y., Princeton University Press, 1964.
[14] Essays in mathematical economics, In honor of Oskar Morgenstern, ed. M. Shubik, Princeton, N.Y., Princeton University Press, 1967.
[15] Spieltheorie, Arbeitstagung am 27. und 28. Juni 1967, Institut für höhere Studien und wissenschaftliche Forschung, Wien (ротапринт).
[16] Позиционные игры, ред. Н. Н. Воробьев и И. Н. Врублевская «Наука», М., 1967.

## УКАЗАТЕЛЬ СОАВТОРОВ

Гиршик (Girshik M. A.) см. Блекуэлл, Гиршик
Гросс (Gross O.) см. Гейл, Гросс
Карлин (Karlin S.) см. Боненбласт, Карлин, Шепли; Дрешер, Карлин; Дрешер, Карлин, Шепли
Кёнен (Coenen D.) см. Крелле, Кёнен
Кун (Kuhn H. W.) см. Гейл, Кун, Таккер
Марлоу (Marlow W. H.) см. Исбелл, Марлоу
Машлер (Mashler M.) см. Ауман, Машлер; Дэвис, Машлер
Мейберри (Mayberry J. P.) см. Джиллис, Мейберри, фон Нейман
Милнор (Milnor J. W.) см. Калиш, Милнор, Нэш, Неринг
Фон Нейман (von Neumann J.) см. Браун, фон Нейман; Джиллис, Мейберри, фон Нейман
Неринг (Nering E. D.) см. Калиш, Неринг; Калиш, Милнор, Нэш, Неринг
Нэш (Nash J.) см. Калиш, Милнор, Нэш, Неринг
Орвант (Orwant C.) см. Рапопорт, Орвант
Пелег (Peleg B.) см. Машлер, Пелег
Пирсон (Pearson E.) см. Нейман, Пирсон
Райфа (Raiffa H.) см. Льюс, Райфа
Сверчковский (Swierczkowski S.) см. Мыцельский, Сверчковский
Симакова см. Зеликин, Симакова
Смит (Smith C. A. B.) см. Гай, Смит; Гранди, Смит
Сноу (Snow R. N.) см. Шепли, Сноу
Стюарт (Stewart F. M.) см. Гейл, Стюарт
Сэвидж (Savage L.) см. Дуббинс, Сэвидж
Таккер (Tucker A. W.) см. Гейл, Кун, Таккер; Кун, Таккер
Флеминг (Fleming W. H.) см. Берковиц, Флеминг
Хаусон (Howson J. T.) см. Лемке, Хаусон
Шепли (Shapley L. S.) см. Боненбласт, Карлин, Шепли; Дрешер, Карлин, Шепли; Милнор, Шепли
Шерман (Sherman S.) см. Гейл, Шерман
Штейнгауз (Steinhaus H.) см. Кнастер, Штейнгауз; Мыцельский, Штейнгауз
Шубик (Shubik M.) см. Шепли, Шубик

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ *)


Аксиома выбора 289
Альтернатива 75, 81, 95, 205, 206
Аргумент 114
Архимедово свойство 629, 630
Ацикличность 589, 590, 594—597, 599—602, 608
— строгая 594—597, 599—602

Безобидность 246, 274, 278, 279, 478
Билинейная форма 177, 180, 181, 189, 253
Блеф 80, 187, 191, 210—211, 216, 239, 240
«Болван» 315, 317, 353, 371, 411, 413, 463, 464, 466, 468, 469, 480, 513, 523, 541
Бридж 74, 78, 79—81, 85, 105, 112, 244
Булева алгебра 88

Вариационное исчисление 37, 121
Вектор 155, 156, 160, 165, 180, 273, 274, 417
Вероятность 36, 37, 43—45, 65, 76, 95, 101, 107, 109, 112, 139, 155, 169—171, 205, 604
Веса 442—444, 472
— однородные 444, 454
Взаимодействие 353, 379, 491
Взвешенное большинство 442
Вклад 377, 379
Внешний источник 375, 377, 379, 388, 428
Выбор 75—77, 95, 109, 243, 514
— посредника 106—108, 205
Выигрывающий 313, 431, 433, 435
— заведомо 449
Выигрыш 154, 169, 543, 558, 561, 627
Выплаты фиксированные 266, 300
Выпуклость 294, 550

Геометрия 46, 48, 100
— линейная 438
— проективная 478
Гиперплоскость 157, 160, 164
Границы (верхняя, нижняя) 127
Группа 48, 102, 274—279
— знакопеременная 277
— инвариантности 277
Группа подстановок 275
— симметрическая 275
— транзитивная на множествах 277
— (игроков) привилегированная 334

Дань 56, 415
Двойственность 130
Дележ 60, 62, 65, 66, 67, 69, 70, 260, 271, 283, 284, 306, 362, 389, 522, 525, 531, 568, 578, 605, 609
— вполне исключенный 382, 425
— единственный 608
— исключенный 382, 383, 387, 425
— обобщенный 376, 379, 380, 381, 384
— — исключенный 383, 387
—, экономическое понятие 445

Дележи, бесконечное множество 306, 505
—, изоморфизм 301
—, композиция 372
—, конечное множество 474, 505
—, множество 607
—, разложение 372
—, система 297, 473
Дерево 91, 93
Дизъюнкция 92
Дискриминация 306, 307, 342, 484, 485, 517
Договоры 242, 244
Доминирование 62—64, 197, 198, 203, 205, 283, 291, 362, 379, 384, 426, 482, 483, 524, 526—528, 587
— асимметричное 289, 457
— ациклическое 602
Дополнительность 271, 447, 627
Дуополия 27, 39, 546, 602

Задача максимизации 35—38, 112, 241, 510, 522
Значение игры 128
— партии 131, 151, 154, 174, 186, 188, 258

Игра 27, 72, 74—76, 99, 105
— асимметричная 348
— безобидная 189, 279
— в нормальной форме 111, 127, 132, 146, 255, 258


*) Настоящий указатель относится только к основному тексту монографии.

Игра в позиционной форме 111, 132, 255
— вполне определенная 124, 133, 151, 174, 188, 196—198, 204, 205
— двух лиц с нулевой суммой 111, 143
— инвариантная 276
— мажорантная 126—129, 146, 172
— мажоритарная 441
— — взвешенная 443, 473
— — однородная 453
— — — взвешенная 453, 472, 477
— минорантная 126, 127, 146, 172
— не вполне определенная 136, 137
— неразложимая 367
— несущественная 251, 252, 265, 269, 270, 480
— общая 510, 511
— — *n* лиц 111, 139, 534, 542, 546, 605
— одного лица 111, 552
—, погружение 411
— простая см. Простая игра
— «пустая» 143
—, разложение 352
— разложимая 463, 480, 523
—, расширение 411
— редуцированная 268, 273, 482
— симметричная 191, 277, 348, 375
— с нулевой суммой 72—74, 110
— с полной информацией 77, 205
— с постоянной суммой 359, 360, 363, 364, 510, 511, 539—541, 585
— строго мажоритарная 442, 443
— существенная 251—253, 265, 270, 301, 345, 538, 550
— — трех лиц 280
— трех лиц 241, 301, 416—429, 554
— — — простая мажоритарная 244
— — — с нулевой суммой 241, 279
— — — существенная 241, 479—481
— фиктивная 260
— четырех лиц с нулевой суммой 308
— экстремальная 538, 539
—, ядро 466, 468
— *n* лиц с нулевой суммой 111, 258
Игрок главный 482—484, 489, 491, 492, 494, 506—509
— — сегрегированный 483, 485, 506—508
— дискриминированный 485, 508
— изолированный 388
— исключенный 306, 518
— привилегированный 481
— проигрывающий 388, 428
— самостоятельный 366, 370
— сегрегированный 483, 485, 507—509
— составной 259, 521
— фиктивный 511—515, 517, 519, 521, 523, 541
Игроки, перестановка 310, 472
—, привилегированная группа 334, 473
—, устранимое множество 537
Измеримость 356
Изоморфизм 173, 299, 300, 363, 510
Изъятие 377, 379
Индукция 139, 597
— трансфинитная 289, 597
Информационная схема игрока 101, 103
— — посредника 100, 103
Информация 73, 76—77, 79—83, 96—98, 109
— неполная 205—207
— полная 77, 149, 151, 188, 254, 545
— фактическая 100, 101
Исчисление функций 113

«Камень, мешок и ножницы» 138, 168, 169, 171, 187, 191, 207
Квантовая механика 59, 172, 414
Коалиции различной силы 248
Коалиция 40, 41, 61, 70, 73, 242, 243, 245, 246, 249, 250, 255, 257, 260, 280, 295, 306, 428, 513, 515, 516, 531, 537, 568, 574, 575, 604
— абсолютная 252, 258
— взаимоотношения 308
— взвешенного большинства 444
— выигрывающая 312, 313, 347, 430, 431, 433, 446, 455, 478
— заведомо выигрывающая 449
— — проигрывающая 449, 450
— минимальная выигрывающая 439, 440, 446, 447, 455
—, неприбыльность 447
— окончательная 329, 331
— первая 321, 322, 330, 334
— прибыльная минимальная выигрывающая 452
— проигрывающая 313, 430, 431, 433
— решающая 430
Кольцо 263, 534
Коммутативность 117, 120
Компенсации 61, 62, 70, 73, 246, 248, 254, 255, 257, 260, 513—516, 518, 537, 545, 560
Композиция 352, 353, 372, 373, 463, 551
— простых игр 463
Компонента 353, 366, 372, 373
— неразложимая 466, 480
— несущественная 462, 465
— простая 462, 464, 466
Конкуренция 27, 41, 269
— коалиций 343
Конъюнкция 92
Кооперация 242, 415, 483, 489, 522
— полная 489, 491
Кососимметричность 189
Куб $Q$, вершина 319, 320, 323, 353, 439
—, внутренность 318, 319, 320
—, главная диагональ 318, 320, 327
—, окрестность центра 335
—, специальные точки 312
—, трехмерная часть 328
—, центр 328, 330, 331
—, — и его окрестности 328

Линейная интерполяция 181
Линейное преобразование 51
Линейность 295, 550
Логика 92, 100, 293

Мажоритарная игра см. Игра мажоритарная
Максимум 114, 115, 591—594
Маргинальные пары 562, 564—566, 573, 582
Математическая физика 319
Математический метод в экономике 27—33
Математическое ожидание 113, 144, 145, 153, 173, 180, 181
Матрица 119, 166, 177
— кососимметрическая 167
Мера аддитивная 356
Метод насыщения 455
Минимум 113
Множества дележей, композиция 372
— —, разложение 372
— —, самостоятельные 367
Множество 86, 87, 89, 140
— выпуклое 155, 157—159
— заведомо на необходимое 293—295, 308, 309, 323, 418, 440, 479, 550
— — необходимое 293—295, 323, 324, 337, 418, 440, 479, 550
— замкнутое 397
— конечное 87
— линейное 294, 295, 433
— обобщенных дележей 380
— одноэлементное 87
— пустое 87, 261, 393
— разлагающее 365, 465, 523
— — минимальное 368, 369
— сольное 264, 535
— устранимое 537—539
— эффективное 283
Монополист 483
Монополия 39, 546, 584, 586, 602
— двусторонняя 60, 512, 514, 546, 558

Наследование 409, 413, 463
Насыщение 285—290, 455, 457, 591
Непрерывность функции 500
Несравнимость 590, 628
Несущественность 269, 291, 364, 370, 463
Ничья 152, 329
Новая теория 362—364
Норма поведения 66—69, 284, 285, 290, 306, 374, 378, 414, 428, 480, 481, 486, 506, 507
— — дискриминирующая 307
— — недискриминирующая 307
— — устойчивая 518, 519
Нормальная зона 409, 412, 414, 427

Общество 66, 335, 527, 544
Ограничение нулевой суммы 110, 510
Однородность 443, 473
Операции максимума и минимума 115
Опорная гиперплоскость 160
Оптимум 64
Организационный принцип 342
Организация 68, 69, 245, 379, 414, 429
— социальная и экономическая 333, 343, 371, 375, 378, 415, 445, 475, 479

«Орлянка» 138, 168, 187, 189, 192—195 198, 199, 207, 242
Основная теорема 176
Ошибка 185, 227

Пара 243, 246, 247, 263
Партия 74, 151, 154, 174, 188
Пасьянс 112
Первый элемент 63—65, 290
Переговоры 351, 507, 518, 559, 560
Передача 377, 415
Перемена ролей игроков 130, 136, 148, 188
Перестановка 477, 478
— игроков 274
— циклическая 250
Перманентная оптимальность 185
Погружение 411—413, 464, 587
Подмножество 87
Подразбиение 89, 95, 99
Подстановка 274, 275, 282
Позиционная форма 139, 146
Показатель заменяемости 474
Покер 78, 80, 84, 85, 187, 191, 208—240, 560, 612
Покупатель 558, 559, 567, 571, 573, 576, 582, 583, 585, 608, 612
Полезность 34, 36, 41—56, 109, 180, 181, 559, 565, 567, 573, 574, 583—585, 603, 608, 615, 616
— дискретная 612
— маргинальная 55, 56
— неаддитивная 270
—, трансферабельность 60, 603, 605, 608, 627
— убывающая 563, 577
— числовая 41—46, 50, 181, 606, 607, 616
Полная определенность 133, 138, 174, 179, 181, 188
Положительный октант 159
Полупространство 157, 160, 162, 164
Посредник 94, 98, 101, 108, 109
Потери 154, 170, 186, 190, 191, 227, 230, 627
Правила игры 57, 140, 171, 245, 246, 349, 436, 480
Предварение 77—79, 103, 104, 139, 144, 151
Предпочтение 41—46, 49, 52, 54, 526, 527, 590, 606, 628
Предшествование 77—79, 103, 104, 139, 144, 151
Привилегия 473
Принцип мажоритарности 441
— однородного взвешенного большинства 476, 477
Продавец 558, 559, 567, 571, 573, 576, 582, 583, 585, 508, 609
Проигрывающий 312, 313, 431, 433, 435
— заведомо 449, 450
Пространство евклидово 47, 155, 156
— линейное 180
— положительное векторное 273
Простая игра 430, 438

Простая игра для $n \geqq 4$ 470
— — для $n \geqq 6$ 472
— — для небольших значений $n$ 466
— —, добавление «болванов» 471
— —, неразложимость 466
— —, одноэлементные множества 435
— —, перечисление 454
— —, разложение 461
— —, решения 440
— —, с «болванами» 469, 470
— —, семейства $W$, $L$ 436
— —, стратегическая эквивалентность 438
— —, характеризация 433
— —, характеристическая функция 436, 437
— —, шесть основных контрпримеров 472
Простота 443, 461, 463
—, точное определение 438
—, элементарные свойства 438
Противоположность интересов 241

Равновесие 248, 377
Разбиение 89, 94—97, 99, 140
— разлагающее 365, 367, 369, 370, 480
Разложение 262, 302, 353, 372, 373, 395, 397, 461, 551
Разложимость 355, 356, 370, 373
Распределение 112, 246, 280, 282, 363, 377
Расширение до игры с нулевой суммой 511, 512, 532, 535, 542
Рациональность 34, 35, 125, 154
Редуцирование 268, 336, 339
Решение 65, 129, 283, 285, 306, 342, 343, 362, 373, 380, 381, 427, 486, 530, 531, 587, 588
— главное простое 453, 473, 476, 477
— дискриминирующее 317, 322, 332, 335, 343, 451, 517, 518
— для ациклического отношения 597
— для линейного упорядочения 591
— для симметричного отношения 591
— единственное 595, 599, 600, 601, 603
— естественное 474
— конечное 322, 506
— недискриминирующее 307, 484
— неразложимое 375
— несимметричное 375
— — центральное 333
—, новое определение 530
— общих игр трех лиц 554
— одноэлементное 296, 299
— разложимое 375
— симметричное 329
— Г для $E(e_0)$ 406—408
— Г для $F(e_0)$ 397—406
Робинзон Крузо 35—38, 41, 56, 112, 558
Рулетка 112
Рынок 510, 558, 559, 562, 565, 581, 605
— двух лиц 558
— общий 583
— трех лиц 567

Седло 121, 123
Седловая точка 120, 121, 177, 183, 193, 194, 196, 204
Седловое значение 113, 121
Сегрегация 307
Сигнализация 77, 79, 80
— обратная 80
— прямая 80
Симметрия 130, 135, 188, 189, 245, 274, 275, 278, 286, 315, 456, 591
Системы замкнутые 414
Случай 112, 170
Совпадение интересов 241, 242
Соглашения 244, 257
Союзник 241
Справедливая плата 373, 374
Статика 171, 307
Статистика 168
Стратегическая эквивалентность 265, 267, 268, 291, 299, 359, 361, 385, 436, 439, 480, 510, 511, 539, 540, 546
Стратегия 70, 76, 105, 106, 109, 128, 144, 147, 152, 174, 178, 183, 190
— оптимальная 135, 192, 200, 202, 217, 218, 225—229, 236—240, 522
— перманентно оптимальная 185—187
— смешанная 168, 170, 172, 173, 179, 181, 184, 191, 197, 200, 206, 215—217, 233, 234, 240, 253, 543, 604
— чистая 170, 172, 179, 184, 202—205, 213, 216, 233, 240
Суперпозиция игр 274, 275
Существенность 269, 291, 364, 461

Теорема о неподвижной точке 178
Теория групп 22, 102, 275, 277, 311
— меры 271, 356
— относительности 171
— полезности (см. также Полезность) 180
— —, аксиоматическое построение 51—55, 616—630
— функций 178
Товар 562, 567
Торговля внешняя 354
Транзитивность 52, 64, 589, 590
Треугольник внутренний 421, 424
Трик-трак 78, 151, 152, 187

Удовлетворяемость 286, 288, 455
Упорядочение 45, 52, 589
— линейное 45, 52, 589, 591, 593, 594, 599, 616
— частичное 45, 589—591, 599
Условие главное 292, 293, 298
— Липшица 500
— равенства суммы нулю 358
Устойчивость 280, 282, 286, 378
— имманентная 284
Ущерб 543, 558, 561

Физика 31, 46, 58, 59, 70, 172
Фиксированные платежи 314

Фундаментальный треугольник 302, 418—425, 555, 556, 570—572, 580, 587
Функционал 180
Функциональные операторы 113, 117
Функция 113, 114, 155
— арифметическая 114
— меры 271
— множеств 115, 260, 263
— характеристическая см. Характеристическая функция
— числовая 114, 115

Характеристическая функция 258—265, 273, 514—516, 527, 533, 534, 536, 539, 542, 559, 575, 584, 604, 609
— —, аддитивность 271
— — в новой теории 361
— — нормированная 340
— — ограниченная 532, 533, 535—537
— — расширенная 532, 533, 536, 537
— — редуцированная 268, 340, 547—549
Ход 75, 77, 78, 79, 81, 83—86, 93—96, 98, 101, 102—106, 109, 138, 149, 153, 205, 206, 244, 514
— личный 75, 78, 79, 81, 83, 101, 103, 139, 147, 149, 153, 205, 244, 651
Ход случайный 75, 78, 79, 81, 83, 95, 101, 105, 106, 109, 138, 145, 149, 151—153, 205, 213, 522, 604
— фиктивный 86, 154

Цена 559, 561, 565, 566, 573, 574, 582, 583, 585
Центр тяжести 47, 157, 319

Шахматы 75, 77, 84, 86, 98, 140, 151, 152, 187

Эвристические рассуждения 59, 248, 258, 282, 308, 313, 314, 316, 506, 515, 517, 587
Эквивалентность стратегическая см. Стратегическая эквивалентность
Эксплуатация 343, 388
Эксцесс 377—382, 427, 428, 463, 464
— слишком большой 387, 393
— — малый 387, 393
Эффективность 291, 300, 363, 379, 528

Ядро 466

*Джон фон Нейман, Оскар Моргенштерн*

ТЕОРИЯ ИГР И ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

(«Серия Теория игр»)

М., 1970 г., 708 стр. с илл.

Редакторы *М. М. Горячая, Л. А. Животовский.*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно.*

Корректор *Т. С. Плетнева.*

---

Сдано в набор 27/XI 1969 г. Подписано к печати 5/VI 1970 г. Бумага 70×108/16. Физ. печ. л. 44,25. Условн. печ. л. 61,95. Уч.-изд. л. 59,81. Тираж 14 000 экз. Цена книги 4 р. 49 к. Заказ 1321.

---

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Москва, Трехпрудный пер., 9